

Méthodes mathématiques en écologie

Tri Nguyen-Huu

Séminaire MIAT – Toulouse - 02 octobre 2020





Introduction

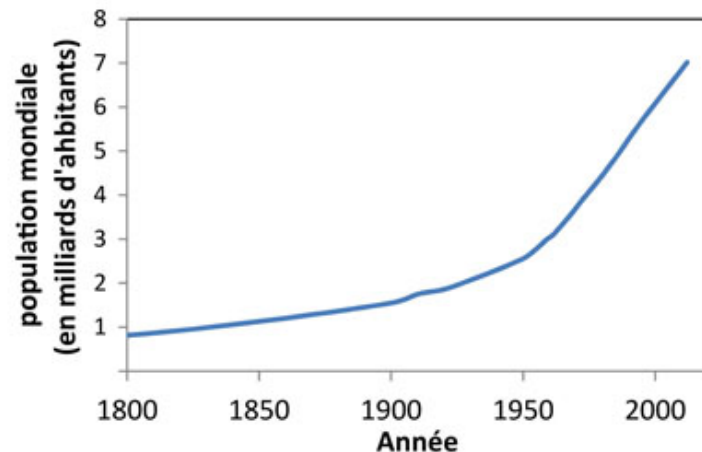
Introduction

Les systèmes dynamiques sont utilisés depuis très longtemps en dynamique des populations



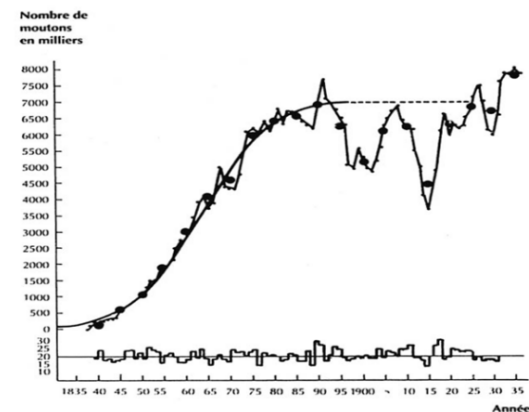
Malthus (1766-1834)

$$\frac{dn}{dt} = rn$$



Logistique (Verhulst, 1840)

$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right)$$



Un exemple simple de système complexe

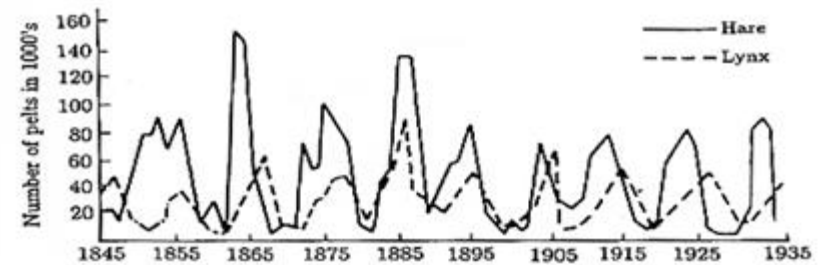
Modèle de Lotka (1925) & Volterra (1926)



Vito Volterra
(1860-1940)



Alfred J. Lotka
(1880-1949)



Données empiriques

Un exemple simple de système complexe

Modèle de Lotka (1925) & Volterra (1926)



Vito Volterra
(1860-1940)



Alfred J. Lotka
(1880-1949)

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx - axy \\ \dot{y} &= eaxy - my \end{cases}$$

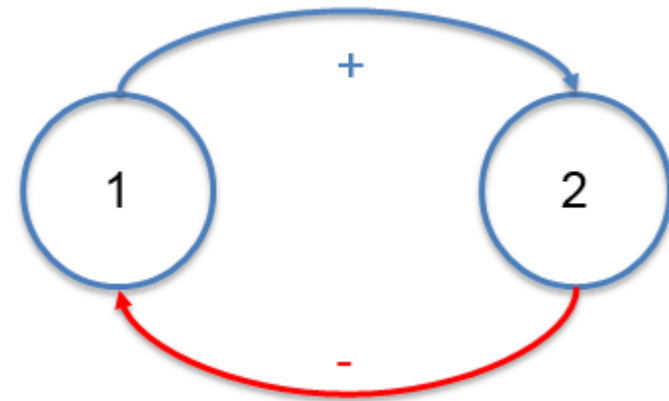
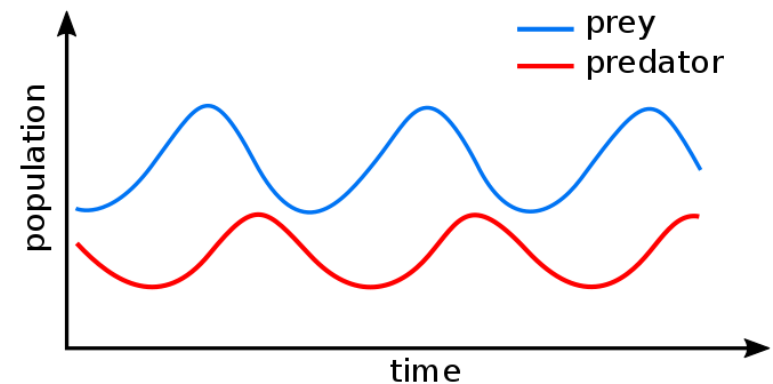


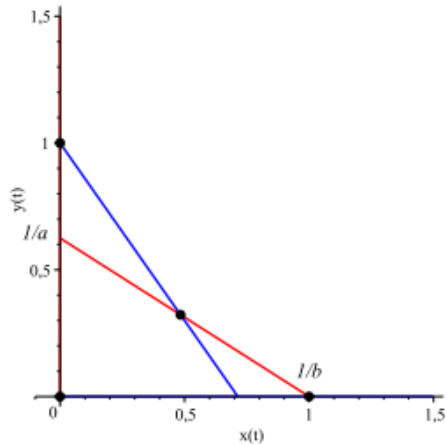
Diagramme d'interaction



Modèle

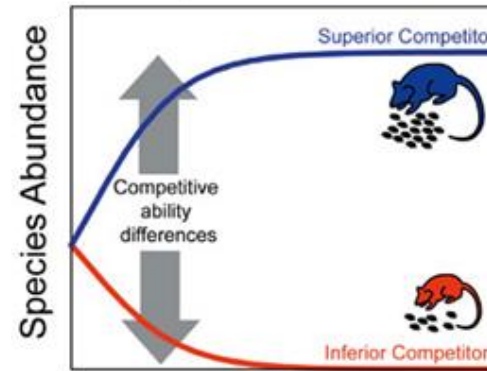
Exclusion compétitive

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha \frac{y}{K_2} \right) \\ \dot{y} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \beta \frac{x}{K_1} \right) \end{cases}$$



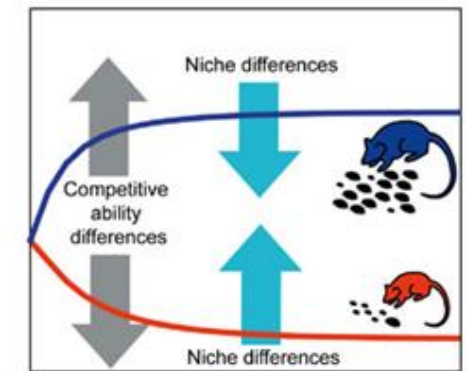
Portrait de phase, équilibres

a. Competitive exclusion

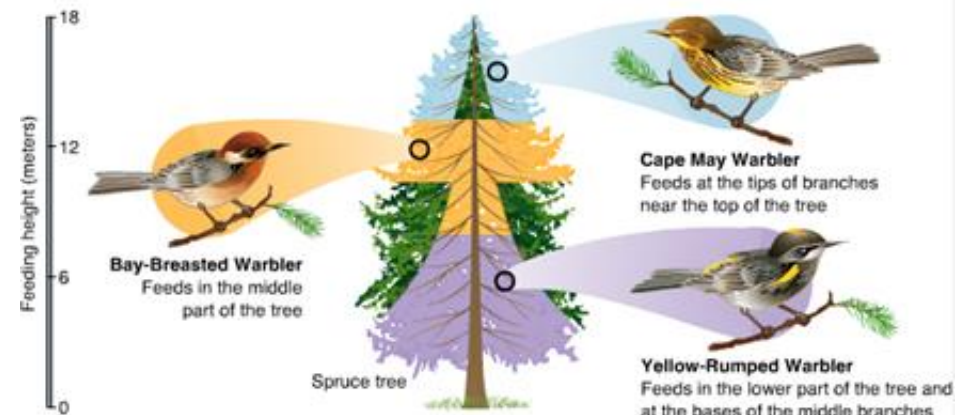


Time

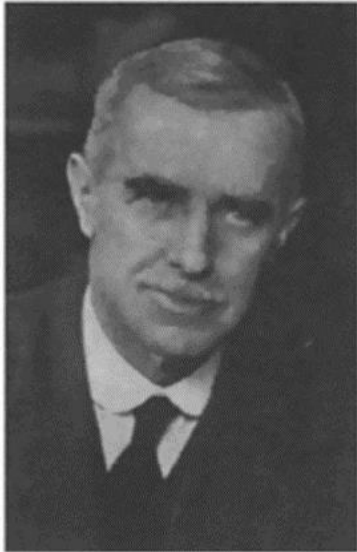
b. Coexistence



Time



Epidémiologie



Anderson G. McKendrick
(1876-1943)

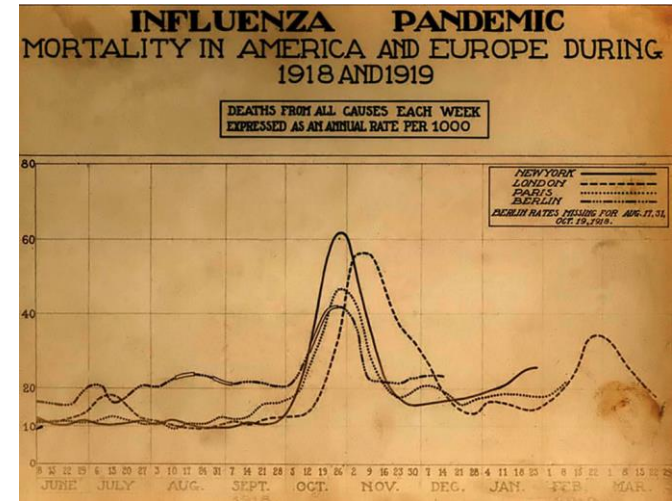


William O. Kermack
(1898-1970)

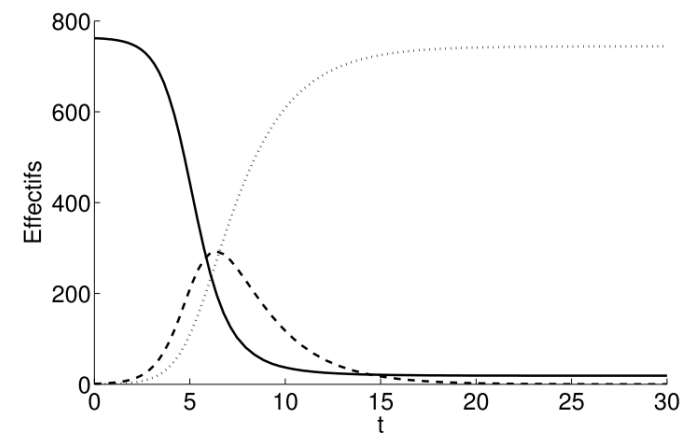
Population de susceptibles (S), infectés (I) et remis (R):

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I \end{cases}$$

β est le taux d'infection, $1/\gamma$ est le temps moyen de récupération de l'infection.



Données épidémiologiques



Modélisation



Modèles bioéconomiques de pêche

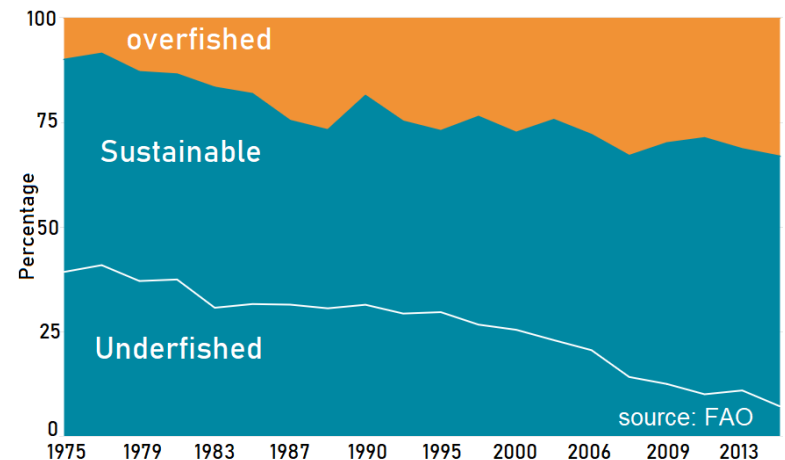
Modélisation bioéconomique des pêches

Pression sur les ressources marines

La pêche est l'une des principales causes du déclin des populations marines.

Le nombre de stocks surexploités a triplé en 50 ans.

3 milliards de personnes dépendent directement du poisson (nourriture, économie).



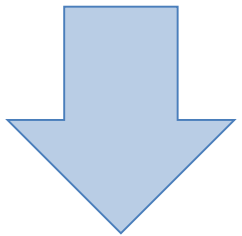
Tendance mondiale de l'état des pêcheries

Modélisation bioéconomique des pêches



Effort de pêche (E)

Constant



Capture du poisson
Proportionnellement à E et à x



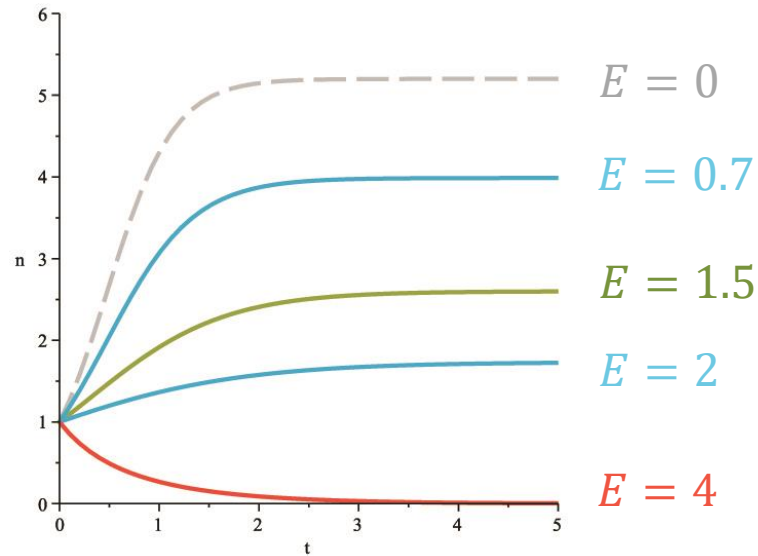
Stock de poisson (n)

Croissance logistique

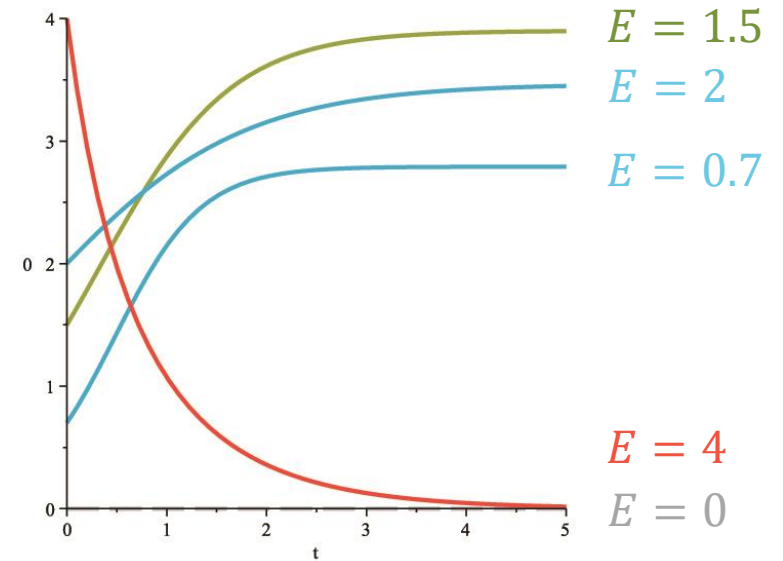
$$\dot{n} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - Ex$$

Gordon (1954)

Modélisation bioéconomique des pêches



Evolution du stock de poisson n en fonction de l'effort de pêche E



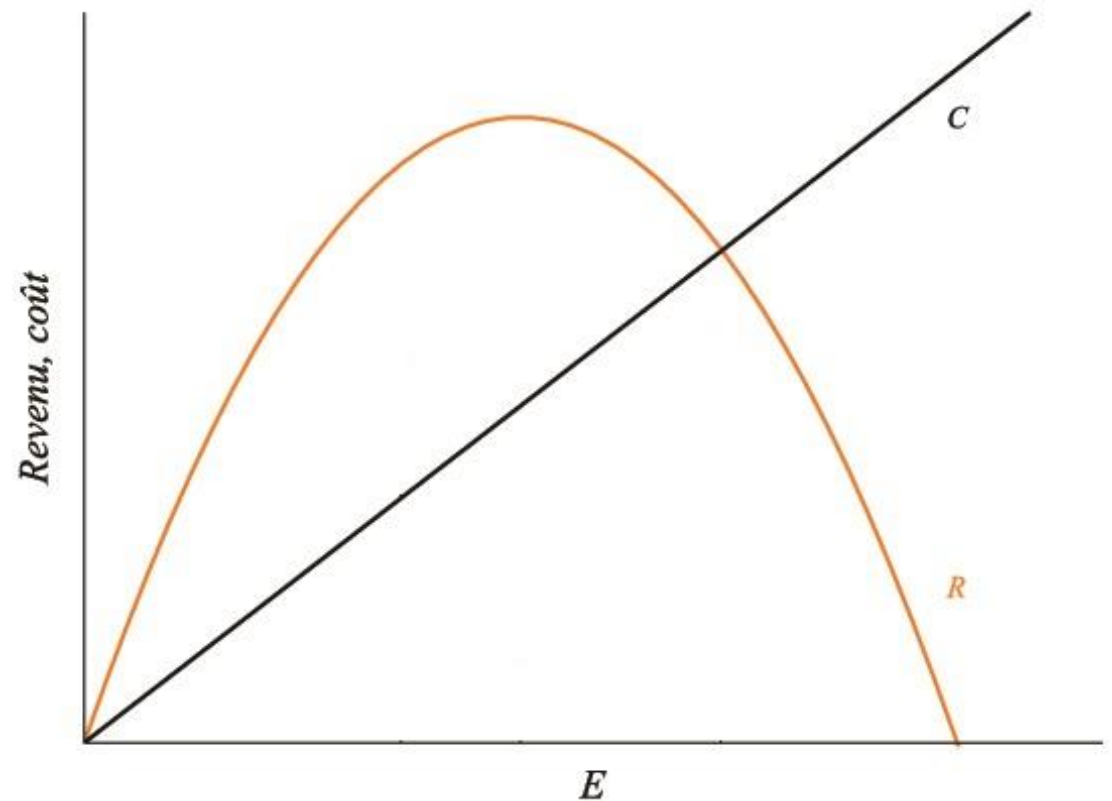
Evolution de la quantité de poisson pêché en fonction de l'effort de pêche E

Modèle de Gordon (1954)

Effort de pêche: E

Coût proportionnel à l'effort de pêche: $C=cE$

Revenu proportionnel à la capture: $R=pY(E)$



Modèle statique de Gordon-Schaefer

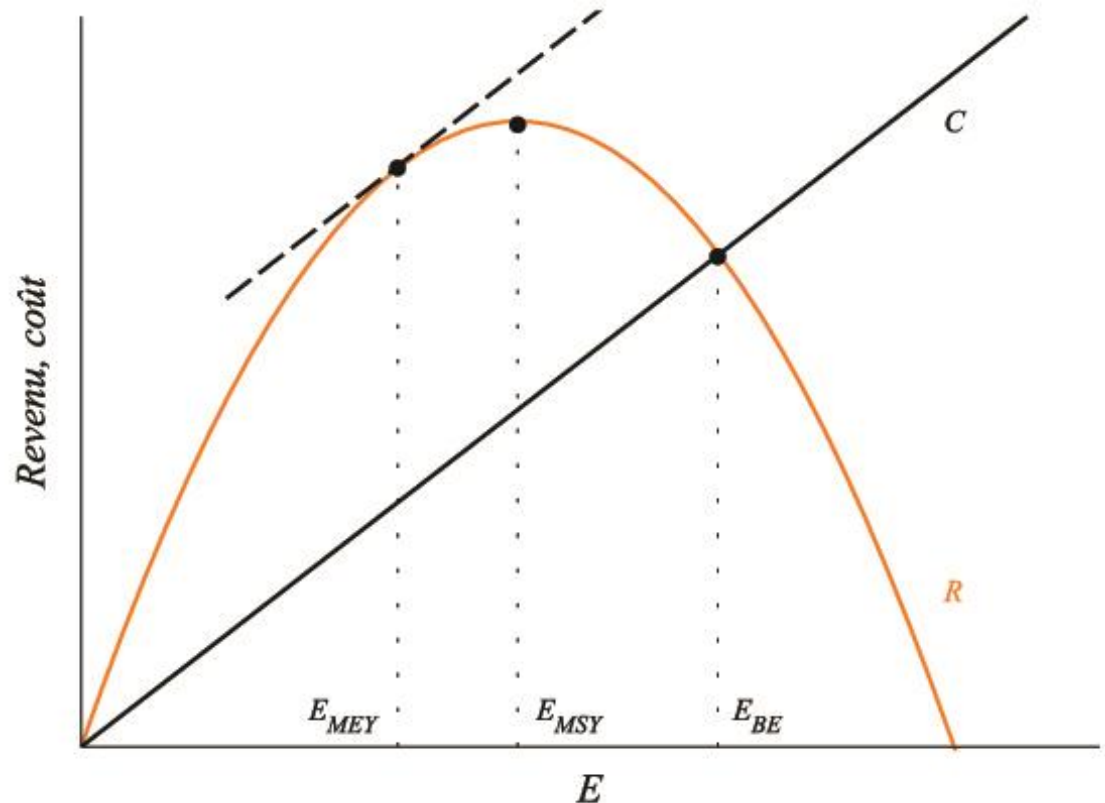
Modèle de Gordon (1954)

Le modèle de Gordon(1954) suggère trois valeurs remarquables pour l'effort de pêche E

E_{MSY} :
Maximum Sustainable Yield
Rendement maximal durable

E_{MEY} :
Maximum Economic Yield
Rendement économique maximal

E_{BE} :
Bionomic Equilibrium
Equilibre bionomique



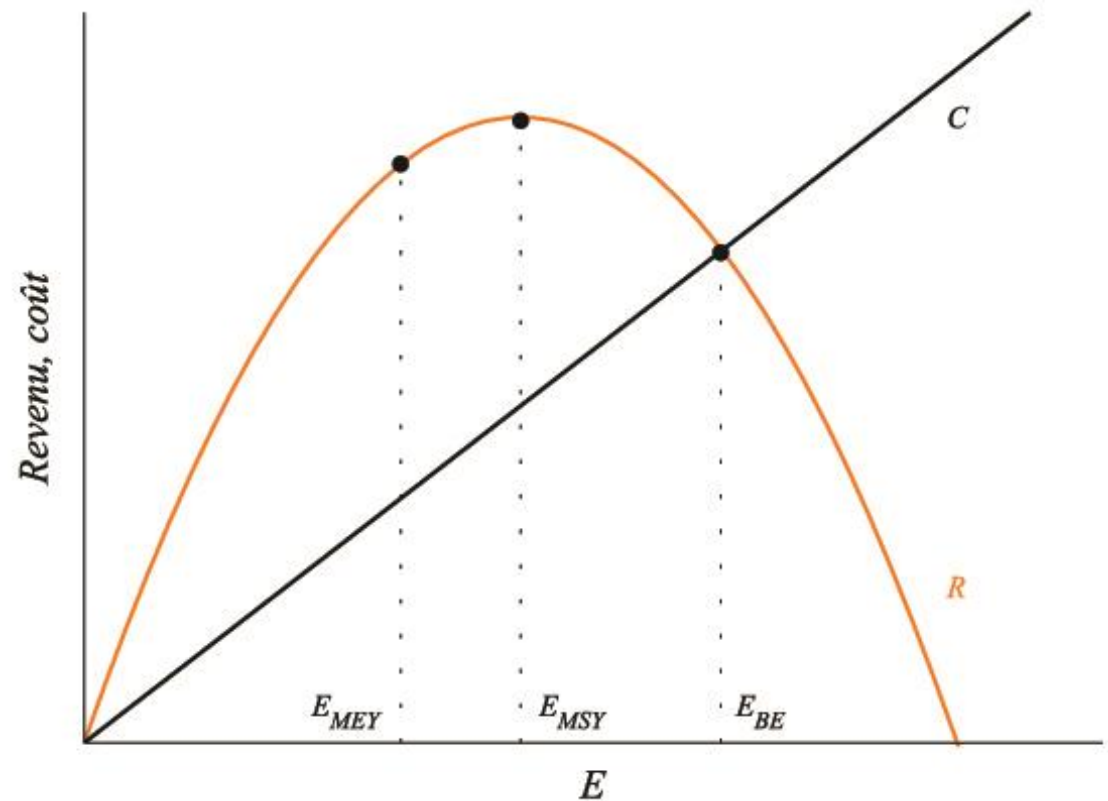
Modèle statique de Gordon-Schaefer

Modèle de Gordon (1954)

$$R(E_{MSY}) > R(E_{MEY}) > R(E_{BE})$$

$$E_{MSY} > E_{MEY}$$

E_{MSY} : considéré comme idéal
sociétal

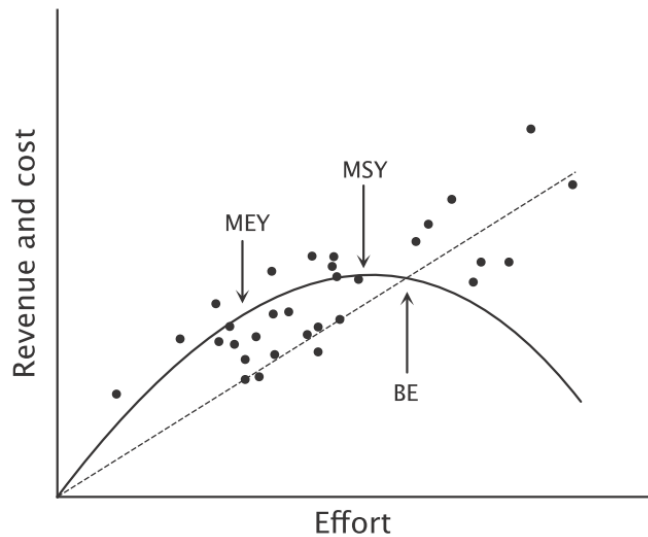


Modèle statique de Gordon-Schaefer

Remises en cause

Littérature

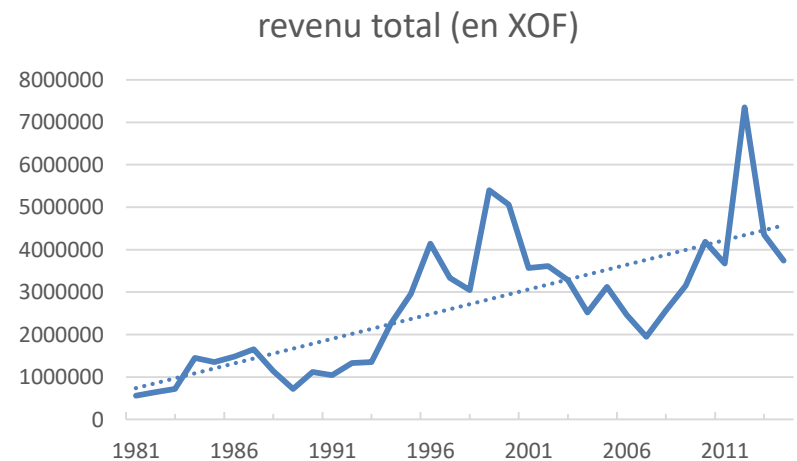
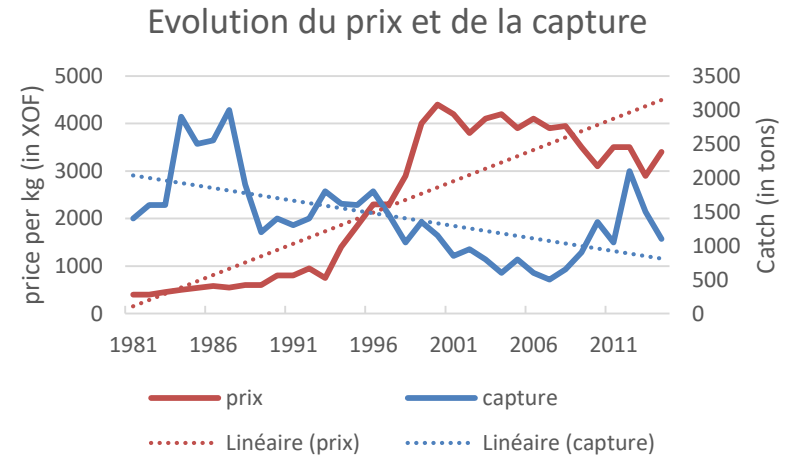
Cela fait référence depuis 50 ans, mais récemment remis en cause.



Données pour le *Spiny Lobster*, Turks and Caicos Islands.

Christensen, V. (2010) MEY = MSY, Fish and Fisheries 11.

Données: cas du Thiof



Source: CRODT

A large herd of zebras is grazing in a savanna landscape. The zebras are scattered across the field, with some in the foreground and others in the background. The grass is tall and golden-brown, suggesting a dry season. The background shows a vast, open plain under a clear sky.

Modélisation des grands herbivores
Amboseli National Park, Kenya

Pression
des activités
humaines



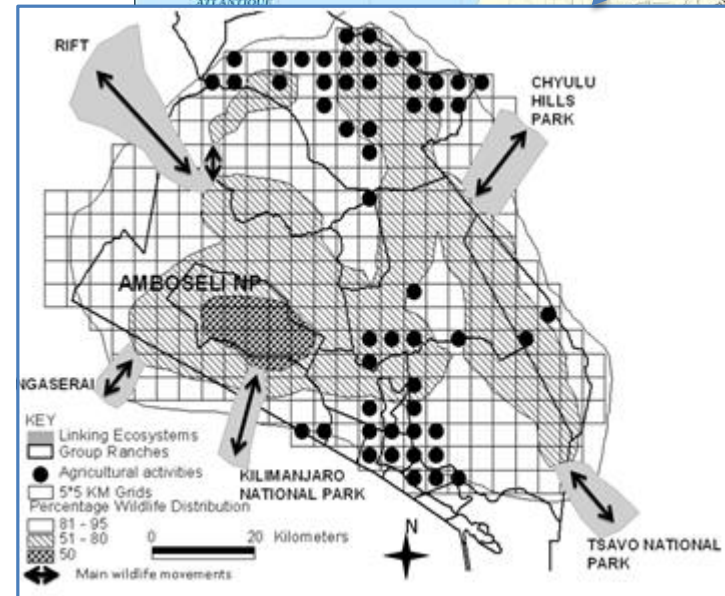
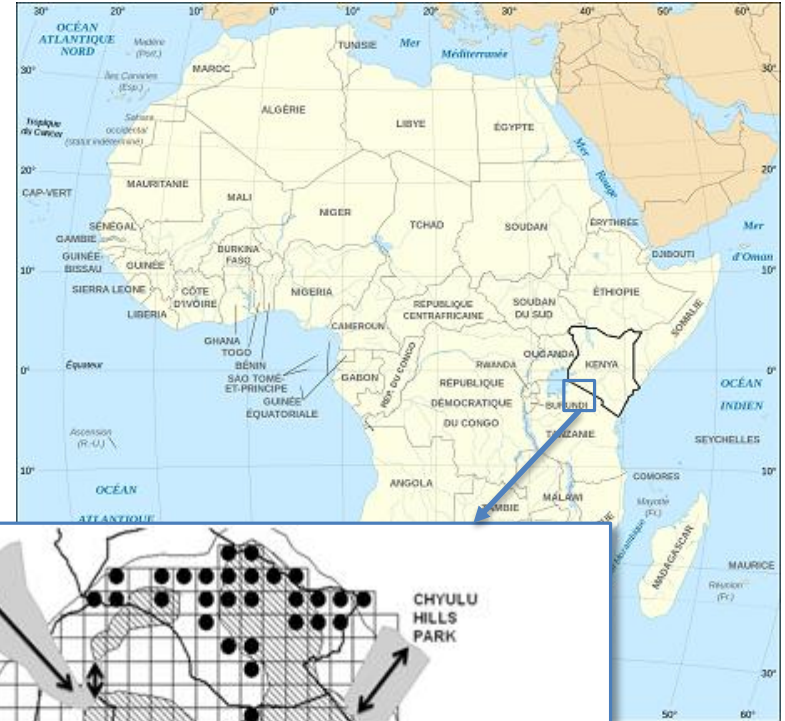
Sècheresses



Braconnage



Une grande biodiversité

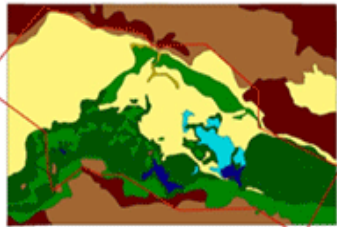


Modélisation de la population d'herbivores

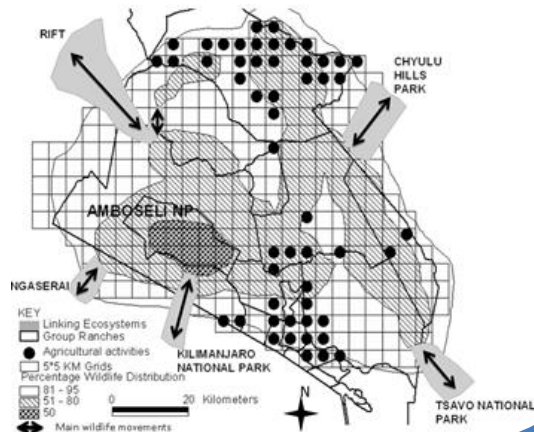
Problématiques

Déterminer l'impact climatique
qualité et disponibilité des ressources

1950



Déterminer les effets des activités
humaines
corridors de migration



Modèle EDO

Modèle démographique

Energy Budget model

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} = d_{ij}^{demo}(\eta) + d_{ij}^{disp}(\eta)$$

(η_{ij} : densité de population pour
l'espèce j sur le site i)

Modèle de dispersion

*Dispersion et migration
sur une grille*

Sorties du modèle

Dynamique sur le long
terme

Evaluation du risque
d'extinction

Evaluation de
l'efficacité de mesures
de conservation

Modèle démographique

$$d_{ij}^{demo}(\eta) = \frac{\eta_{ij} \beta (e_{ij} - q_j)}{\omega_j}$$

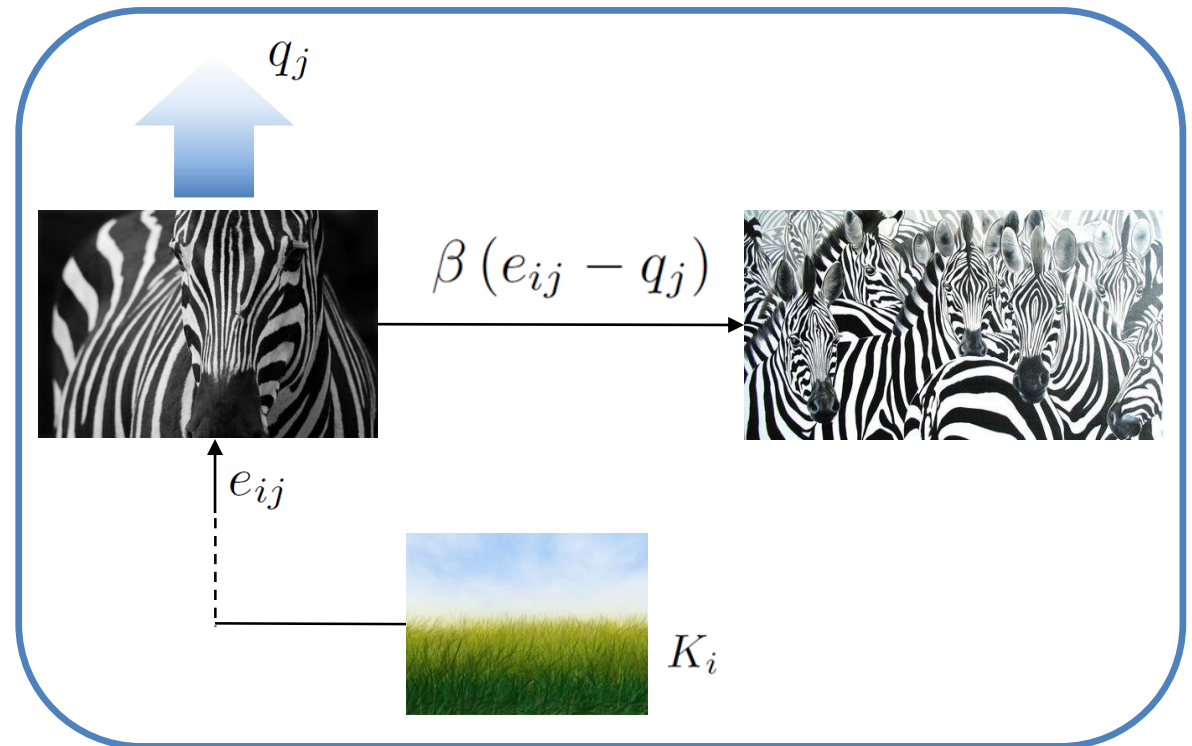
ω_j : masse corporelle

q_j : énergie nécessaire au métabolisme

β : facteur de conversion énergie-biomasse

e_{ij} : gain énergétique (alimentation)

K_i : quantité de nourriture



Modèle démographique

$$d_{ij}^{demo}(\eta) = \frac{\eta_{ij} \beta (e_{ij} - q_j)}{\omega_j}$$

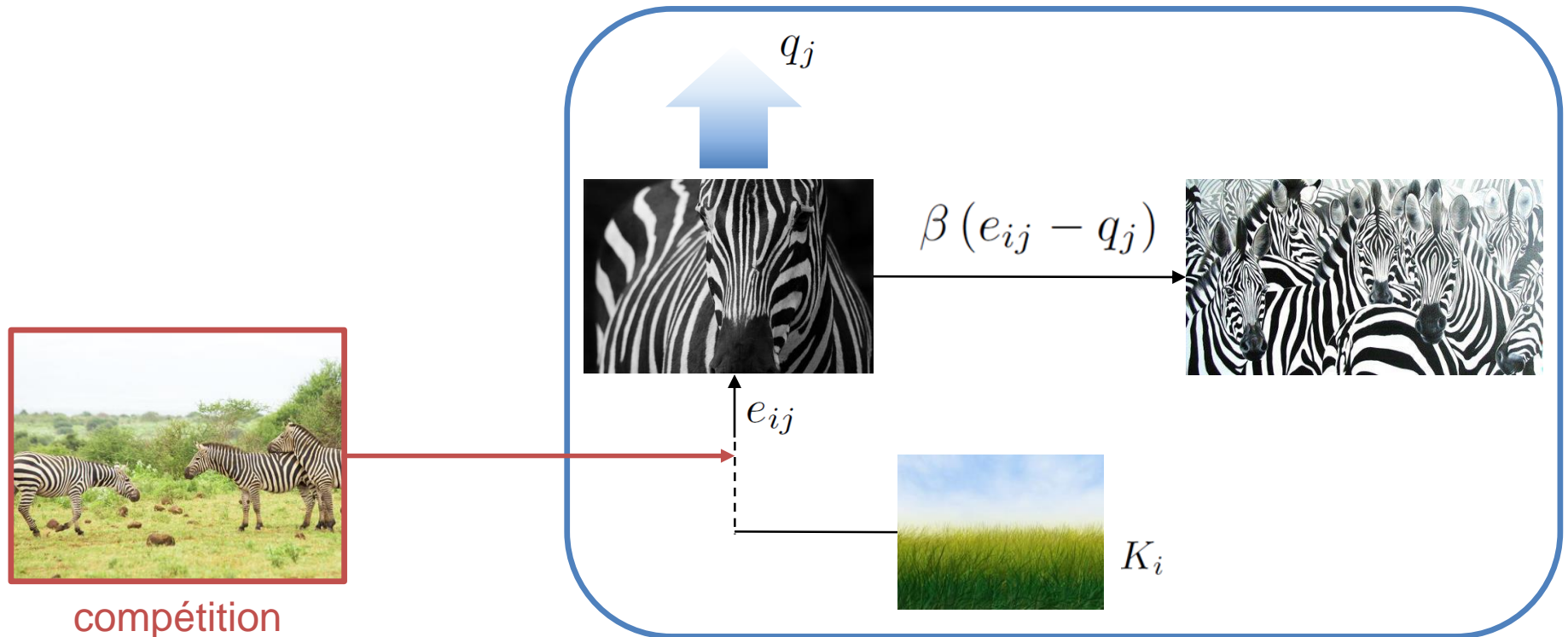
ω_j : masse corporelle

q_j : énergie nécessaire au métabolisme

β : facteur de conversion énergie-biomasse

e_{ij} : gain énergétique (alimentation)

K_i : quantité de nourriture



Modèle démographique

$$d_{ij}^{demo}(\eta) = \frac{\eta_{ij} \beta (e_{ij} - q_j)}{\omega_j}$$

ω_j : masse corporelle

q_j : énergie nécessaire au métabolisme

β : facteur de conversion énergie-biomasse

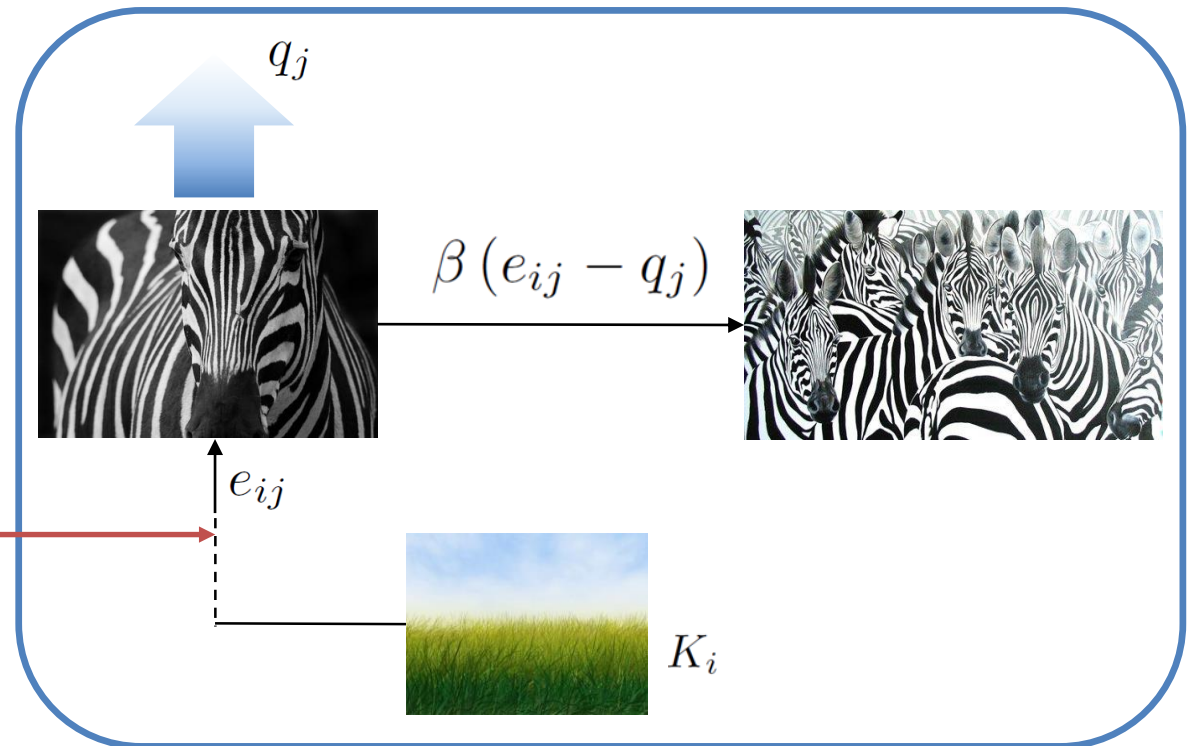
e_{ij} : gain énergétique (alimentation)

K_i : quantité de nourriture

$$e_{ij} = D_j g_j \frac{K_i}{\sum_{j'=1}^s g_{j'} \eta_{ij'} + K_i}$$

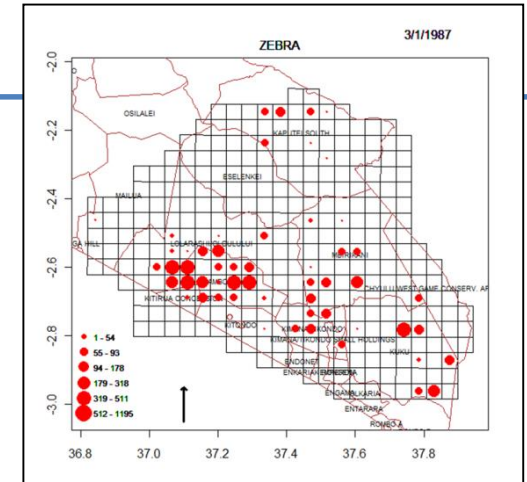
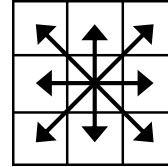


compétition



Modèle de dispersion

Dispersion vers les plus proches voisins



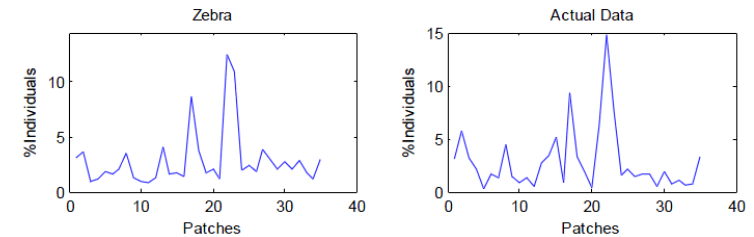
La proportion d'animaux qui quittent un site est inversement proportionnelle aux ressources:

α_j : effet de la quantité d'herbe

β_j : effet de la qualité de l'herbe

δ_j : effet des patchs adjacents

ρ_{ij} : préférence d'habitat



Saison sèche

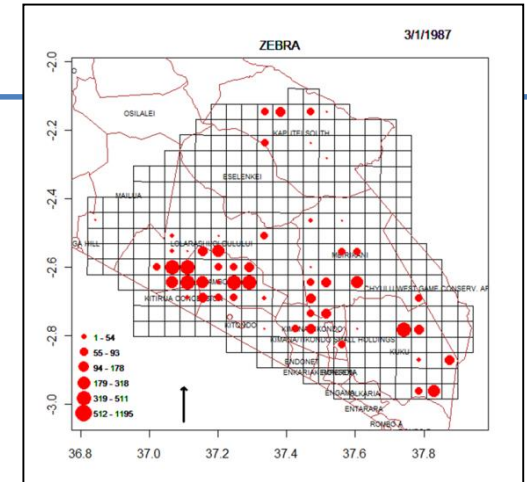
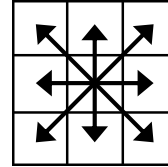
Species	w [kg]	α	β	δ	ρ	MSE	R^2
Buffalo	450	0.7581	0.3387	0.3261	5.1613	13.02	0.664
Elephant	1875	0.4258	0.4195	0.0138	3.0645	8.61	0.556
Wildebeest	143	0.1523	0.7806	0.0133	2.0968	4.21	0.729
Zebra	200	0.2155	0.7710	<0.001	1.4516	2.79	0.723

Saison des pluies

Species	w [kg]	α	β	δ	ρ	MSE	R^2
Buffalo	450	0.3871	0.5806	0.0203	1.7742	21.39	0.475
Elephant	1875	0.3226	0.5484	<0.001	2.0968	12.31	0.439
Wildebeest	143	0.1935	0.1290	<0.001	1.4194	3.05	0.342
Zebra	200	0.2103	0.0010	<0.001	1.2903	1.72	0.214

Modèle de dispersion

Dispersion vers les plus proches voisins



La proportion d'animaux qui quittent un site est inversement proportionnelle aux ressources:

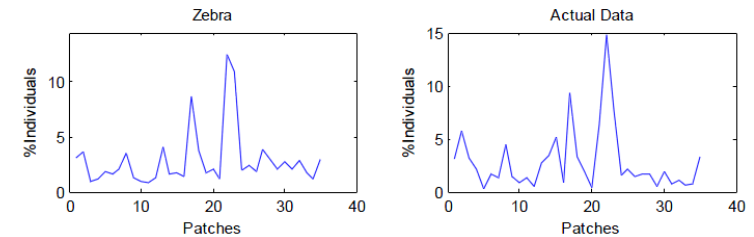
α_j : effet de la quantité d'herbe

β_j : effet de la qualité de l'herbe

δ_j : effet des patchs adjacents

ρ_{ij} : préférence d'habitat

$$G_{ij} = \rho_i K_i^\alpha Q_i^\beta + \delta_j \sum_{\text{voisins}} \rho_i K_i^\alpha Q_i^\beta$$



Saison sèche

Species	w [kg]	α	β	δ	ρ	MSE	R^2
Buffalo	450	0.7581	0.3387	0.3261	5.1613	13.02	0.664
Elephant	1875	0.4258	0.4195	0.0138	3.0645	8.61	0.556
Wildebeest	143	0.1523	0.7806	0.0133	2.0968	4.21	0.729
Zebra	200	0.2155	0.7710	<0.001	1.4516	2.79	0.723

Saison des pluies

Species	w [kg]	α	β	δ	ρ	MSE	R^2
Buffalo	450	0.3871	0.5806	0.0203	1.7742	21.39	0.475
Elephant	1875	0.3226	0.5484	<0.001	2.0968	12.31	0.439
Wildebeest	143	0.1935	0.1290	<0.001	1.4194	3.05	0.342
Zebra	200	0.2103	0.0010	<0.001	1.2903	1.72	0.214

Modèle de grande dimension

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} = \eta_{ij} \frac{\beta}{\omega_j} \left(\frac{\alpha D_j g_j K_i}{\sum_{j'=1}^s g_{j'} \eta_{ij'}} - q_j \right) - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{|V_i|}{K_i} \eta_{ij} - \sum_{i' \in V_i} \frac{\eta_{i'j}}{K_{i'}} \right)$$

$A \times s$ équations (A : nombre de sites, s : nombre d'espèces)

Species	w [kg]	g [kg/day]	D	q [MJ/day]
Zebra	200	4.68	0.561	19.28
Wildebeest	123	3.58	0.648	17.07
Grant's Gazelles	40	0.62	0.645	3.253

Source: ACC

Analyse mathématique du système

L'équilibre vérifie

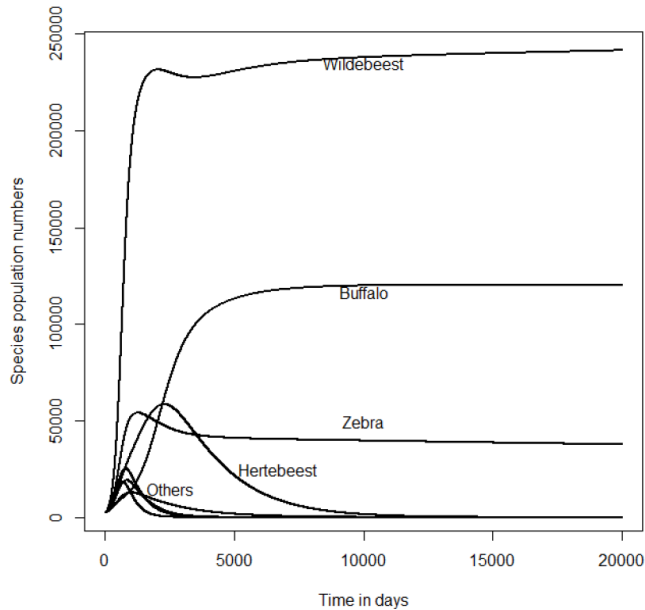
$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_i = 0 \quad \text{or} \quad r_i = r_i \frac{\nu_i}{K_i} + \sum_{j=1}^s \mu_{ij} g_j \eta_j \\ \eta_j = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^A \mu_{ij} \nu_i = \frac{q_j}{\alpha D_j g_j} \end{array} \right.$$

On note $\Phi = \{i, \nu_i \neq 0\}$ et $\Psi = \{j, \eta_j \neq 0\}$

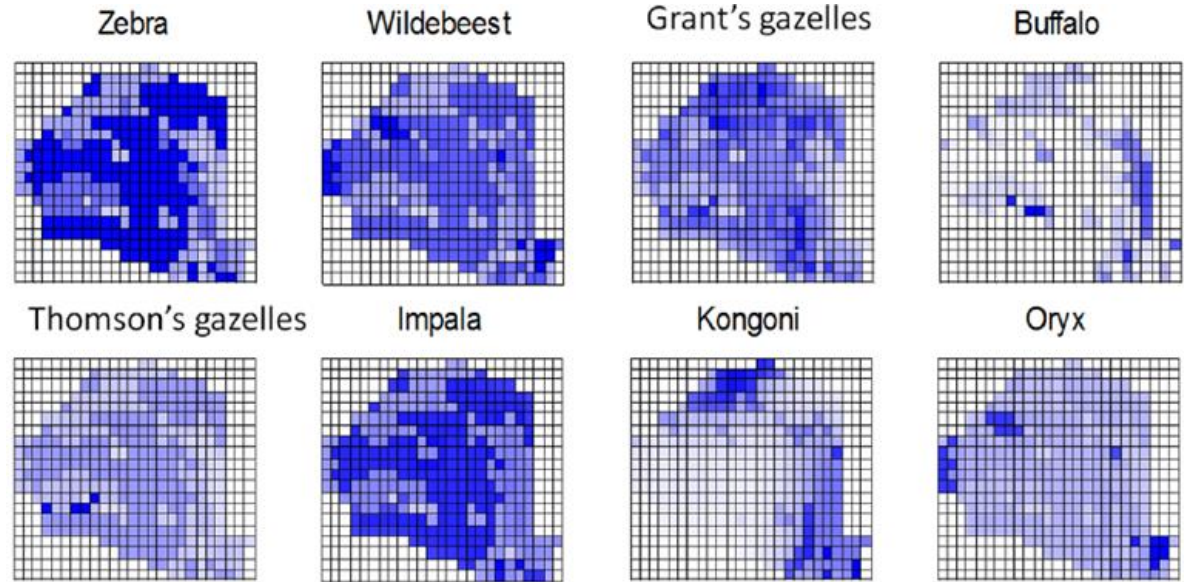
Pour chaque ensemble (Φ, Ψ) , il existe un équilibre, qui n'est pas nécessairement positif. La stabilité dépend des coordonnées nulles.

Il existe au plus un équilibre ≥ 0 stable.

Extinction d'espèces




Evolution démographique



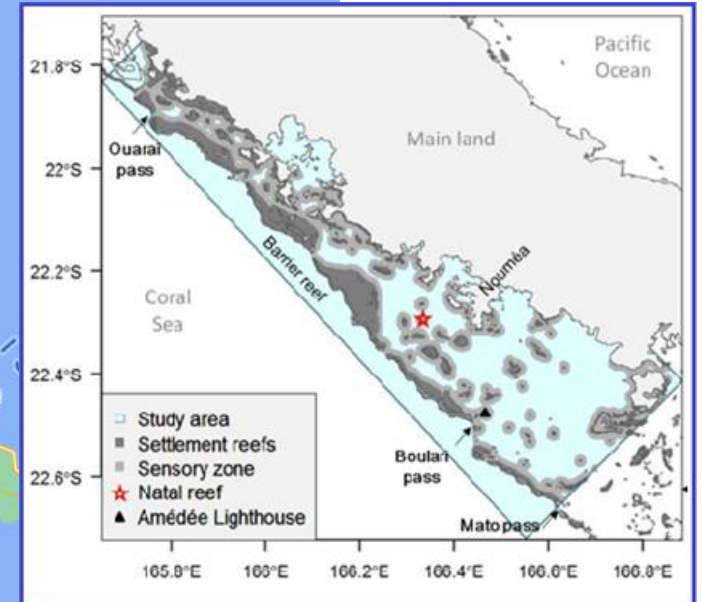
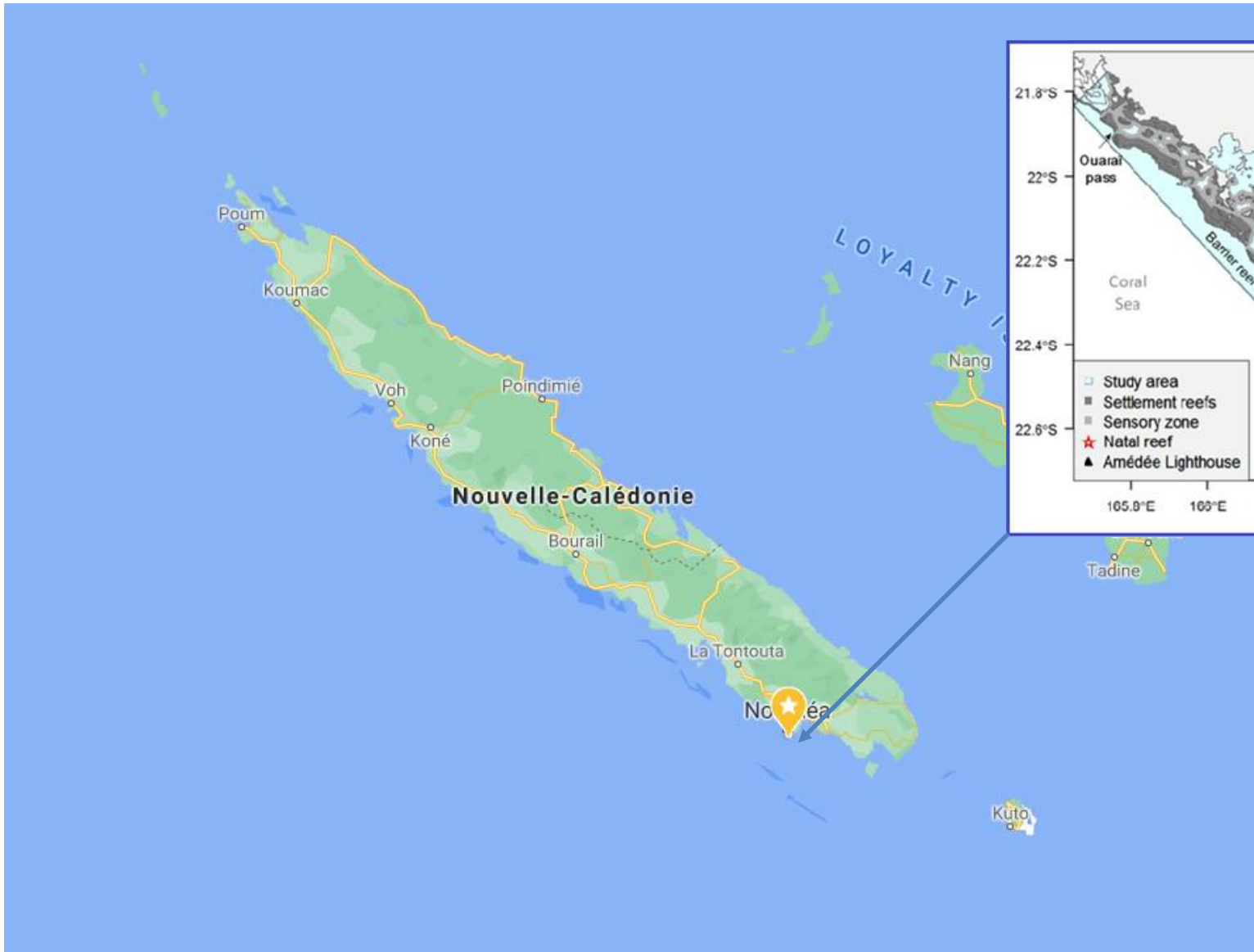
Distribution spatiale

La forte corrélation entre les distributions spatiales entre certaines espèces conduit à une forte compétition, et donc à la disparition d'espèces en cas de disparition des corridors de migration.

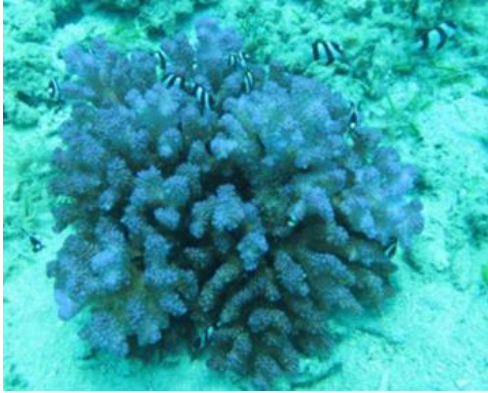


Connectivité récifale de *Dascillus Aruanus*
Lagon de Nouméa, Nouvelle-Calédonie

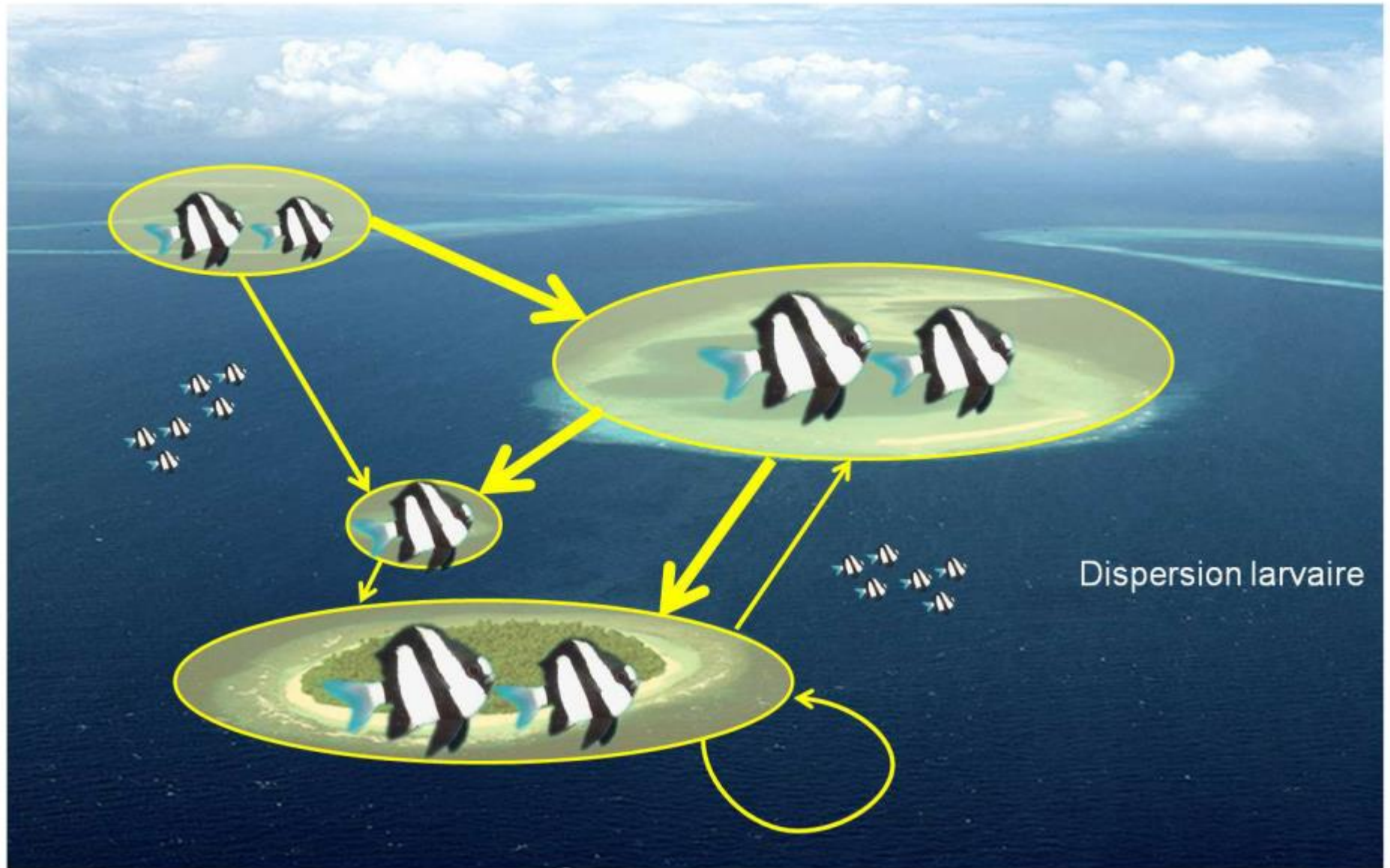
Le lagon de Nouméa, Nouvelle-Calédonie



Etude de la connectivité larvaire de *Dascyllus Aruanus* dans le lagon de Nouvelle-Calédonie

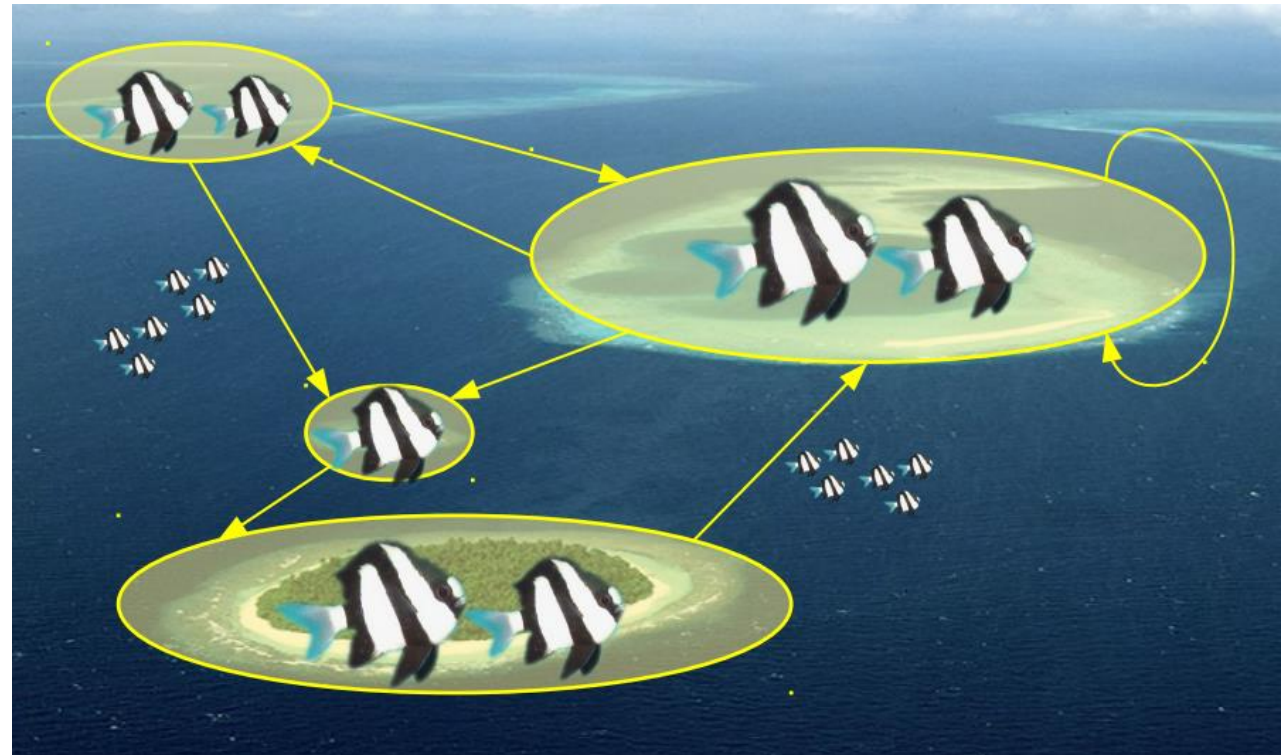
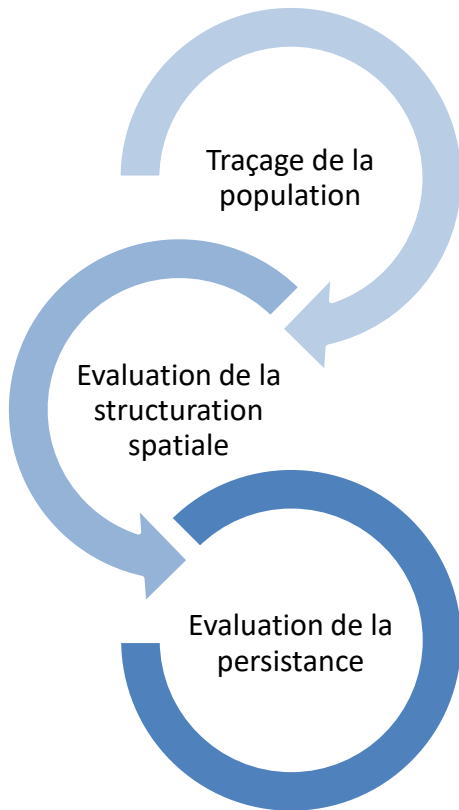


Connectivité larvaire



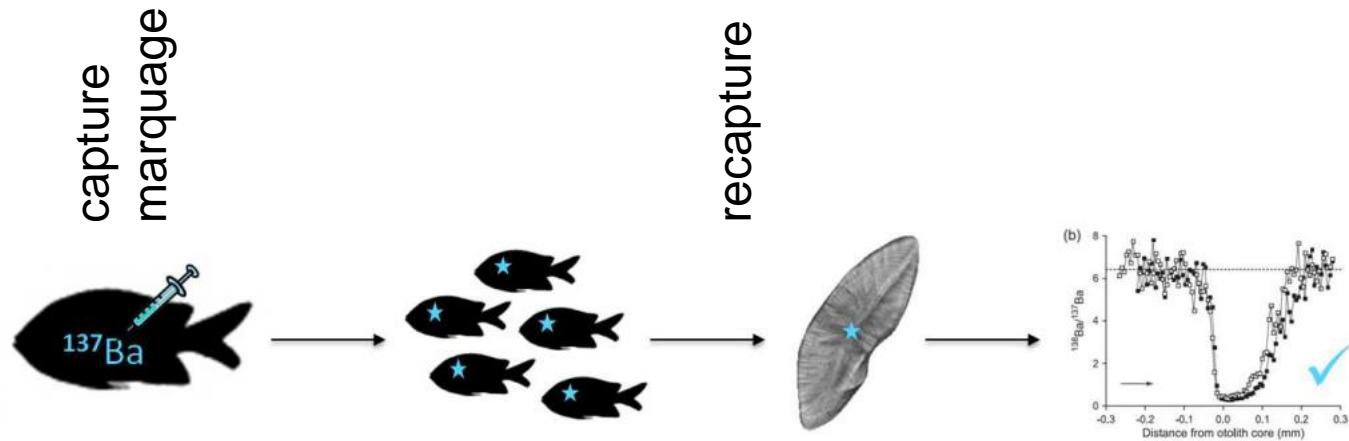
Problématique

Compréhension de la dynamique: persistance à long terme ? Rôle de la structuration spatiale ?



Hastings and Botsford (2006): "Our goals are to understand how the interplay between connectivity (dispersal) and local population dynamics allows persistence in a network of heterogeneous patches"

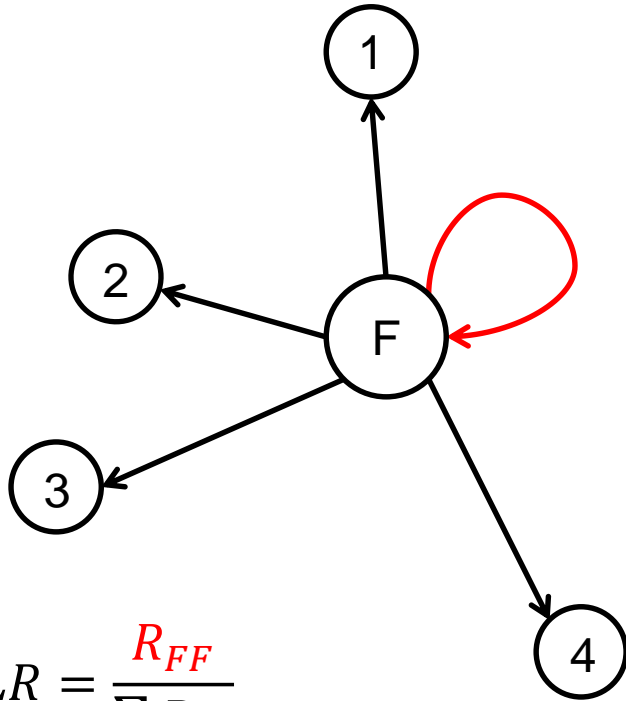
Marquage au Baryum 137: modification du ratio Baryum 137/Baryum 138



Une population focale : récif Senez (500 colonies)
Marquage de 20% de la population

Indicateurs: *SR* vs *LR*

Rétention Locale (LR)

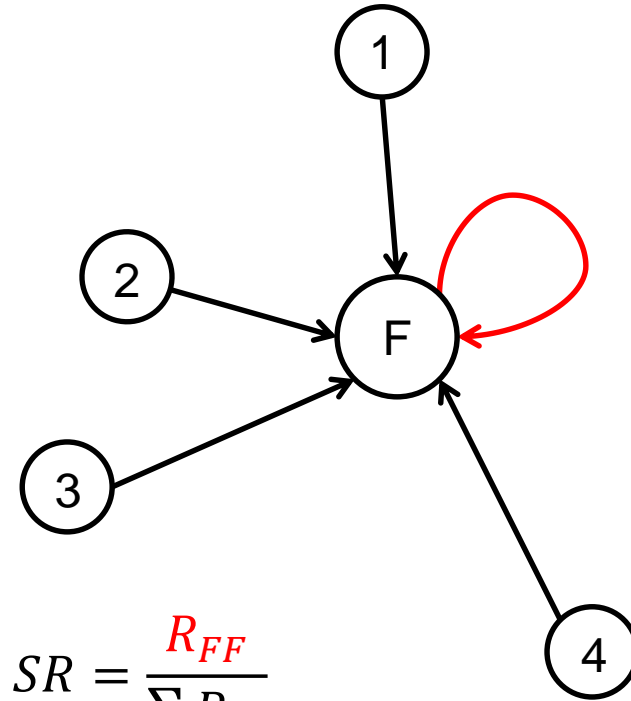


$$LR = \frac{R_{FF}}{\sum R_{Fi}}$$

Avantage: relié directement à la matrice de dispersion

Problème: production d'œufs difficile à mesurer, nombres faibles, perte larvaire

Autorecrutement (SR)



$$SR = \frac{R_{FF}}{\sum R_{iF}}$$

Avantage: facile à mesurer

Problème: pas relié directement à la matrice de dispersion, peu informatif

Indicateurs: *SR* vs *LR*

“*SR* ... n’a pas d’utilité directe autant que *LR* ... Qui est une composante de la Matrice de dispersion”

Botsford *et al.* 2009

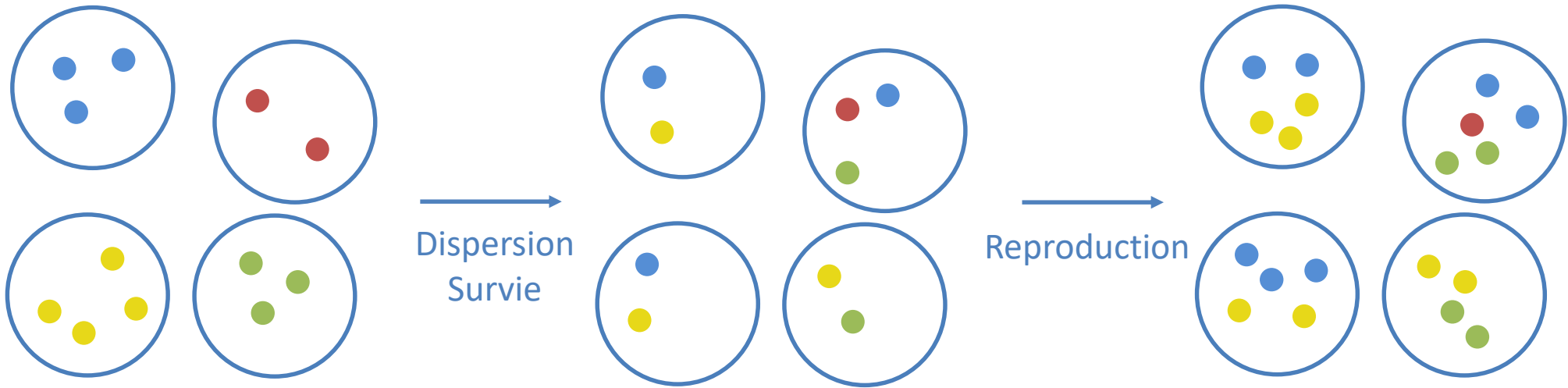
“*SR* ... ne révèle rien sur la persistance de la population...”

Burgess *et al.* 2014

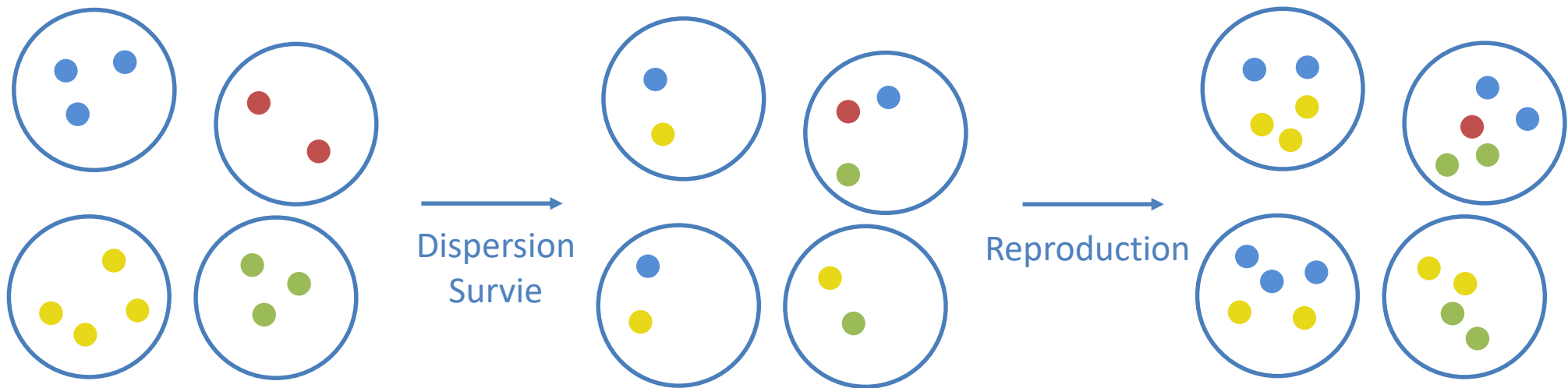
“*SR* pourrait être un bon estimateur de la retention locale”

Hogan *et al.* 2009

Modèle de cycle de vie



Modèle de cycle de vie



$$\begin{bmatrix} N_{1,t+1} \\ N_{2,t+1} \\ \vdots \\ N_{n,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{recrues}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ \vdots \\ N_{n,t} \end{bmatrix}}_{\text{œufs}}$$

$N_{i,t}$ nombres d'œufs produits sur le patch i
 c_{ji} proportions d'œufs produits en i recrutant en j
 e_j production totale d'œufs (LEP) par recrue en j

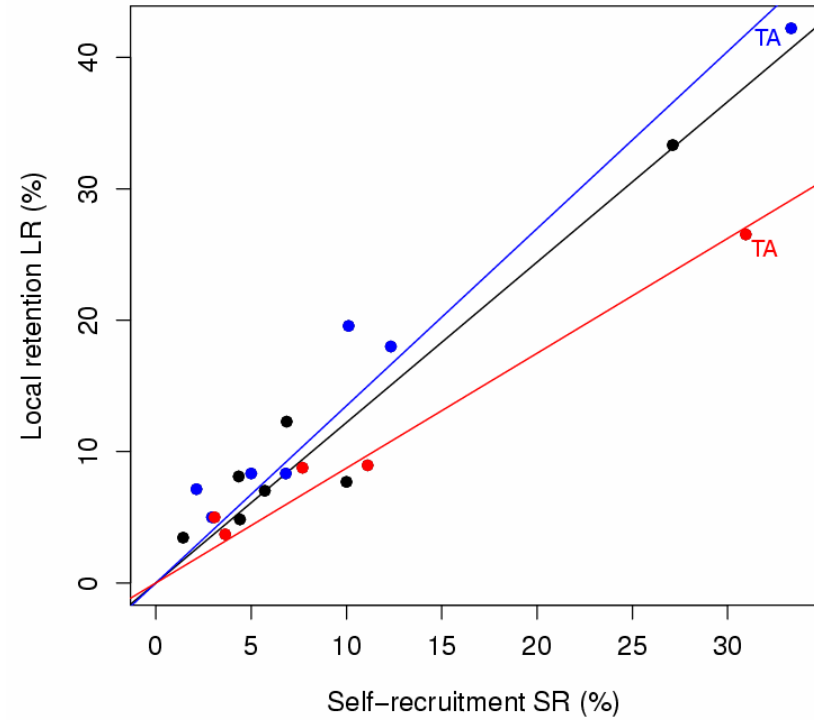
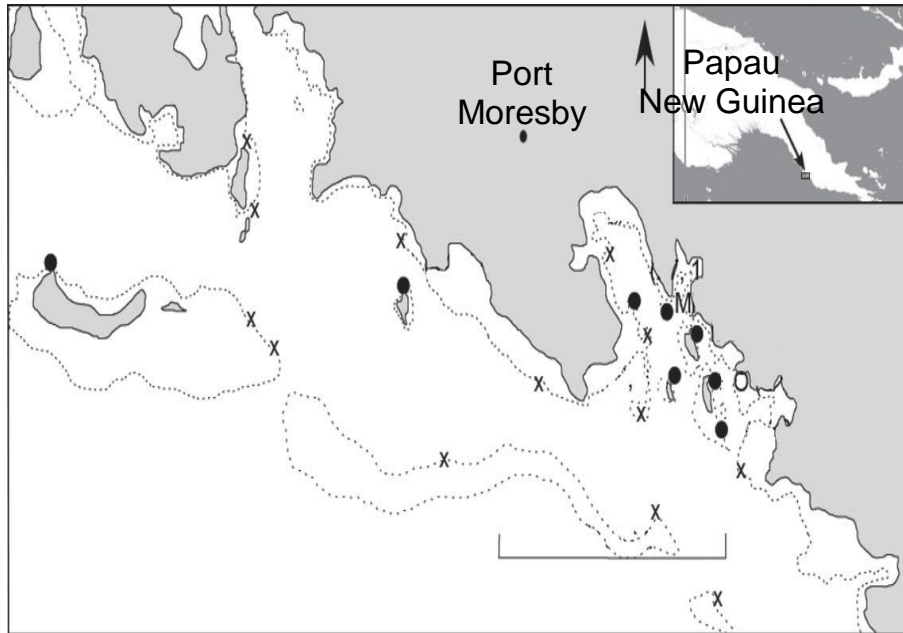
Résultats mathématiques

$LR \approx \lambda SR$ Lorsque l'on est proche de l'équilibre

Auto-persistence des sous-populations locales
 $LEP * LR > 1$ (Burgess *et al.* 2014)

Persistence globale des métapopulations
 $LEP * LR / SR > 1$ (Lett *et al.*, 2015)

Comparaison avec études antérieures



A large school of fish, possibly sardines, swimming in a circular pattern underwater. The fish are densely packed and move in a synchronized, circular motion, creating a vortex-like structure. The water is clear and blue, with sunlight filtering through from above, creating a bright, shimmering effect. The overall scene is dynamic and visually striking.

Conclusion

Conclusion

La modélisation mathématique permet d'aborder des questions pratiques à l'aide d'approches théoriques.

L'analyse mathématique permet d'obtenir des résultats qui vont au-delà de ce qu'on peut faire avec uniquement des simulations.

La modélisation, au-delà de l'intérêt explicatif ou prédictif, permet de soulever de nouvelles questions dans les différents domaines d'applications.



Merci