Examen - Session 2

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants.

1 Analyse

Exercice 1. (Question de cours) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Rappeler la définition du gradient de f et la formule liant gradient et différentielle.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(x, y) = (u, v) = (x + y, x - y)$$

1. Démontrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Calculer son inverse ϕ^{-1}.

   On remarque que ϕ est une application linéaire de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. C'est une bijection car le déterminant de M est non nul. Comme ϕ et ϕ^{-1} sont linéaires, elles sont donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. L'application ϕ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même (on peut aussi utiliser le théorème d'inversion globale).
   En calculant $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ on a $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui est définie par $\phi^{-1}(u, v) = (x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

2. Calculer le déterminant jacobien de ϕ au point (x, y) et le déterminant jacobien de ϕ^{-1} au point (u, v).

   On vient de montrer que ϕ est un changement de variable linéaire. Sa matrice jacobienne est constante sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Jac}_\phi(x, y) = M$ et $\mathrm{Jac}_{\phi^{-1}}(x, y) = M^{-1}$. Les déterminant jacobien sont donc constants et valent -2 et $-1/2$ respectivement.

3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Soit $g = f \circ \phi^{-1}$. Calculer les dérivées partielles de f puis calculer les dérivées partielle de g **en utilisant la règle de la chaîne**.

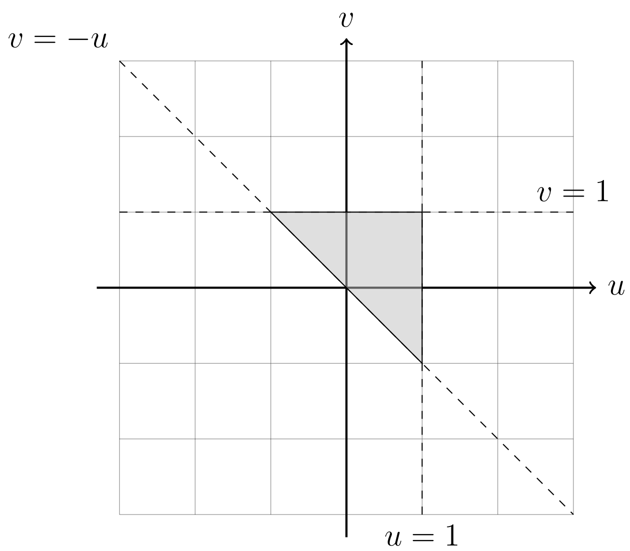
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2-y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2ye^{x^2-y^2}$$
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &= 2xe^{x^2-y^2} \times \frac{1}{2} - 2ye^{x^2-y^2} \times \frac{1}{2} = (x - y)e^{x^2-y^2} = ve^{uv}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= 2xe^{x^2-y^2}\times\frac{1}{2} - 2ye^{x^2-y^2}\times\frac{-1}{2} = (x+y)e^{x^2-y^2} = ue^{uv},\end{aligned}$$

4. On note $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ (x-1)<y<(1-x)\}$. Déterminer le domaine Δ image de D par ϕ. Faire un dessin.

   Le domaine $\Delta = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2, u+v>0, u<1, v<1\}$ est le triangle (on devrait s'en douter car ϕ est linéaire) :



5. En déduire $\int_D f(x,y)dxdy$.

   On a

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)dxdy &= \int_\Delta e^{uv}\ \frac{dudv}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-u}^{1} e^{uv}dv\right)du\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{e^{uv}}{u}\right]_{v=-u}^{1}du\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u - \frac{e^{-u^2}}{u}du\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u du = \frac{1}{2}(e-e^{-1}) = \sinh(1).\end{aligned}$$

   On a utiliser le fait que $u\mapsto -\frac{e^{-u^2}}{u}du$ est impaire et son intégrale sur $[-1,1]$ est nulle.

Exercice 3. On considère la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

1. Étudier la continuité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

   L'application $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne) est continue. L'application f est continue comme le produit de deux applications continues.

2. Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.

   La fonction est $\mathcal{C}^1$ partout sauf peut être en $(0, 0)$ (à cause la racine carrée). On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

   et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Étudier la continuité des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, puis en $(0, 0)$.

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, les dérivées partielles sont clairement $\mathcal{C}^0$. Reste à vérifier en l'origne. On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

   et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

   Ainsi, les dérivée partielles sont continues en l'origine et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

   Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est différentiable partout.

5. En déduire une valeur approchée de $f(1.01, 0)$.

   La différentielle de f en $(1, 0)$ est l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui $(h_1, h_2) \mapsto (1+1)h_1 + 0 \times h_2 = 2h_1$. On a donc le DL

$$f(1+h_1, h_2) = f(1, 0) + L(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2\|) = 1 + 2h_1 + o(\|(h_1, h_2)\|)$$

   Par suPar suite, $f(1.01, 0) \approx 1 + 0.02 = 1.02$.

Exercice 4. Soit $f(x, y) = |4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39|$.

1. Déterminer l'ensemble $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 < 0\}$.

   On a $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 < 1\}$. C'est l'intérieur d'une ellipse centrée en $(1, -2)$.

2. Étudier la continuité f et donner l'ensemble image de f.

   La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ (composée d'un polynome et de la valeur absolue). Elle est à valeurs dans $[0, +\infty[$ car le polynôme s'annule (cf question précédente) et n'est pas borné sur $\mathbb{R}^2$.

3. Dessiner l'ensemble $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) > 1/2\}$.

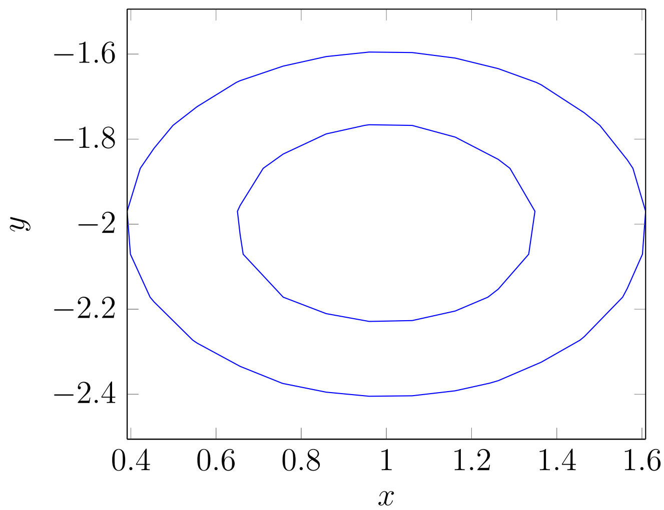
   Il faut séparer les cas N et N^c. Ainsi, dans N

   $$f(x, y) = -4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 39 = -4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 + 1$$

   et $L_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 < 1/2\}$. Et dans N^c on a

   $$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 = 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 1$$

   et $L_{N^c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 > 3/2\}$. L'ensemble recherché est $L = L_N \cup L_{N^c}$ et est le complémentaire d'une couronne ellipsoïdale centrée en $(1, -2)$.



4. Sur quel ensemble f est-elle $\mathcal{C}^\infty$? Justifier succintement la réponse.

   Soit $Z = \{(x, y), 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 = 0\}$. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur Z (car c'est la composée de 2 fonctions régulières). Sur Z, la fonction f n'est pas différentiable (point anguleux dû à la non dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0). Cette dernière affirmation mériterait une étude un peu plus poussée...

5. Donner les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. Indiquer, en justifiant, la nature de ces points (minimum global ou local). *Indication : cette question se traitera sans calcul*

   On a vu à la question 2 que f est à valeurs positives. Sur Z elle s'annule. L'ensemble des points de Z sont des minima globaux.

6. Calculer le gradient et la Hessienne de f en les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels ces quantités sont bien définies.

Attention : bien séparer les cas N et $N^c \setminus Z$ (car f n'est pas différentiable en Z) :

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (-8x+8, -18y-36) \text{ si } (x,y) \in N \\ (8x-8, 18y+36) \text{ si } (x,y) \in N^c \setminus Z \end{cases}$$

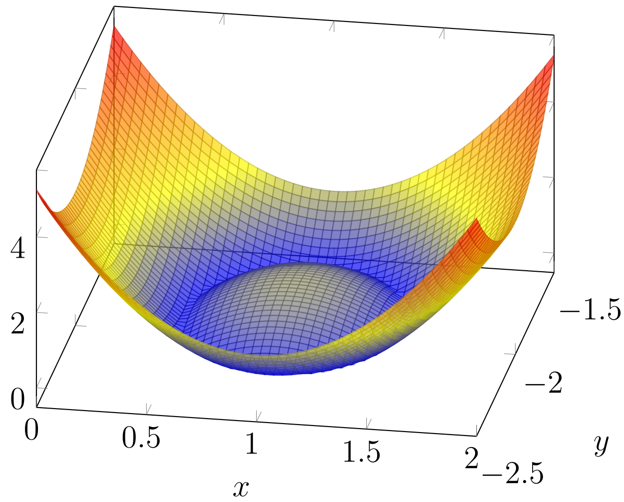
et

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \text{ si } (x,y) \in N \\ \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \text{ si } (x,y) \in N^c \setminus Z \end{cases}$$

7. Déterminer alors le(s) point(s) critique(s) de f donner leur nature (minimum/maximum, local/global, point selle,...).

   On a $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si et seulement si $(x,y) = (1,-2)$. La Hessienne en $(1,-2) \in N$ est definie négative et $(1,-2)$ est un maximum local.

8. Tracer qualitativement le graphe de f.



2 Probabilités

Exercice 5. (Question de cours) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2. Démontrer que l'on a

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6. (Lois géométriques) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètre $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ respectivement. On note $Z = \min\{X, Y\}$. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Z.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ et $\mathbb{P}(Y \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Par définition, on a $\mathbb{P}(X = k) = a(1-a)^{k-1}$ pour $k > 0$. Cela donne

   $$\mathbb{P}(X \leq k) = a \sum_{\ell=1}^{k} (1-a)^{\ell-1} = 1 - (1-a)^k$$

   pour $k > 0$. De même $\mathbb{P}(Y \leq k) = 1 - (1-b)^k$ pour $k > 0$.

2. Calculer alors $\mathbb{P}(Z \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

   On a $\{Z \leq k\} = \{X \leq k\} \cup \{Y \leq k\}$. En utilisant les lois de De Morgan on a $\{Z > k\} = \{X > k\} \cap \{Y > k\}$. Ainsi, par indépendance de X et Y, on a

   $$\mathbb{P}(Z \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Z > k) = 1 - \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k) = 1 - (1-a)^k(1-b)^k.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Exprimer l'évènement $\{Z = k\}$ en fonction des évènements du type $\{Z \leq \ell\}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

   On a $\{Z = k\} = \{Z \leq k\} \setminus \{Z \leq k-1\} = \{Z \leq k\} \cap \{Z \leq k-1\}^c$.

4. En déduire que Z est une variable aléatoire Géométrique dont on déterminera le paramètre.

   D'après la question précédente et comme $\{Z \leq k-1\} \subset \{Z \leq k\}$ on a $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1)$. Ainsi, pour tout $k > 0$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) &= 1 - (1-a)^k(1-b)^k - 1 + (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1} \\ &= (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}\left(1 - (1-a)(1-b)\right) \\ &= \Big((1-a)(1-b)\Big)^{k-1}\Big(1 - \Big((1-a)(1-b)\Big)\Big).\end{aligned}$$

   La variable aléatoire Z est une geométrique de paramètre $1 - (1-a)(1-b) = a + b - ab$.