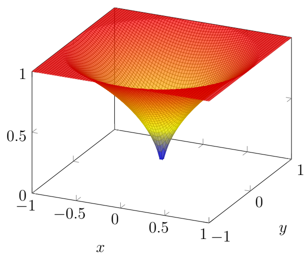
Examen

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On considère le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\quad 0 \leq z \leq 1,\ \ x^2 + y^2 \leq z^4\,\}$.

1. Dessiner D.

   On a $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 1, \underbrace{0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq z^2}_{=A_{z^2}}\}$. On note A_{z^2} le disque de rayon $z^2 > 0$. Le domaine D est donc la partie comprise au dessus du graphe de la fonction $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}$:



2. Calculer son volume V.

   En appliquant la formule de sommation par tranche on a :

$$V = \int_0^1 \underbrace{\left(\iint_{A_{z^2}} dxdy\right)}_{=\pi z^4} dz = \pi \int_0^1 z^4 dz = \frac{\pi}{5}$$

3. Calculer son centre de gravité $G = \frac{1}{D}\left(\iiint_D xdxdydz, \iiint_D ydxdydz, \iiint_D zdxdydz\right)$.

   Le centre de gravité de D appartient clairement à l'axe de révolution Oz. On peut se convaincre que les 2 premières coordonnées s'annulent bien, car on a

$$\iiint_D xdxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{A_{z^2}} xdxdy\right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{z2} rdr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta}_{=0}\right) dz = 0,$$

   et

$$\iiint_D ydxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{A_{z^2}} ydxdy\right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{z^2} rdr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta}_{=0}\right) dz = 0.$$

   Reste à déterminer la coordonnée sur Oz :

$$\frac{1}{V} \iiint_D zdxdydz = \frac{1}{V} \int_0^1 z \left(\iint_{A_{z^2}} dxdy\right) dz = \frac{\pi}{V} \int_0^1 z^5 dz = \frac{5}{6}.$$

   Pour conclure on a $G = (0, 0, 5/6)$.

Exercice 2. Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résutlat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $i \in \{1, \cdots, 6\}$ et $j \in \{0, 1, \cdots, 6\}$. Que vaut $\mathbb{P}(X = j|D = i)$?

   Le nombre D étant fixé à i (probabilité conditionelle), X est le nombre de pile en i lancers. C'est donc le nombre de succès dans i répétition d'un schéma de Bernoulli i.i.d. et $X \sim \mathcal{B}(i, p)$. Donc si $j > i$ on a $\mathbb{P}(X = j|D = i) = 0$ et si $0 \leq j \leq i$ on a $\mathbb{P}(X = j|D = i) = \binom{i}{j} p^j q^{i-j}$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)$

   Il faut utiliser la formule des probabilités totale (principe de partition)
   $$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = 0|D = i)\mathbb{P}(D = i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} q^i = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)$$

3. Sachant que l'on n'a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1 ? Évaluer cette quantité quand $p = q = \frac{1}{2}$.

   Dans cette question on demande de calculer $P(D = 1|X = 0)$. On utilise ici la formule de Bayes :
   $$P(D = 1|X = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0|D = 1)\mathbb{P}(D = 1)}{\mathbb{P}(X = 0)} = \frac{\frac{q}{6}}{\frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)} = \frac{1-q}{1-q^6}.$$
   Dans le cas $p = 1/2$ on trouve $32/63 \approx 0.508$.

Exercice 3. On note $\Delta =]-\infty, 0] \times \{0\}$ et $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et on pose :
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathcal{O} & \longrightarrow &]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\\ & (x, y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right) \end{array}$$

1. Montrer que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de $\mathcal{O}$?

   Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Δ convergente dans $\mathbb{R}^2$ de limite $(\bar{x}, \bar{y})$. On a $y_n = 0$ et $x_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, par passage à la limite $\bar{y} = 0$ et $\bar{x} \leq 0$. Donc $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$ et Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{O}$ est alors le complémentaire d'un fermé. C'est donc un ouvert.

2. Montrer que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et calculer la matrice jacobienne de Φ.

   Posons
   $$\begin{cases} r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta(x, y) = 2\arctan(y/(x + \sqrt{x^2 + y^2})) \end{cases}$$
   pour $(x, y) \in \mathcal{O}$. De plus, on a $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Sur ce second ensemble, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)$ est une fonction polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas. Comme $t \to \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, par composition $(x, y) \to r(x, y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et donc sur $\mathcal{O}$. De même,

on a que $(x,y) \to x + \sqrt{x^2+y^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ne s'annule que pour $y = 0$ et $x < 0$. La fraction $(x,y) \to y/(x+\sqrt{x^2+y^2})$ est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et, par composition $(x,y) \to \theta(x,y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur ce même ensemble.
Par calcul direct, on obtient :

$$J_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2y}{y^2+(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) &= \frac{2}{y^2+(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

3. En déduire que le déterminant J de la matrice jacobienne de Φ satisfait $J(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{O}$.

   On rappelle que $J(x,y) = \det(J_\Phi(x,y))$. En remplaçant, on obtient que :

$$J(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y).$$

   Après compensation, ceci-donne :

$$J(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{2}{y^2+(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\left(x(x+\sqrt{x^2+y^2})+y^2\right).$$

   On remarque alors en développant que :

$$y^2+(x+\sqrt{x^2+y^2})^2 = 2\left(x(x+\sqrt{x^2+y^2})+y^2\right) = 2\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

   On peut donc simplifier l'expression de J ci-dessus et obtenir le résultat escompté.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est une fraction de polynome donc c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est en particulier, continue, admet des dérivées partielles, est différentiable et est de classe $\mathcal{C}^1$. On étudie donc plus précisément la continuité en l'origine. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|x^2+y^2| \geq \|(x,y)\|_\infty^2 \qquad |2x^3+xy^2| \leq 3\|(x,y)\|_\infty^3$$

   Par conséquent, $|f(x,y)| \leq 3\|(x,y)\|_\infty$. Par comparaison, on a donc que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$ et f est donc également continue en l'origine.

2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles ? Les calculer.

   On a déjà vu que f admet des dérivées partielles en dehors de l'origine et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6x^2+y^2}{x^2+y^2} - 2x\frac{2x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - 2y\frac{2x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

   En l'origine, on remarque que

$$f(x,0) = 2x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}; \quad f(0,y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

   qui sont toutes deux dérivables en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement. Donc f admet des dérivées partielles en l'origine avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. La fonction f est-elle différentiable ?

   En dehors de l'origine f est $\mathcal{C}^1$ donc différentiable.
   Pour étudier la différentiabilité en l'origine, on remarque que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a

$$f(at,bt) = t\frac{2a^3+ab^2}{a^2+b^2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

   qui est dérivable en $t = 0$. Par conséquent, en $(0,0)$ f admet une dérivée selon le vecteur (a,b) qui vaut $f'_{a,b} = (2a^3+ab^2)/(a^2+b^2)$. Or si f était différentiable en $(0,0)$ on devrait donc avoir que :

$$f'_{a,b} = a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2a.$$

   Ceci n'est pas vrai pout $a = 1$ et $b = 1$ par exemple. Donc f n'est pas différentiable en l'origine.

4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

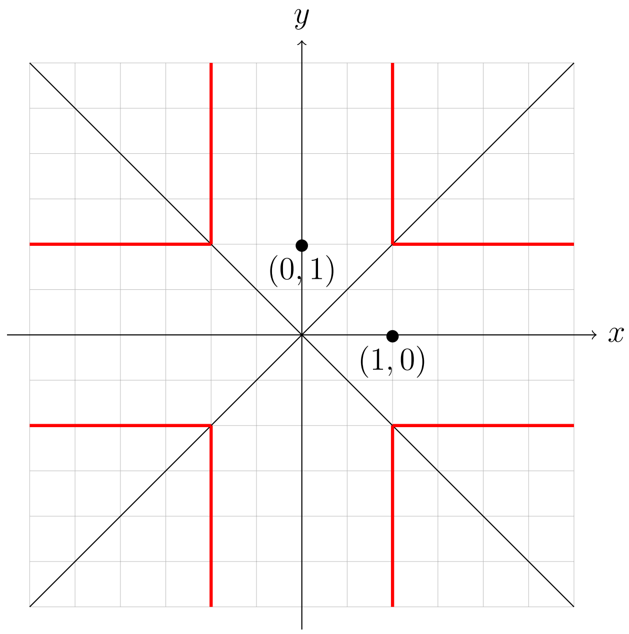
   On a déjà dit que f est $\mathcal{C}^1$ en dehors de l'origine. En l'origine f n'est pas différentiable. A fortiori elle n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & a\|(x,y)\|_\infty + b\|(x,y)\|_1 \end{array}$$

1. Dans cette question, on considère un cas particulier en posant $a = -1$ et $b = 1$.
   (a) Tracer alors L, l'ensemble de niveau 1 de N.

   On a alors $N(x,y) = \begin{cases} |x| \text{ si } |x| \leq |y| \\ |y| \text{ si } |x| > |y| \end{cases}$. On demande de tracer $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | N(x,y) = 1\}$ qui est en rouge sur le dessin suivant :



(b) N est définit-elle une norme ?

Non, N n'est pas séparable : on a par exemple $N(0,1)=0$.

2. On revient au cas général avec $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que N est une norme : montrer qu'alors $a+b>0$ et $(a+2b)>0$.

   Si N est une norme alors $N(1,0)>0$ et $N(1,1)>0$. Or $N(1,0)=a+b$ et $N(1,1)=a+2b$.

3. On suppose maintenant que $(a,b) \in [0,+\infty[^2 \setminus \{(0,0)\}$. L'application N est-elle une norme ?

   On vérifie les différents axiomes de la norme.

   - N est séparable : En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\|(x,y)\|_1 \geq \|(x,y)\|_\infty \geq 0$ donc, comme a et b sont positifs $N(x,y) \geq 0$. De plus, si $N(x,y)=0$ alors, si $a>0$, $\|(x,y)\|_\infty \leq N(x,y)/a = 0$ donc $(x,y)=(0,0)$; sinon $b>0$ et $\|(x,y)\|_1 \leq N(x,y)/b = 0$ donc à nouveau $(x,y)=(0,0)$.
   - N est homogène : En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= a\|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty + b\|(\lambda x, \lambda y)\|_1 \\ &= a|\lambda|\|(x,y)\|_\infty + b|\lambda|\|(x,y)\|_1 \\ &= |\lambda| N(x,y). \end{aligned}$$

   - N satisfait l'inégalité triangulaire. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \|(x+x', y+y')\|_1 &\leq \|(x,y)\|_1 + \|(x',y')\|_1 \\ \|(x+x', y+y')\|_\infty &\leq \|(x,y)\|_\infty + \|(x',y')\|_\infty \end{aligned}$$

   en multipliant ces inégalité par a et b (positifs) et en les ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned} &a\|(x+x', y+y')\|_\infty + b\|(x+x', y+y')\|_1 \\ &\qquad \leq (a\|(x,y)\|_\infty + b\|(x,y)\|_1) + (a\|(x',y')\|_\infty + b\|(x',y')\|) \end{aligned}$$

   soit

$$N(x+x', y+y') \leq N(x,y) + N(x',y').$$