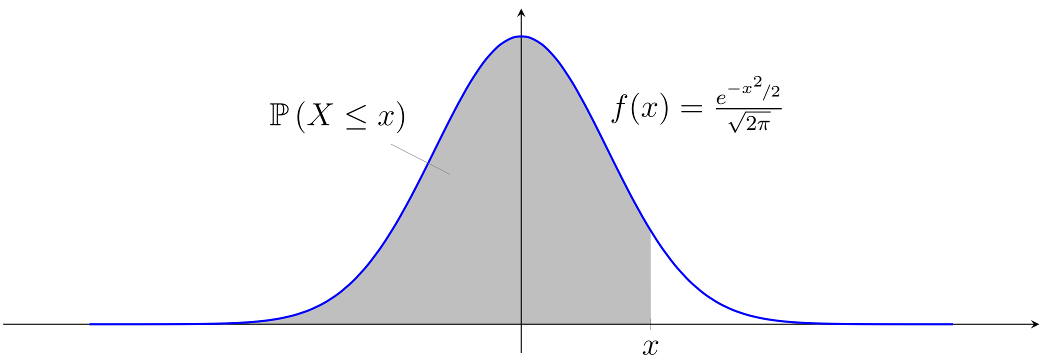
Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

On suppose que X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Pour tout réel x, le nombre $F(x)$ est l'aire de la partie représentée sur le graphique :



Remarque : Noter que pour des raisons de symétrie, on a la relation :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(X \geq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -x)\,. \end{aligned}$$

Le tableau suivant donne des valeurs approchées de la fonction de répartition de X pour x entre 0 et 2.99.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5717	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Comment lire cette table numérique ?

On écrit le développement décimal de x avec 2 chiffres après la virgule : $x = a, bc$ (où a, b et c sont des entiers entre 0 et 9). Le début du développement a, b se lit sur la bordure verticale du tableau et la fin $0, 0c$ se lit sur la bordure horizontale. Le nombre qui se trouve à l'intersection de la ligne de a, b et de la colonne de $0, 0c$ est approximativement $\mathbb{P}(X \leq a, bc)$.

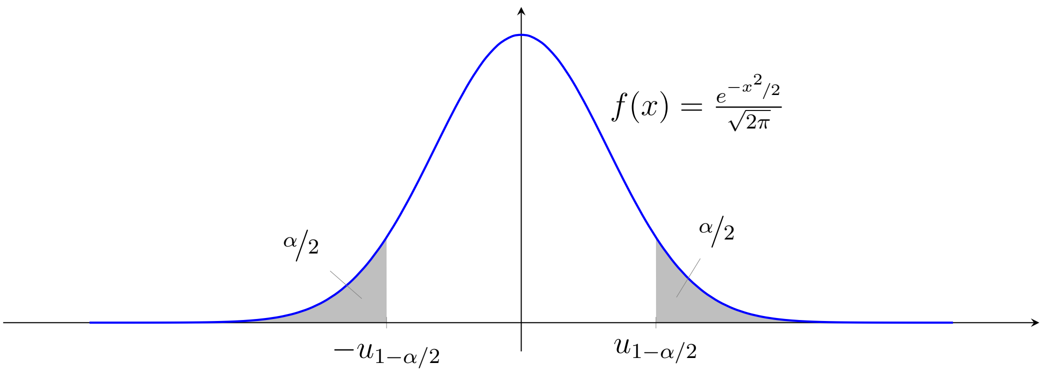
Exemple : $\mathbb{P}(X \leq 1.24) \approx 0.8925$.

Valeurs extrêmes de la loi normale centrée réduite

On suppose que X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. La correspondance entre α et $u_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - {}^{\alpha}/_{2}$ de la Gaussienne centrée réduite est

$$\mathbb{P}(|X| > u_{1-\alpha/2}) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(|X| \leq u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Cette correspondance peut se visualiser sur le graphe :



La symétrie de la fonction densité de X permet d'écrire pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X > z) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X| > z)$$

Dans les tableaux numériques suivants, on donne les valeurs approchées des quantiles $u_{1-\alpha/2}$ pour certaines valeurs de α.

α	$u_{1-\alpha/2}$
0.000001	5.066
0.00001	4.414
0.0001	3.891
0.001	3.290
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881

α	$u_{1-\alpha/2}$
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.10	1.645
0.11	1.598
0.12	1.555
0.13	1.514
0.14	1.476
0.15	1.440
0.20	1.282

α	$u_{1-\alpha/2}$
0.25	1.150
0.30	1.036
0.35	0.935
0.40	0.842
0.45	0.755
0.50	0.674
0.55	0.598
0.60	0.524
0.65	0.454
0.70	0.385

α	$u_{1-\alpha/2}$
0.75	0.319
0.80	0.253
0.85	0.189
0.90	0.126
0.95	0.063
0.96	0.050
0.97	0.038
0.98	0.025
0.99	0.013
0.999	0.001

Exemple : on a $\mathbb{P}(|X| > 1.645) \approx 0.10$.

On peut éventuellement utiliser cette table pour donner des valeurs de la fonction de répartition de X :

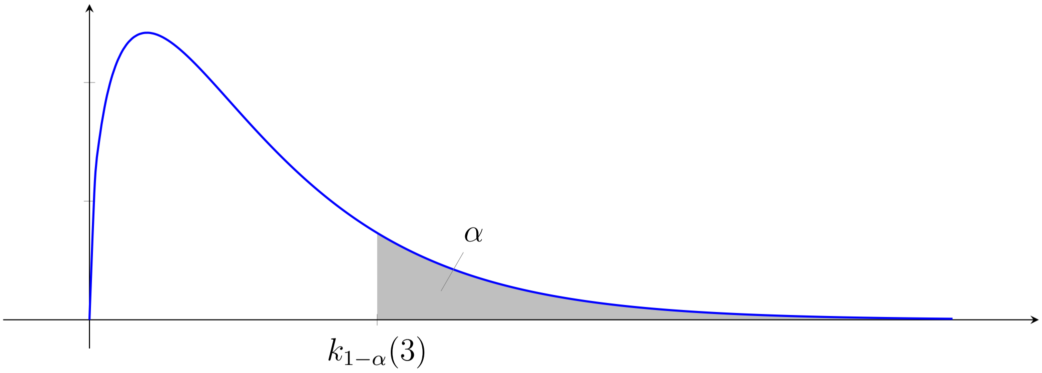
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2.054) &= 1 - \mathbb{P}(X > 2.054) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X| > 2.054) \quad \text{par symétrie} \\
&\approx 1 - \frac{0.04}{2} \\
&= 0.98
\end{aligned}$$

Valeurs extrêmes de la loi du χ^2

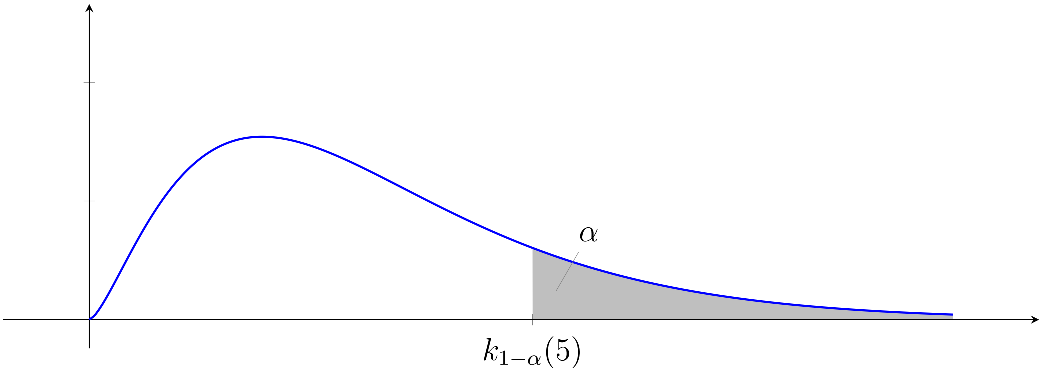
On suppose que X suit une loi du χ^2 à d degrés de liberté. Dans le tableau numérique suivant, le degré de liberté se lit dans la colonne de gauche, la probabilité α se lit sur la première ligne et la valeur $k_{1-\alpha}(d)$ du quantile d'ordre $1-\alpha$ se lit au milieu du tableau. Le lien entre ces trois nombres est

$$\mathbb{P}(X > k_{1-\alpha}(d)) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \leq k_{1-\alpha}(d)) = 1 - \alpha$$

Cette correspondance peut se visualiser sur les graphes suivants, où on a représenté la fonction densité de X lorsque $d = 3$



... et lorsque $d = 5$



d \ α	0.975	0.90	0.50	0.05	0.04	0.03	0.025	0.02	0.01	0.001	0.0001
1	0.001	0.0158	0.455	3.841	4.218	4.709	5.024	5.412	6.635	10.827	15.137
2	0.051	0.211	1.386	5.991	6.438	7.013	7.378	7.824	9.210	13.815	18.421
3	0.216	0.584	2.366	7.815	8.311	8.947	9.348	9.837	11.345	16.266	21.108
4	0.484	1.064	3.357	9.488	10.026	10.712	11.143	11.668	13.277	18.467	23.513
5	0.831	1.610	4.351	11.070	11.644	12.375	12.833	13.388	15.086	20.515	25.745
6	1.237	2.204	5.348	12.592	13.198	13.968	14.449	15.033	16.812	22.457	27.856
7	1.690	2.833	6.346	14.067	14.703	15.509	16.013	16.622	18.475	24.322	29.878
8	2.180	3.490	7.344	15.507	16.171	17.010	17.535	18.168	20.090	26.125	31.828
9	2.700	4.168	8.343	16.919	17.608	18.480	19.028	19.679	21.666	27.877	33.720
10	3.247	4.865	9.342	18.307	19.021	19.922	20.483	21.161	23.209	29.588	35.564
11	3.816	5.578	10.341	19.675	20.412	21.342	21.920	22.618	24.725	31.264	37.367
12	4.404	6.304	11.340	21.026	21.785	22.742	23.337	24.054	26.217	32.909	39.134
13	5.009	7.042	12.340	22.362	23.142	24.125	24.736	25.472	27.688	34.528	40.871
14	5.629	7.790	13.339	23.685	24.485	25.493	26.119	26.873	29.141	36.123	42.579
15	6.262	8.547	14.339	24.996	25.816	26.848	27.488	28.259	30.578	37.697	44.263
16	6.908	9.312	15.338	26.296	27.136	28.191	28.845	29.633	32.000	39.252	45.925
17	7.564	10.085	16.338	27.587	28.445	29.523	30.191	30.995	33.409	40.790	47.566
18	8.231	10.865	17.338	28.869	29.745	30.845	31.526	32.346	34.805	42.312	49.189
19	8.907	11.651	18.338	30.144	31.037	32.158	32.852	33.687	36.191	43.820	50.795
20	9.591	12.443	19.337	31.410	32.321	33.462	34.170	35.020	37.566	45.315	52.386
21	10.283	13.240	20.337	32.671	33.597	34.759	35.479	36.343	38.932	46.797	53.962
22	10.982	14.041	21.337	33.924	34.867	36.049	36.781	37.659	40.289	48.268	55.525
23	11.689	14.848	22.337	35.172	36.131	37.332	38.076	38.968	41.638	49.728	57.075
24	12.401	15.659	23.337	36.415	37.389	38.609	39.364	40.270	42.980	51.179	58.613
25	13.120	16.473	24.337	37.652	38.642	39.880	40.646	41.566	44.314	52.620	60.140
26	13.844	17.292	25.336	38.885	39.889	41.146	41.923	42.856	45.642	54.052	61.657
27	14.573	18.114	26.336	40.113	41.132	42.407	43.194	44.140	46.963	55.476	63.164
28	15.308	18.939	27.336	41.337	42.370	43.662	44.461	45.419	48.278	56.893	64.662
29	16.047	19.768	28.336	42.557	43.604	44.913	45.722	46.693	49.588	58.302	66.152
30	16.791	20.599	29.336	43.773	44.834	46.160	46.979	47.962	50.892	59.703	67.633

Exemples :
Pour $d = 9$ et $\alpha = 0.05$ on a $k_{0.95}(9) = 16.919$.
Pour $d = 23$ et $\alpha = 0.001$ on a $k_{0.999}(23) = 49.728$.

On peut également utiliser cette table pour donner des valeurs de la fonction de répartition de X :

Si $d = 13$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 7.042) &= 1 - \mathbb{P}(X > 7.042) \\ &\approx 1 - 0.90 \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

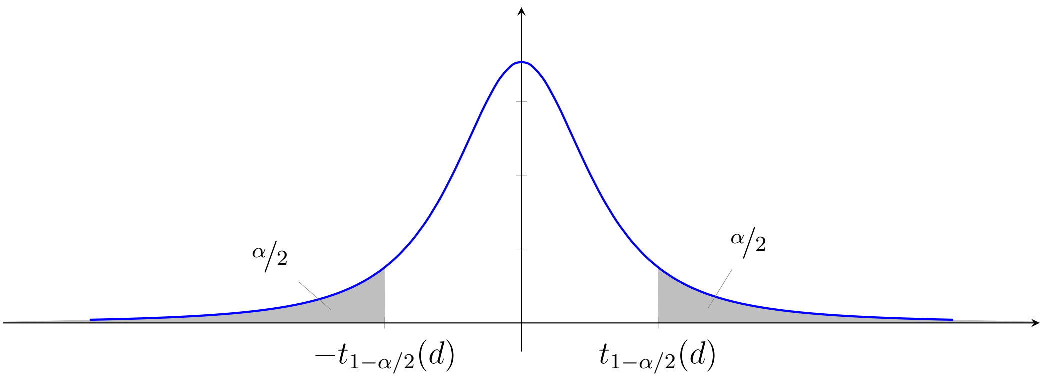
Valeurs extrêmes de la loi du Student

On suppose que X suit une loi du Student à d degrés de liberté.

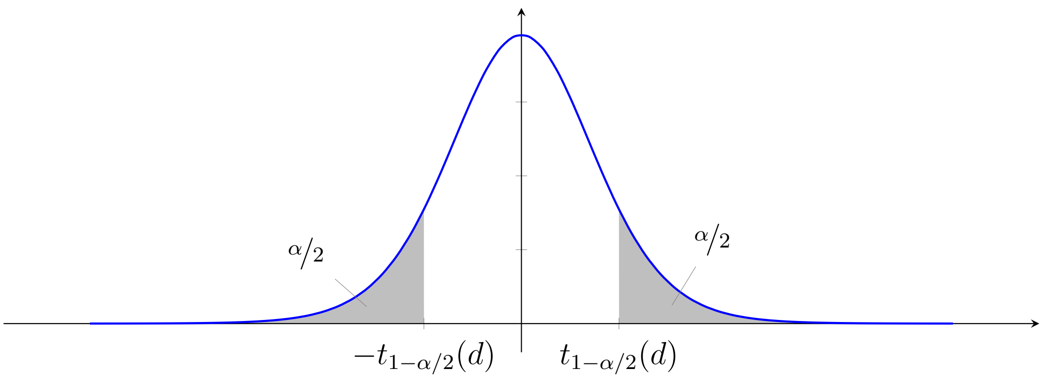
Dans le tableau numérique suivant, le degré de liberté se lit dans la colonne de gauche, la probabilité α se lit sur la première ligne et la valeur du quantile $t_{1-\alpha/2}(d)$ d'ordre $1 - {}^{\alpha}\!/_{2}$ se lit au milieu du tableau. Le lien entre ces trois nombres est

$$\mathbb{P}(|X| > t_{1-\alpha/2}(d)) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(|X| \leq t_{1-\alpha/2}(d)) = 1 - \alpha$$

Cette correspondance peut se visualiser sur les graphes suivants, où on a représenté la fonction densité de X lorsque $d = 2$



... et lorsque $d = 12$



d \ α	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.001	0.0001
1	1.000	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	63.657	636.62	6366.2
2	0.816	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925	31.598	99.993
3	0.765	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841	12.924	28.000
4	0.741	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604	8.610	15.544
5	0.727	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032	6.869	11.178
6	0.718	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707	5.959	9.082
7	0.711	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499	5.408	7.885
8	0.706	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355	5.041	7.120
9	0.703	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250	4.781	6.594
10	0.700	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	3.169	4.587	6.211
11	0.697	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106	4.437	5.921
12	0.695	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055	4.318	5.694
13	0.694	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012	4.221	5.513
14	0.692	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977	4.140	5.363
15	0.691	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947	4.073	5.239
16	0.690	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.921	4.015	5.134
17	0.689	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.898	3.965	5.044
18	0.688	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.878	3.922	4.966
19	0.688	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.861	3.883	4.897
20	0.687	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.845	3.850	4.837
21	0.686	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.831	3.819	4.784
22	0.686	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.819	3.792	4.736
23	0.685	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.807	3.767	4.693
24	0.685	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.797	3.745	4.654
25	0.684	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.787	3.725	4.619
26	0.684	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.779	3.707	4.587
27	0.684	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.771	3.690	4.558
28	0.683	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.763	3.674	4.530
29	0.683	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.756	3.659	4.506
30	0.683	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.750	3.646	4.482

Exemples :
Pour $d = 6$ et $\alpha = 0.05$, on a $t_{0.975}(6) = 2.447$.
Pour $d = 19$ et $\alpha = 0.01$, on a $t_{0.995}(19) = 2.861$.

On peut également utiliser cette table pour donner des valeurs de la fonction de répartition de X. Si $d = 11$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 1.796) &= 1 - \mathbb{P}(X > 1.796) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X| > 1.796) \quad \text{par symétrie} \\
&\approx 1 - \frac{0.10}{2} \\
&= 0.95
\end{aligned}$$