Gestion de l'inconsistance dans les bases de connaissances : une approche syntaxique basée sur la logique des pénalités

Florence Dupin de Saint-Cyr
I.R.IT.
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
dupin@irit.fr

Jérôme Lang
I.R.I.T.
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
lang@irit.fr

Thomas Schiex
CERT-ONERA
2 Avenue Edouard Belin
BP4025
31055 Toulouse Cedex
schiex@cert.fr

Résumé : nous proposons une *logique des pénalités*, qui est une formalisation et un développement de (Pinkas 91 [18]). Dans cette logique, à chaque formule d'une base de connaissances on associe le coût à payer quand on viole cette formule. Une base de connaissances à pénalités induit une relation d'inférence non-monotone qui fait partie de la classe des relations d'inférences rationnelles. Nous donnons aussi une application de la logique des pénalités à la formalisation et à la résolution de problèmes d'optimisation discrète.

Mots-clés : bases de connaissances, traitement de l'inconsistance, inférence non-monotone, sous-théories préférées, modèles préférentiels, pénalités, optimisation discrète.

Abstract: we consider a *penalty logic*, which is a formalization and an extension of (Pinkas 91 [18]). In this logic, we annotate each formula of a knowledge base with a price to pay when this formula is violated. A penalty logic knowledge base induces a non-monotonic inference relation which belongs to the class of rational inference relations. We also consider a possible application of penalty logic for formalizing and solving discrete optimization problems.

Keywords: knowledge bases, inconsistency handling, non- monotonic reasoning, preferred sub-theories, preferential models, penalties, discrete optimisation.

1 Introduction

Les approches *syntaxiques* du raisonnement non-monotone et de la révision des connaissances (voir par exemple (Nebel 91[17])) consistent à considérer chaque formule d'une base de connaissances BC comme un granule de connaissance indivisible (qui doit être soit entièrement accepté soit rejeté). On est alors amené à calculer les sous-bases maximales consistantes, ou encore *sous- théories maximales* de BC ; une formule est considérée comme prouvable à partir de BC ssi elle est conséquence logique de toute sous-théorie maximale. Le caractère prohibitif du calcul de ces sous-théories maximales a amené plusieurs auteurs à définir des critères de sélection plus fins sur l'ensemble des sous-théories, en général en supposant connue une relation de préférence sur les formules initiales qui induit une relation de préférence sur les sous-théories ; une formule est alors considérée comme prouvable à partir de BC ssi elle est conséquence logique de toutes les sous- théories *préférées* de BC. Voir Section 5 pour une présentation de ces approches. Nous proposons une approche “compensatoire” à base de coûts additifs de retrait (ou de violation) de formules, qui s'inspire directement de l'article (Pinkas 91 [18]) qui proposait d'associer à chaque formule sa “pénalité”, à savoir ce qu'il en coûte de ne pas la satisfaire (en particulier, une formule de coût infini est inviolable). Nous reprenons l'idée de Pinkas, en la formalisant et la développant davantage ; puis nous étudierons la relation d'inférence non-monotone induite par une base de connaissances à pénalités. Nous donnerons ensuite une autre application de la logique des pénalités, à savoir la représentation logique de problèmes d'optimisation discrète (issus par exemple de la recherche opérationnelle), oùla solution du problème est équivalente au “modèle de coût minimal” ; enfin, nous situerons notre approche par rapport à d'autres avec lesquelles elle a, ou semble avoir, des points communs. Les preuves omises ou partiellemment omises figurent dans leur intégralité dans (Dupin de Saint-Cyr 93 [6]).

2 La logique des pénalités

2.1 Notations et définitions de base

Dans la suite de cet article, $\mathscr{L}$ désignera un langage logique propositionnel construit sur un nombre fini de variables propositionnelles. $\top$ et $\perp$ désigneront respectivement la tautologie et la contradiction. Les formules de $\mathscr{L}$ seront notées φ, ψ, etc. L'ensemble des interprétations associé à $\mathscr{L}$ sera noté Ω, et les interprétations seront notées ω. $\models$ et $\models\!\mid$ désigneront respectivement la conséquence logique et l'équivalence logique. L'ensemble des modèles de φ sera noté $\mathrm{M}(\varphi)$; l'ensemble des formules de $\mathscr{L}$ satisfaites par ω, c'est-à-dire $\{ \varphi | \omega \models \varphi\}$ sera noté $[\omega]$. Une base de connaissances $\mathscr{B}$ (au sens classique) est un ensemble de formules de $\mathscr{L}$ (équivalent à la conjonction de ces formules). Une sous-théorie (ou sous-base consistante) de $\mathscr{B}$ est un sous-ensemble consistant de $\mathscr{B}$. Une sous-théorie maximale T de $\mathscr{B}$ est un sous-ensemble consistant de $\mathscr{B}$ tel que $\forall \varphi \in \mathscr{B} \backslash T$, $T \cup \{\varphi\}$ est inconsistant. Si ψ est une formule, T est dite ψ-consistante ssi $T \cup \{ \psi\}$ est consistante ; T est maximale ψ-consistante si elle est ψ-consistante et $\forall \varphi \in \mathscr{B} \backslash T$, $T \cup \{\varphi, \psi\}$ est inconsistante. $\overline{I\!R}^{\star +}$ désignera l'union de l'ensemble de tous les réels strictement positifs et de $\{+\infty\}$, muni de l'ordre usuel (en particulier, si $\alpha \neq +\infty$ alors $\alpha < +\infty$).

Une *base de connaissances à pénalités* BC est constituée d'un multi- ensemble fini de couples $< \varphi_i, \alpha_i >$ où$\varphi_i \in \mathscr{L}$ et $\alpha_i \in \overline{I\!R}^{\star +}$. α_i est la pénalité associée à φ_i ; il représente intuitivement ce qu'on doit payer pour avoir le droit de ne pas satisfaire φ_i (ou de l'enlever de BC) ; par conséquent, plus α_i est grand plus φ_i est importante. En particulier, si $\alpha_i = +\infty$ alors φ_i ne peut être en aucun cas retirée de BC (φ_i sera alors dite inviolable). BC étant un multi-ensemble de couples (et non un ensemble), il est possible pour un même couple $< \varphi, \alpha >$ d'apparaître plusieurs fois dans BC ; par exemple, $BC = \{< a, 1 >, < a, 1 >\}$ n'est pas équivalente à $BC' = \{ < a, 1 >\}$ puisqu'avec BC, violer a coûte 2 alors qu'avec BC', violer a ne coûte que 1. Ceci dit, comme on le verra plus tard (paragraphe 2.5), si $< \varphi, \alpha >$ apparaît n fois dans BC alors il suffit de remplacer les n occurrences de $< \varphi, \alpha >$ par $< \varphi, n\alpha >$ et la base de connaissances ainsi obtenue est équivalente à BC.

On notera $\mathscr{B}_c$ l'ensemble des bases de connaissances à pénalités. On remarque aisément que dans le cas oùtoutes les formules ont un coût infini, on se trouve ramené à la logique classique (toutes les formules de BC devant être obligatoirement satisfaites). On dira que $BC \in \mathscr{B}_c$ est consistante si l'ensemble des formules φ_i de BC est consistant (abstraction faite des coûts α_i).

2.2 Coût d'une interprétation

Dans tout l'article, on considère une base de connaissances $BC=\{< \varphi_i, \alpha_i >, i = 1 \ldots n\} \in \mathscr{B}_c$.

Definition 1 *(d'après Pinkas 91 [18])*
Le coût d'une interprétation $\omega \in \Omega$, relativement à BC, noté $k_{BC}(\omega)$, est égal à la somme des pénalités des formules de BC violées par ω :

$$k_{BC}(\omega) = \sum_{\varphi_i \in BC, \omega \models \neg\varphi_i} \alpha_i$$

(avec la convention $\sum_{\varphi_i \in \emptyset} \alpha_i = 0$)

Exemple :
Soit BC_1 la base de connaissances à pénalité suivante :

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = a & , & \alpha_1 = +\infty \\ \varphi_2 = b \vee c & , & \alpha_2 = 10 \\ \varphi_3 = \neg b & , & \alpha_3 = 5 \\ \varphi_4 = \neg c & , & \alpha_4 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} k_{BC_1}(\{\neg a, b, c\}) & = & k_{BC_1}(\{\neg a, \neg b, c\}) = +\infty \\ k_{BC_1}(\{\neg a, b, \neg c\}) & = & k_{BC_1}(\{\neg a, \neg b, \neg c\}) = +\infty \\ k_{BC_1}(\{a, \neg b, \neg c\}) & = & 10 \\ k_{BC_1}(\{a, b, \neg c\}) & = & 5 \\ k_{BC_1}(\{a, \neg b, c\}) & = & 7 \\ k_{BC_1}(\{a, b, c\}) & = & 5 + 7 = 12 \end{array}$$

Si les interprétations sont des décisions à prendre (par exemple si la base de connaissances contient des contraintes relatives à la construction d'un emploi du temps), rechercher l'interprétation de meilleur coût revient à chercher la décision la moins chère, et donc la plus satisfaisante.

2.3 Coût d'une formule

Definition 2 *Le coût d'une formule φ relativement à BC, noté $K_{BC}(\varphi)$, est le coût minimal relativement à BC d'une interprétation qui satisfait φ :*
$K_{BC}(\varphi) = \inf_{\omega \models \varphi} k_{BC}(\omega)$ *(avec la convention $\inf_{\emptyset} k_{BC}(\omega) = +\infty$)*

Exemple :

$$\begin{array}{llll} K_{BC_1}(a \wedge b) & = & \min(& k_{BC_1}(\{a, b, c\}) \\ & & & k_{BC_1}(\{a, b, \neg c\})) \\ & = & \min(& 12, 5) = 5 \\ K_{BC_1}(a \rightarrow c) & = & \min(& k_{BC_1}(\{a, b, c\}) \\ & & & k_{BC_1}(\{a, \neg b, c\}) \\ & & & k_{BC_1}(\{\neg a, \neg b, \neg c\}) \\ & & & ...) \\ & = & \min(& 12, 7, +\infty, ...) = 7 \\ K_{BC_1}(\neg a) & = & +\infty & \end{array}$$

Le coût $K_{BC}(\varphi)$ d'une formule φ, est le coût minimal à payer pour rendre BC consistante avec φ. Ainsi, pour rendre BC_1 consistante avec $(a \rightarrow b)$, le moyen le moins coûteux est d'enlever φ_4.

Propriété 1
$K_{BC}(\perp) = +\infty$
$K_{BC}(\top) = \inf_{\omega \in \Omega}\{k_{BC}(\omega)\}$

$K_{BC}(\perp) = +\infty$ est naturel, puisqu'il n'est pas possible de rendre BC consistante avec $\perp$. Notons que $K_{BC}(\top)$ est le coût de l'interprétation qui viole le moins (en coût) de formules de BC, c'est donc le "coût minimal pour rendre BC consistante". En effet, si $K_{BC}(\top) = +\infty$ (c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, k_{BC}(\omega) = +\infty$), le coût de la consistance de la base est impossible à payer (on se retrouve dans le cas de la logique classique avec une base de connaissances inconsistante).

Propriété 2 $K_{BC}(\top) = +\infty$
$\Leftrightarrow$
$\{\varphi_i \in BC, \alpha_i = +\infty\}$ *est inconsistant*

Preuve : $K_{BC}(\top) = +\infty$ signifie que toute interprétation est de coût infini, donc toute interprétation viole au moins une formule de coût infini, par conséquent il n'existe pas d'interprétation qui satisfasse toutes les formules de coût infini. Réciproquement, si l'ensemble des formules de coût infini est inconsistant, il n'existe pas d'interprétation satisfaisant toutes ces formules, donc toute interprétation est de coût infini, d'où $K_{BC}(\top) = +\infty$.

Cette quantité $K_{BC}(\top)$ est importante, puisqu'elle mesure à quel point la base de connaissances est inconsistante (c'est-à-dire l'effort qu'il faudra faire pour la rendre consistante). On remarque que si les α_i sont tous infinis, on est ramené à une base de connaissances classique :

$K_{BC}(\top) = 0 \Leftrightarrow BC$ est consistante ;

$K_{BC}(\top) = +\infty \Leftrightarrow BC$ est inconsistante.

Par ailleurs, si $\forall i, \alpha_i = 1$ alors $K_{BC}(\top) = \alpha$ ssi la cardinalité maximale d'un sous-ensemble consistant de BC est α.

Exemple : $K_{BC_1}(\top) = 5$; l'interprétation de coût minimal est $\{a, b, \neg c\}$: pour rendre BC_1 consistante, la solution la moins coûteuse consiste à enlever (ou ignorer) la formule φ_3.

Propriété 3
$K_{BC}(\top) = 0 \Leftrightarrow BC$ est consistante

Preuve :

($\Rightarrow$) si $K_{BC}(\top) = 0$ alors $\exists \omega \in \Omega, k_{BC}(\omega) = 0$, donc $\sum_{\varphi_i \in BC, \omega \models \neg \varphi_i} \alpha_i = 0$; puisque les α_i sont strictement positifs, cela signifie que $\forall \varphi_i \in BC, \omega \models \varphi_i$, donc il existe une interprétation qui satisfait toutes les formules de la base BC, donc BC est consistante.

($\Leftarrow$) si BC est consistante alors il existe une interprétation $\omega \in \Omega$ qui satisfait toutes les formules de BC, donc telle que $k_{BC}(\omega) = 0$, donc $K_{BC}(\top) = 0$.

Propriété 4
$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{L}, (\varphi \models \psi) \Rightarrow K_{BC}(\varphi) \geq K_{BC}(\psi)$

Preuve : si $\varphi \models \psi$ alors $\{\omega \in \Omega, \omega \models \varphi\} \subseteq \{\omega \in \Omega, \omega \models \psi\}$ d'oùle résultat.

Propriété 5 *$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{L}$,*

(i) $K_{BC}(\varphi \wedge \psi) \geq \max(K_{BC}(\varphi), K_{BC}(\psi))$

(ii) $K_{BC}(\varphi \vee \psi) = \min(K_{BC}(\varphi), K(\psi))$

(iii) $K_{BC}(\bot) \geq K_{BC}(\varphi) \geq K_{BC}(\top)$

Preuve : (i) et (iii) découlent directement de la propriété 4 ; (ii) vient de la définition de K.

2.4 Coût d'une sous-théorie

Definition 3 *(d'après Pinkas 91 [18])*

On définit le coût $C_{BC}(A)$ d'une sous-théorie A de BC, comme la somme des pénalités des formules de BC qui ne sont pas dans A :

$$C_{BC}(A) = \sum_{\varphi_i \in BC \setminus A} \alpha_i$$

Exemple : on considère toujours la même base de connaissances BC_1.

Soit $A1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ et $A2 = \{\varphi_2, \varphi_4\}$; $C_{BC_1}(A1) = \alpha_4 = 7$ et $C_{BC_1}(A2) = \alpha_1 + \alpha_3 = +\infty$.

Definition 4 *$\forall A, B \subseteq BC$,*

$A \leq^c_{BC} B$ (B est moins chère que A) ssi $C_{BC}(B) \leq C_{BC}(A)$.

$\forall A, B \subseteq BC$, $A <^c_{BC} B$ si et seulement si $A \leq^c_{BC} B$et non $B \leq^c_{BC} A$.

Definition 5 *(d'après Pinkas 91 [18])*

$A \subseteq BC$ est une **sous-théorie préférée** *relativement à BC (ou $\leq^c_{BC}$ -préférée) si et seulement si A est consistante et $\nexists B \subseteq BC$, telle que B est consistante et $A <^c_{BC} B$.*

En général, il peut y avoir plusieurs sous-théories préférées. (Dans l'exemple précédent, seule $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$ est une sous-théorie de $BC_1 \leq^c_{BC_1}$ -préférée).

Propriété 6 *$\forall BC \in \mathscr{B}_c$,*

Si $K_{BC}(\top) \neq +\infty$, alors une sous-théorie $\leq^c_{BC}$-préférée est une sous-théorie maximale de BC (au sens de l'inclusion).

Preuve (schéma) : soit A une sous-théorie de BC, de coût $\alpha < +\infty$; si B contient strictement A, alors $C_{BC}(B) - C_{BC}(A) = \sum_{\varphi_i \in BC \setminus (B \setminus A)} \alpha_i$ est strictement positif. A n'est donc pas $\leq^c_{BC}$-préférée.

Remarquons que dans le cas où$K_{BC}(\top) = +\infty$, toute sous- théorie de BC est de coût infini, donc toute sous-théorie est $\leq^c_{BC}$- préferée, par contre, il est clair que toute sous-théorie n'est pas maximale au sens de l'inclusion. Par ailleurs, si BC est consistante ($K_{BC}(\top) = 0$) alors la seule sous-théorie $\leq^c_{BC}$-préférée est BC elle-même (elle est de coût 0).

Exemple : reprenons la base de connaissances BC_1. $A3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$ est une sous-théorie $\leq^c_{BC_1}$-préférée. Par contre $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ est une sous-théorie maximale de BC_1 au sens de l'inclusion, mais elle n'est pas $\leq^c_{BC_1}$-préférée car elle est de coût infini.

Si on ajoute à BC_1 la formule $< \varphi_5 = \neg a, \alpha_5 = +\infty >$ alors l'ensemble des formules de coûts infinis est inconsistant, et donc toute sous-théorie est de coût infini, toutes les sous-théories sont donc des sous-théories preférées.

Propriété 7
Le coût $k_{BC}(\omega)$ d'une interprétation $\omega \in \Omega$, relativement à BC, est égal au coût de la sous-théorie de BC composée de toutes les formules que satisfait ω :

$$\forall \omega \in \Omega, k_{BC}(\omega) = C_{BC}(BC \cap [\omega])$$

Corollaire 7.1 $\forall \omega \in \Omega$,

$$\omega \textit{ est de coût minimal relativement à } BC$$
$$\Leftrightarrow$$
$$BC \cap [\omega] \textit{ est consistante et } \leq^c_{BC}\textit{-préférée}$$
$$\textit{relativement à toutes les sous-théories de } BC.$$

Corollaire 7.2
Soit A une sous-théorie maximale de BC ; alors $\forall \omega \models A, k_{BC}(\omega) = C_{BC}(A)$.

Preuve : si A est maximale consistante alors une interprétation qui satisfait A ne satisfait pas d'autres formules de BC, donc $\forall\omega$ telle que $\omega \models A, A = BC \cap [\omega]$. D'oùle résultat, d'après la propriété 7.

Corollaire 7.3
$K_{BC}(\varphi)$ est égal au coût minimal d'une sous-théorie φ- consistante de BC :

$$K_{BC}(\varphi) = \inf_{A \subseteq BC, A\wedge\varphi consistant} C_{BC}(A)$$

Ainsi, le coût d'une formule φ relativement à la base BC est le coût d'une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée de BC.

Corollaire 7.4 $\forall A \subseteq BC$,

$$A \textit{ est une sous-théorie } \leq^c_{BC}\textit{-préférée}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$K_{BC}(\top) = C_{BC}(A)$$

(d'après le corollaire 7.3, en prenant $\varphi = \top$).

Propriété 8 $K_{BC}(\varphi) = K_{Add(BC,\varphi)}(\top)$ *où*$Add(BC, \varphi) = BC \cup \{< \varphi, +\infty >\}$

Preuve :
$K_{Add(BC,\varphi)}(\top) = \inf_{\omega\in\Omega} k_{Add(BC,\varphi)}(\omega)$. Or si $\omega \models \varphi$ alors $k_{Add(BC,\varphi)}(\omega) = k_{BC}(\omega)$ et sinon $k_{Add(BC,\varphi)}(\omega) = +\infty$. Donc $K_{Add(BC,\varphi)}(\top) = \inf_{\omega\models\varphi}(k_{BC}(\omega), +\infty) = K_{BC}(\varphi)$.

Ainsi, pour calculer le coût pour rendre une base de connaissances consistante avec une formule donnée, il suffit de lui ajouter cette formule avec un statut "inviolable" et de calculer le coût de la consistance de la base de connaissances résultante.

2.5 Équivalence entre bases de connaissances à pénalités

Deux bases de connaissances à pénalités seront dites équivalentes si elles induisent la même fonction coût sur Ω, c'est-à-dire :

Definition 6 *Soit "$\approx^c$", la relation telle que :* $\forall BC, BC' \in \mathscr{B}_c$, $BC \approx^c BC' \Leftrightarrow k_{BC} = k_{BC'}$

Par ailleurs on définit la relation de pré-ordre suivante sur $\mathscr{B}_c$:

Definition 7 *Soit "$\ll^c$", la relation telle que :* $\forall BC, BC' \in \mathscr{B}_c, BC \ll^c BC' \Leftrightarrow k_{BC} \leq k_{BC'}$

Exemple : Soient BC_2, BC_3 et BC_4 les bases de connaissances suivantes :

BC_2 :	a	5	BC_3 :	a	8	BC_4 :	$a \wedge b$	18
	a	3		b	10			
	b	10						

avec $Vv = \{a, b\}$.

$k_{BC_2}(\{a, b\}) = 0, \quad k_{BC_2}(\{a, \neg b\}) = 10$
$k_{BC_3}(\{a, b\}) = 0, \quad k_{BC_3}(\{a, \neg b\}) = 10$
$k_{BC_4}(\{a, b\}) = 0, \quad k_{BC_4}(\{a, \neg b\}) = 18$

$k_{BC_2}(\{\neg a, b\}) = 8, \quad k_{BC_2}(\{\neg a, \neg b\}) = 18$
$k_{BC_3}(\{\neg a, b\}) = 8, \quad k_{BC_3}(\{\neg a, \neg b\}) = 18$
$k_{BC_4}(\{\neg a, b\}) = 18, \quad k_{BC_4}(\{\neg a, \neg b\}) = 18$

On a donc les relations suivantes : $BC_2 \approx^c BC_3$ et $BC_3 \ll^c BC_4$ (mais BC_3 n'est pas équivalente à BC_4).

Remarques :
L'exemple précédent illustre l'impossibilité de transformer de manière équivalente une base de connaissances possédant deux formules non logiquement équivalentes en une base de connaissances possédant la conjonction de ces formules.

Par contre, si une base de connaissances possède plusieurs fois la même formule (ou des formules équivalentes) on peut la transformer de manière équivalente en une base de connaissances possédant cette formule une seule fois mais avec un coût égal à la somme des coûts de la formule dans l'ancienne base.

Propriété 9 $\forall BC, BC' \in \mathscr{B}_c$,

$$BC \approx^c BC'$$
$$\Rightarrow$$
$$\wedge\{\varphi_i | \varphi_i \in BC\} \models\!\!\!\mid \wedge\{\varphi_j | \varphi_j \in BC'\}$$

Preuve : Si $BC \approx^c BC'$ alors $k_{BC} = k_{BC'}$, c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, k_{BC}(\omega) = k_{BC'}(\omega)$

($\models$) si $\omega \models \wedge\{\varphi_i | \varphi_i \in BC\}$ alors $k_{BC}(\omega) = 0$, or $k_{BC}(\omega) = k_{BC'}(\omega)$, donc $k_{BC'}(\omega) = 0$ donc $\sum_{\varphi_j \in BC', \omega \models \neg\varphi_j} \alpha_j = 0$, or les coûts α_j des formules φ_j sont des réels positifs, donc si la somme des coûts d'un ensemble de formules est nulle, c'est que cet ensemble est vide.

Donc il n'y a aucune formule de BC' qui ne soit pas satisfaite par ω, donc $\omega \models \wedge\{\varphi_j | \varphi_j \in BC'\}$.

($\,=\!|\,$) la démonstration dans ce sens est identique à la démonstration dans l'autre sens en intervertissant les i et les j, les BC et les BC'.

De façon évidente, la réciproque est fausse.

Definition 8 *La classe d'équivalence associée à une base de connaissances $BC \in \mathscr{B}_c$, notée $[BC]_c$, est l'ensemble des bases de connaissances $BC' \in \mathscr{B}_c$ telles que $BC \approx^c BC'$.*

$\forall BC \in \mathscr{B}_c, [BC]_c = \{BC' \in \mathscr{B}_c | BC \approx^c BC'\}$

Propriété 10
L'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\approx^c$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions de : $\Omega \to \overline{I\!R}^{\star+}$.

Preuve : A toute fonction k de $\Omega \to \overline{I\!R}^{\star+}$, on peut associer une base de connaissance BC de façon unique : à toute interprétation ω du domaine de k on associe une formule φ que seule ω viole (φ est la disjonction de tous les symboles de variables niés si ω les rend vrais, tels quels sinon). La fonction coût associé à BC ainsi construite est telle que $k_{BC} = k$.

Réciproquement à une base de connaissance BC, on associe la fonction k_{BC} de la définition 1.

3 Gestion de l'inconsistance en logique des pénalités

Il existe plusieurs approches permettant de raisonner avec une base de connaissances inconsistante. Nous nous intéressons ici aux approches "syntaxiques" (ou "basées sur les formules") qui considèrent chaque formule de la base de connaissances comme un granule d'information indivisible. Ainsi, $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$ ne se comportera pas de la même façon que $\{p \wedge q, \neg p \vee \neg q\}$ puisque dans le premier cas les formules p et q pourront être retirées séparément (les sous-théories maximales étant $\{p, q\}$, $\{p, \neg p \vee \neg q\}$ et $\{q, \neg p \vee \neg q\}$) alors que dans le second cas $p \wedge q$ devra être conservée ou retirée entièrement (les sous-théories maximales étant $\{p \wedge q\}$ et $\{\neg p \vee \neg q\}$). Ces approches sont donc sensibles à la "syntaxe" de la base de connaissances (par opposition aux approches dites "basées sur les modèles" qui, au lieu de raisonner sur des ensembles de formules, raisonnent sur des ensembles de modèles). L'idée de base des approches syntaxiques consiste à définir la relation d'inférence non- monotone suivante : ψ est déductible (de façon non-monotone) de BC ssi toutes les sous-théories maximales de BC permettent de déduire ψ ; plus généralement, sachant BC, on peut déduire ψ de façon non- monotone à partir de φ ssi ψ est déductible à partir de φ et de toute sous-base maximale φ-consistante de BC. Remarquons que chercher les sous-théories maximales d'une base de connaissances correspond à chercher les extensions en logique des défauts normaux sans prérequis. La relation d'inférence précédente est dite sceptique. De nombreux auteurs ont fait remarquer la difficulté de travailler en pratique avec cette relation d'inférence, due à la présence, en général, d'un nombre prohibitif de sous- théories préférées. Pour cette raison, plusieurs approches proposent des critères de sélection des sous- théories maximales, qui sont le plus souvent fondées sur un ordre de priorité entre les formules : c'est la cas des approches de Brewka, Cayrol, puis Benferhat et al [3, 4, 1]. Ces approches seront comparées à la nôtre en Section 5. Nous allons maintenant voir comment utiliser les pénalités pour réviser "au moindre coût" une base de connaissances et construire une relation d'inférence non-monotone.

3.1 Relation d'inférence non-monotone induite par une base de connaissances à pénalités

Soit $BC \in \mathscr{B}_c$.

Definition 9 $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{L}$,

$$\varphi \mid\!\sim^c_{BC} \psi$$
$$\Leftrightarrow$$

$\forall A \subseteq BC$*, si A est* φ*-consistante* $\leq^c_{BC}$*-préférée par rapport à toutes les sous bases* φ*-consistantes de* BC*, alors* $A \cup \{\varphi\} \models \psi$

En particulier, si $\varphi = \top$, la définition devient : $\mid\!\sim^c_{BC}\psi \Leftrightarrow \forall A$ consistante et $\leq^c_{BC}$-préférée par rapport à toutes les sous-théories de BC, alors $A \models \psi$.

Si $\varphi = \bot$, il n'existe pas de sous-théorie $\bot$-consistante $\leq^c_{BC}$- préférée et donc $\forall\psi, \bot \mid\!\sim^c_{BC}\psi$.

Propriété 11 $\forall\varphi, \psi \in \mathscr{L}$,

$$\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$$
$$\Leftrightarrow$$
$\forall\omega \in \Omega$*, si* $\omega \models \varphi$ *et* ω *est* $\leq^c_{BC}$*-préféré dans M(*φ*), alors* $\omega \models \psi$

Preuve (schéma) :

($\Rightarrow$) Supposons que $\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$ et soit $\omega \models \varphi$ tel que ω est $\leq^c_{BC}$-préféré dans M(φ) ; considérons la sous-base $BC \cap [\omega]$. Puisque $\omega \models \varphi$, $BC \cap [\omega]$ est φ-consistante. On montre simplement que $BC \cap [\omega]$ est φ-consistante $\leq^c_{BC}$- préférée, on a donc $(BC \cap [\omega]) \cup \{\varphi\} \models \psi$; ω étant un modèle de $(BC \cap [\omega]) \cup \{\varphi\}$, on a bien $\omega \models \psi$.

($\Leftarrow$) Supposons que : $\omega \models \varphi$ et ω $\leq^c_{BC}$-préféré dans M(φ) $\Rightarrow$ $\omega \models \psi$. Soit A une sous- théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée de BC ; montrons que $A \cup \{\varphi\} \models \psi$. Soit $\omega \models A \cup \{\varphi\}$ (ω existe puisque A est φ-consistante) ; on montre aisément que ω est $\leq^c_{BC}$-préféré dans M(φ), d'où$\omega \models \psi$. On a donc $A \models \psi$.

Ce résultat montre que la relation d'inférence $\mid\!\sim^c_{BC}$ fait partie des relations fondées sur des modèles préférentiels au sens de (Shoham 88 [19] et Kraus et al. 90 [13]). Comme $\leq^c_{BC}$ est de surcroît un pré-ordre total, le théorème de caractérisation des relations d'inférence comparatives[1] donné dans (Gärdenfors, Makinson 93 [10]) donne immédiatement le résultat suivant :

Propriété 12
$\mid\!\sim^c_{BC}$ *est une relation d'inférence comparative ; par conséquent elle satisfait les propriétés suivantes (cf. Kraus et al. 90 [13]; Grdenfors, Makinson 93 [10]) :* **supraclassicalité***,* **équivalence logique à gauche***,* **affaiblissement à droite***, et,* **préservation de la consistance***,* **conditionalisation faible***,* **cumulativité***, ou et* **monotonie rationnelle***.*

(Voir l'énoncé de ces propriétés en Annexe)

Propriété 13 *Soit* $BC \in \mathscr{B}_c$ *et* $\varphi, \psi \in \mathscr{L}$*, avec* $\varphi \neq \bot$*,*

$$\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\varphi \models \psi \textit{ ou } \mid\!\sim^c_{Add(BC,\varphi)}\psi$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons que $\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$.

Soit B une sous-théorie $\leq^c_{Add(BC,\varphi)}$-préférée de $Add(BC, \varphi)$; montrons que $B \models \psi$; pour cela montrons que B est une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée de BC.

On a $K_{BC}(\varphi) = K_{Add(BC,\varphi)}(\top)$ (d'après la propriété 8), or $K_{Add(BC,\varphi)}(\top)$=$C_{Add(BC,\varphi)}(B)$.

- Si $K_{Add(BC,\varphi)}(\top) < +\infty$, alors $C_{Add(BC,\varphi)}(B) <+\infty$, donc $\varphi \in B$ (sinon B aurait un coût infini), donc $Add(BC, \varphi) \backslash B = BC \backslash B$ et $C_{Add(BC,\varphi)}(B) = C_{BC}(B)$. Donc $K_{BC}(\varphi) = C_{BC}(B)$ c'est à dire que B est une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée. D'après l'hypothèse $\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$, on a donc $B \cup \{\varphi\} \models \psi$, donc $B \models \psi$ (puisque $\varphi \in B$).
- Si $K_{Add(BC,\varphi)}(\top) = +\infty$ alors $K_{BC}(\varphi) = +\infty$, ce qui veut dire que l'ensemble des formules de BC à coût infini est inconsistant avec φ ; toutes les sous-théories φ-consistantes de BC ont donc un coût infini ; en particulier, $\emptyset$ est bien une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée de BC (car $\varphi \neq \bot$), d'où$\emptyset \cup \{\varphi\} \models \psi$, c'est-à-dire $\varphi \models \psi$.

($\Leftarrow$) Si $\varphi \models \psi$ alors, trivialement, $\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$. Sinon, supposons que $\mid\!\sim^c_{Add(BC,\varphi)}\psi$. Soit A une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée de BC. Montrons que : $A \cup \{\varphi\} \models \psi$. Pour cela montrons que $A \cup \{\varphi\}$ est une sous-théorie $\leq^c_{Add(BC,\varphi)}$-préférée. D'après la propriété 8 on a $K_{BC}(\varphi) = K_{Add(BC,\varphi)}(\top)$, or A est une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée, donc $K_{BC}(\varphi) = C_{BC}(A)$. Or, par définition de C, $C_{Add(BC,\varphi)}(A \cup \{\varphi\}) = C_{BC}(A)$ (car on ne peut pas avoir à la fois $\varphi \in BC$ et $\varphi \notin A$ puisque A est une sous-théorie φ-consistante $\leq^c_{BC}$-préférée). Donc $C_{Add(BC,\varphi)}(A \cup$

[1] Une relation d'inférence comparative [10] est une relation rationnelle [16] qui vérifie en outre la propriété de supraclassicalité : si $\varphi \models \psi$ alors $\varphi \mid\!\sim^c_{BC}\psi$.

$\{\varphi\}) = K_{Add(BC,\varphi)}(\top)$, donc $A \cup \{\varphi\}$ est une sous-théorie $\leq^c_{Add(BC,\varphi)}$- préférée. Comme $\mid\!\sim^c_{Add(BC,\varphi)}\psi$, on en déduit que $A \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Exemple : considérons la base de connaissances à pénalité BC suivante :

$$\begin{array}{rcl} \{< \neg d & , & 2 >, \\ < a & , & 8 >, \\ < \neg b & , & 5 >, \\ < \neg c & , & 5 >, \\ < \neg a \vee (b \wedge c) & , & +\infty >, \\ < a \wedge \neg d & , & +\infty >\} \end{array}$$

On peut vérifier que : $\mid\!\sim^c_{BC} b \wedge c$ et $a \mid\!\sim^c_{BC} \neg d$.

4 Quelques applications de la logique des pénalités à l'optimisation discrète

Dans cette Section, nous allons montrer que la logique des pénalités n'est pas seulement un outil permettant de gérer l'inconsistance dans les bases de connaissances, mais qu'elle permet également de représenter dans un langage logique des problèmes d'optimisation discrète à critère additif (issus par exemple de la recherche opérationnelle), oùles interprétations de coût minimal correspondent aux solutions optimales.

4.1 Exemple 1 : un problème d'emploi du temps

Soient deux professeurs $P1$ et $P2$ qui enseignent deux matières différentes à quatre élèves $E1$, $E2$, $E3$ et $E4$. Les quatre élèves suivent les cours des deux professeurs, il ne faut donc pas que $P1$ et $P2$ donnent leurs cours en même temps. Il faut (absolument) un cours de $P1$ par semaine, même chose pour $P2$; les 2 cours ne peuvent pas avoir lieu le même jour. Ce qui donne les formules suivantes :

$(1, e, (L1, Ma1, Me1, J1, V1)), +\infty$

$(1, e, (L2, Ma2, Me2, J2, V2)), +\infty$

$\neg(L1 \wedge L2) \wedge \neg(Ma1 \wedge Ma2) \wedge \neg(Me1 \wedge Me2)$
$\wedge \neg(J1 \wedge J2) \wedge \neg(V1 \wedge V2), +\infty$

où$L1$ représente le fait que le cours de $P1$ a lieu le lundi, etc.

$P1$ ayant plus d'ancienneté que $P2$, ne pas satisfaire ses *desiderata* coûtera plus cher ; chez les élèves, les coûts correspondants varient aussi. On peut considérer l'influence relative des parents d'élèves : les parents de $E1$ ont plus d'influence que ceux de $E4$ qui eux-mêmes en ont plus que ceux de $E3$. Enfin $E2$ a les parents les moins influents. Pour que la hiérarchie soit respectée, il faut néanmoins veiller à ce que les volontés des élèves aient moins de poids que celles des professeurs.

$P1$ ne veut pas travailler le vendredi	$\neg V1, 200$
$P2$ veut travailler le mardi ou le mercredi	$Ma2 \vee Me2, 150.$
$E1$ ne veut pas avoir de cours le jeudi	$\neg J1 \wedge \neg J2, 60.$
$E2$ veut avoir son mardi ou son mercredi libre	$(\neg Me1 \wedge \neg Me2) \vee (\neg Ma1 \wedge \neg Ma2), 48.$
$E3$ ne veut pas avoir de cours le mardi	$\neg Ma1 \wedge \neg Ma2, 25.$
$E4$ ne veut pas avoir de cours le mercredi	$\neg Me1 \wedge \neg Me2, 50.$

L'interprétation de coût minimal est $(L1, \neg Ma1, \neg Me1, \neg J1, \neg V1, \neg L2, Ma2, \neg Me2, \neg J2, \neg V2)$ de coût 25, elle correspond à mettre le cours du professeur $P1$ le lundi, et le cours du professeur $P2$ le vendredi, elle ne satisfera pas l'étudiant $E3$.

4.2 Exemple 2 : recherche de clique maximum dans un graphe

Considérons un graphe $G = (V, E)$ oùV est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes. Une clique de G est un sous-ensemble de V qui définit un sous- graphe complet (i.e. tous les sommets sont reliés deux à deux). Le problème de la recherche d'une clique de cardinal maximumest un problème NP-dur classique en recherche opérationnelle. Ce problème peut se coder ainsi en logique des pénalités :

- à chaque sommet $s \in V$, on associe une variable propositionnelle s dont l'affectation à Vrai signifie que le sommet *ne fait pas* partie de la clique.

- on recherche un ensemble de sommets de cardinal maximum, donc on essaie d'exclure le minimum de sommets : à chaque sommet on associe la formule à pénalité $< \neg s, 1 >$.

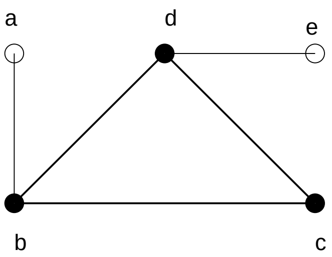
- l'ensemble recherché doit être une clique donc il ne doit contenir aucune paire de sommets qui ne soit pas reliée dans G ; c'est-à-dire qu'à toute paire de sommets $(x, y) \notin E$, on associe la formule à pénalité $< x \vee y, +\infty >$.

Soit donc $BC(G) = \{< \neg s, 1 >, s \in V\} \cup \{< x \vee y, +\infty >, (x, y) \notin E\}$.

Propriété 14 *Toute interprétation de coût minimal relativement à $BC(G)$ correspond à une clique maximum de G, et réciproquement*

Preuve
: remarquons d'abord que l'interprétation affectant toute variable à Vrai satisfait toutes les formules de coût infini. Il existe donc une interprétation de coût fini. Soit ω de coût minimal (donc fini). Pour tout x, y affectés à Faux par ω, on a $< x \vee y, +\infty > \notin BC(G)$ et donc, par construction de $BC(G)$, $(x, y) \in E$. $\{s, \omega \models \neg s\}$ est donc une clique de G. L'interprétation ω étant de coût minimal, la clique ainsi définie est maximum. La réciproque est immédiate.

La figure ci-dessous illustre ce codage. L'unique clique maximum est indiquée en gras. L'interprétation de coût minimal associée est $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, e\}$.



$< \neg a, 1 >$ $< \neg b, 1 >$
$< \neg c, 1 >$ $< \neg d, 1 >$
$< \neg e, 1 >$
$< a \vee c, +\infty >$
$< a \vee d, +\infty >$
$< a \vee e, +\infty >$
$< b \vee e, +\infty >$
$< c \vee e, +\infty >$

Ces deux exemples montrent la capacité de la logique des pénalités à coder dans un langage logique des problèmes d'optimisation discrète (voir Lang 90 [14] pour une approche similaire relative à des problèmes d'optimisation de type min-max). On pourrait objecter que pour les problèmes classiques (clique maximum, plus court chemin, recouvrement minimum des arêtes, stable maximum...), il existe en recherche opérationnelle des algorithmes dont l'efficacité en moyenne est sans doute meilleure que la recherche de l'interprétation préférée en logique des pénalités. Cependant, l'expression de tels problèmes en logique présente au moins 2 avantages : d'abord, la richesse d'expression de la logique permet de spécifier des problèmes plus complexes difficilement spécifiables dans le langage de la recherche opérationnelle ; et ensuite, la méthode de recherche de la meilleure solution est indépendante du problème considéré.

5 Approches en relation

Outre le modèle des "world rank functions" de Pinkas [18] dont nous avons parlé dans l'introduction et dont notre approche s'inspire directement, plusieurs approches partagent des points communs avec la logique des pénalités, ou lui ressemblent par quelque aspect.

L'idée de définir des fonctions numériques "additives" sur un ensemble de formules logiques est également présente dans deux approches (au moins), à savoir les fonctions conditionnelles ordinales de Spohn [20] (et leur utilisation dans les travaux de Goldszmidt et Pearl [12]) et les logiques à péage de Dubois et Prade [7]. Les fonctions conditionnelles ordinales (Spohn 90 [20]) associent à chaque interprétation ω un nombre entier $k(\omega)$ qui représente le "degré d'anormalité" de ω. Cette fonction k s'étend aux formules de la même façon que dans notre approche, par $k(\varphi) = \min_{\omega \models \varphi} k(\omega)$. L'interprétation de $k(\varphi)$ a trait aux probabilités infinitésimales : si $k(\varphi) = \alpha$ alors la probabilité de φ est de l'ordre de ε^α, où ε est infiniment petit (si $\alpha = 0$ alors $Pr(\varphi) \approx k$ où$k > 0$). Spohn définit également le degré d'anormalité de ω sachant φ par $k(\omega|\varphi) = k(\omega) - k(\varphi)$; puis $k(\psi|\varphi) = \min_{\omega \models \varphi} k(\omega|\varphi)$; si φ et ψ ne sont pas incompatibles alors $k(\varphi \wedge \psi) = k(\varphi) + k(\psi|\varphi)$. Ici le caractère additif de la fonction k n'a pas trait à une somme de coûts issus de la violation de formules (il n'y a pas de base de connaissances sous-jacente à la construction de la fonction k) mais à l'application du théorème de Bayes sur des probabilités infinitésimales. Techniquement, les fonctions conditionnelles k requièrent une hypothèse supplémentaire par rapport à la fonction k, à savoir $\exists \omega \in \Omega$ tel que $k(\omega) = 0$ (ce qui implique $k(\top) = 0$). Les fonctions conditionnelles ordinales sont à la base du système Z^+ (Goldszmidt et Pearl 91 [12]) qui les combine avec des degrés de spécificité des règles calculés uniquement d'après leur syntaxe. Ayant en entrée un ensemble de règles $\varphi_i \rightarrow_{\delta_i} \psi_i$, le système Z^+ calcule une fonction k sur les règles (fonction des δ_i et de la spécificité des règles) puis sur les mondes ; intuitivement, $k(\omega)$ dépend du degré associé à la règle de plus haut degré qui est falsifiée par ω ; cette fonction permet ensuite de définir une relation d'inférence non-monotone. Il n'y a pas ici de "cumul" des rangs de plusieurs règles violées simultanément comme en logique des pénalités, ce qui fait qu'elles en sont assez éloignées. Dans un esprit similaire, Freund [9] a récemment proposé une approche additive pour générer une relation d'inférence non-monotone à partir d'un ensemble de règles de défauts ; cette approche associe d'abord une valuation entière à chaque règle ; ces valuations sont en fait des pénalités puisqu'elles induisent une valuation sur chaque interprétation ω en sommant les poids des règles violées par ω. L'approche de Freund *génère* donc (automatiquement) des pénalités à partir d'un ensemble de défauts $\varphi_i \rightarrow \psi_i$, alors que nous ne nous préoccupons pas vraiment de l'origine des pénalités ; l'approche de Freund peut donc être considérée comme complémentaire (en amont) de la nôtre.

Une autre approche, plus proche de la logique des pénalités, est celle des logiques à péage (Dubois et Prade 91 [7]). Une base de connaissances en logique à péage est également un ensemble de couples $< \varphi_i, \alpha_i >$, oùα_i représente ce qu'il faut payer pour *avoir* φ_i dans la base de connaissances (et non ce qu'il faut payer pour *retirer* φ_i). Cette approche semble en un certain sens symétrique de l'approche des pénalités mais il ne semble néanmoins pas possible de traduire l'un des formalismes dans l'autre (même en généralisant un peu l'un des formalismes, par exemple en autorisant des pénalités négatives). Étant donné une base de connaissances à péage $< \varphi_i, \alpha_i >$, le coût pour pouvoir déduire (ou "acheter") φ est le coût minimal d'achat d'un ensemble de formules permettant de déduire φ. Il est à noter que dans ce formalisme, une formule, une fois achetée, est toujours disponible et pourra être utilisée aussi souvent que l'on voudra dans une preuve ; pour donner aux formules le statut de ressources, il faut redéfinir complètement la notion de preuve (comme c'est le cas en logique linéaire [11]). La logique des péages, comme la logique des pénalités, semble incapable de gérer des ressources consommables.

Des approches similaires à la nôtre en raisonnement non-monotone "syntaxique" (c'est- à-dire fondé sur des retraits minimaux de formules) ont été largement étudiées ; elles sont presque toujours qualitatives (non additives) puisque la sélection des sous-théories préférées est effectuée par un ordre de priorité ; une base de connaissances avec priorités étant une collection finie $BC = (BC_1, ..., BC_n)$ d'ensembles de formules (la strate de rang 1 contenant les formules les plus prioritaires), la méthode la plus couramment étudiée Brewka 89 [3], Nebel 91 [17], et Cayrol 92 [4] est fondée sur l'inclusion ; plus précisément elle consiste à préférer (strictement) une sous-théorie A de BC à une sous-théorie B ssi il existe un rang i tel que pour tout $j < i$, $A \cap BC_j = B \cap BC_j$, et $A \cap BC_i$ contient strictement $B \cap BC_i$. Une autre définition a récemment été proposée indépendemment par Benferhat et al. [1]) et Lehmann [15]; elle consiste à compter dans chaque strate le nombre de formules présentes : cette fois, A est strictement préférée à une sous-théorie B ssi il existe un rang i tel que pour tout $j < i, |A \cap BC_j| = |B \cap BC_j|$, et $|A \cap BC_i| > |B \cap BC_i|$. Notons que dans le cas particulier où$n = 1$, les sous-théories préférées sont celles qui comportent le plus grand nombre de formules ; ce cas est donc aussi un cas particulier de la logique des pénalités (les coûts étant uniformes). Dans le cas général, il est possible de traduire une base de connaissances stratifiée $BC = (BC_1, ..., BC_n)$ en une base de connaissances à pénalités : soit l un réel quelconque strictement supérieur à $\max(|BC_1|, ..., |BC_n|)$; à chaque formule de la strate i on associe alors la pénalité $ln - i$. Il est facile de vérifier que les sous-bases préférées de BC sont exactement les sous- bases préférées de sa traduction. Par contre, pour la traduction en sens inverse, il ne semble pas y avoir de transformation simple d'une base de connaissances à pénalités en base de connaissances stratifiée, même si les pénalités sont des entiers (voir Dupin de St-Cyr 93 [6]).

Enfin, notons que dans le domaine des problèmes de satisfaction de contraintes (CSP), Freuder et Wallace 92 [8] a proposé un critère de choix de solution consistant à minimiser le nombre de contraintes violées.

6 Conclusion

Comme nous l'avons vu, l'intérêt de la logique des pénalités en représentation des connaissances est multiple : l'utilisation de pénalités pour sélectionner les sous- théories préférées d'une base de connaissances inconsistantes permet à la fois une différenciation des formules selon leur importance et une possibilité de compensation entre formules, la relation d'inférence non-monotone associée respecte les propriétés habituellement requises, enfin la logique des pénalités permet de représenter dans un formalisme logique des problèmes d'optimisation discrète dont le critère est additif (l'interprétation la moins chère correspondant alors à la solution optimale).

La recherche d'un des modèles les moins chers d'une base de connaissances à pénalités a été implémentée. La base de connaissances est un ensemble de couples $< \varphi_i, \alpha_i >$ oùchaque φ_i est une conjonction de formules de cardinalité (n, liste de littéraux) comme dans (Benhamou et Sais 92 [2]). La recherche est une adaptation de la procédure de Davis et Putnam [5]. On développe un arbre de recherche suivant un algorithme $A^\star$; chaque nÏud correspond à une interprétation partielle ; le choix du nÏud à développer est déterminé par une fonction $f = g+h$ oùg est le coût de l'affectation partielle courante (c'est-à- dire la somme des pénalités des formules déjà violées par celle-ci), et h est une estimation du coût minimal d'une interprétation (totale) issue du nÏud. Pour calculer h, on définit pour chaque variable propositionnelle a, les coûts $kv(a)$ et $kf(a)$ de l'affectation de a à vrai (resp. à faux) ; pour le nÏud N, on définit alors $h(N) = \sum\{\min(kv(a), kf(a)),a$ variable restant à affecter $\}$. On vérifie que $h(N)$ est une fonction minorante, c'est-à-dire $h(N) \leq \hat{h}\ (N)$, où$\hat{h}\ (N)$ est le coût réel d'une interprétation totale de coût minimal issue du nÏud. De plus, pour développer un nÏud, on choisit une variable a telle que $kv(a) = kf(a) = +\infty$ (inconsistance totale amenant à rejeter le nÏud) ou, s'il n'existe pas de telle variable, une des variables a maximisant $|kv(a) - kf(a)|$. L'implémentation (en Common Lisp) a été testée sur des exemples de petite taille et donne des résultats satisfaisants. Quant à l'implémentation du calcul des sous-théories préférées, il est facile de définir un algorithme utilisant les nogoods (ensembles inconsistants de formules, minimaux pour l'inclusion) supposés calculés au préalable par un ATMS.

Parmi les extensions possibles de la logique des pénalités, reprenant une idée évoquée dans (Dubois, Prade 91 [7]), on pourrait envisager d'associer à chaque formule plusieurs pénalités incommensurables (par exemple, une somme à payer et un temps) ; on manipulerait alors des vecteurs de pénalités seulement partiellement ordonnés. Une autre extension possible est la prise en compte non seulement de pénalités causées par la violation d'une formule, mais aussi des gains associés à la satisfaction d'une formule (ce qui peut être traduit par des coûts négatifs). Par ailleurs, comme il a été mentionné en Section 5, la logique des pénalités ne permet pas de gérer des ressources consommables ; l'étendre dans un tel but ne nous paraît pas une tâche aisée.

Remerciements

Nous tenons à remercier Claudette Cayrol pour sa relecture attentive d'une version préliminaire de cet article, Michel Cayrol pour avoir trouvé une erreur importante dans cette version préliminaire, et les relecteurs pour leurs nombreuses remarques constructives.

Annexe

Une relation d'inférence non-monotone $\mid\!\sim$ est une relation d'inférence comparative si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{L}$,

Supraclassicalité	si $\alpha \models \gamma$, alors $\alpha \mid\!\sim \gamma$.
Équivalence logique gauche	si $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$, alors $\beta \mid\!\sim \gamma$.
Affaiblissement à droite	si $\models \beta \rightarrow \gamma$ et $\alpha \mid\!\sim \beta$, alors $\alpha \mid\!\sim \gamma$.
Et	si $\alpha \mid\!\sim \beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$, alors $\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$.
Conditionalisation faible	si $\alpha \mid\!\sim \beta$, alors $\mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$.
Préservation de la consistance	si $\alpha \mid\!\sim \bot$, alors $\alpha \models \bot$.
Cumulativité	si $\alpha \mid\!\sim \beta$ et $\beta \models \alpha$, alors $\alpha \mid\!\sim \gamma \Leftrightarrow \beta \mid\!\sim \gamma$.
Ou	si $\alpha \mid\!\sim \gamma$ et $\beta \mid\!\sim \gamma$, alors $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma$.
Monotonie rationnelle	si $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$, alors $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$.

où $\mid\!\sim \alpha$ et $\models \alpha$ sont des abréviations pour $\top \mid\!\sim \alpha$ et $\top \models \alpha$.

References

[1] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In Ruzena Bajcsy, editor, *Proc. of the 13^{th} IJCAI*, pages 640–645, Chambery, FRANCE, 1993. Morgan-Kaufmann.

[2] B. Benhamou and L.Sais. Formules de cardinalité et symétries en calcul propositionnel. In *Premières Rencontres Nationales des jeunes Chercheurs en IA*, pages 242–255, Rennes, FRANCE, September 1992. IRISA.

[3] G. Brewka. Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning. In N.S. Sridharan, editor, *Proc. of the 11^{th} IJCAI*, pages 1043–1048, Detroit, MI, 1989. Morgan-Kaufmann.

[4] C. Cayrol. Un modèle logique général pour le raisonnement révisable. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 6(3):255–284, 1992.

[5] M. Davis and H.Putnam. A computing procedure for quantification theory. *Journal of the ACM*, 7(3):210–215, 1960.

[6] F. Dupin de Saint-Cyr. Formalisation et applications de la logique des pénalités. Technical report, I.R.I.T., Toulouse, FRANCE, 1993.

[7] D. Dubois and H. Prade. Tolls sets. In *IFSA'91*, pages 21–24, 1991.

[8] E. Freuder and R. Wallace. Partial constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, 58:21–70, 1992.

[9] M. Freund. Default extensions : an alternative to the probabilistic approach. To appear, 1993.

[10] P. Gärdenfors and D. Makinson. Nonmonotonic inference based on expectations. To appear in *Artificial Intelligence*, 1993.

[11] J.Y. Girard. Linear logic. *TCS 50*, 1987.

[12] M. Goldszmidt and J. Pearl. System z^+ : a formalism for reasoning with variable-strength defaults. In *AAAI'91*, pages 339–404, 1991.

[13] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207, 1990.

[14] J. Lang. Evaluation sémantique en logique possibiliste propositionnelle. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 4:21–48, 1990.

[15] D. Lehmann. Another perspective on default reasoning. Technical Report 92-12, Leibniz Center for Research in Computer Science. Hebrew University of Jerusalem, Israel, July 1992.

[16] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence*, 55:1–60, 1992.

[17] B. Nebel. Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches. In J.A. Allen, R. Fikes, and E. Sandewall, editors, *Proc. of the 2^{nd} KR*, pages 417–428, Cambridge, MA, 1991. Morgan-Kaufmann.

[18] G. Pinkas. Propositional nonmonotonic reasoning and inconsistency in symmetric neural networks. In *Proc. of the 12^{th} IJCAI*, pages 525–530, Sydney, AUSTRALIA, 1991. Morgan-Kaufmann.

[19] Y. Shoham. Reasoning about change - time and causation from the standpoint of artificial intelligence. *MIT Press*, 1988.

[20] W. Spohn. A general non-probabilistic theory of inductive reasoning. In *Proc. of the 4^{th} Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 149–158, 1990.