Examen

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

1 Topologie et formes quadratiques

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2 \quad \forall\, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

1. Justifier que ϕ est bilinéaire. Montrer qu'elle est symétrique si et seulement si $b = 4$. Exprimer alors la matrice associée.
2. On suppose $b = 4$. Exprimer une condition sur a pour que ϕ soit définie positive.
3. A quelle condition sur la paire (a, b) l'application ϕ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
4. On pose $b = 4$ et $a = 16$. Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 1\}$$

est un fermé et le dessiner dans un repère orthonormé. C est-il compact ?

2 Courbes paramétrées

Exercice 2. Soit $\Gamma(t) = (\sin t, \frac{\sin t}{2+\cos t})$ pour $t \in [0, \pi]$.
1. Donner le tableau de variation de Γ.
2. Déterminer le point double de Γ. Calculer les tangentes en ce point double
3. Déterminer points de Γ qui admettent une tangente horizontale ou une tangente verticale.
4. Tracer la courbe $t \mapsto \Gamma(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

3 Calcul différentiel

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(y - x) & \text{si } y > |x| \\ 0 & \text{si } y = |x| \\ \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y < |x| \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
3. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. La fonction f admet-elle une dérivée en suivant v sur $\mathbb{R}^2$?
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto |x| \, e^{-x^2-y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
1. Déterminer l'ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est $\mathcal{C}^2$.
2. Déterminer les valeurs de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$. En déduire la nature des extremum de f sur cet ensemble.
3. Calculer les points critiques de la f. En donner leur nature.
4. Faire le bilan : lister les extrema de f.

4 Intégration

Exercice 6. Centre de gravité

exo Pour tout entier pair $n \geq 2$ on considère Δ_n, le domaine du plan délimité par les courbes d'équations $y = x^n$ et $x = y^n$.
1. Calculer l'aire S_n de Δ_n.
2. Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$ et expliquer pourquoi cette valeur était attendue.

Exercice 7. Pour $R > 0$, on considère le domaine $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \ , \ z \geq 0\}$.
1. Dessiner et caractériser géométriquement Δ.
2. Donner son volume V sans faire obligatoirement de calcul.
3. Calculer la hauteur z_G de son centre de gravité.