Examen - Session 1

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants.

1 Analyse

Exercice 1. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Montrer que pour tout $u, v \in E$

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle \langle v, v\rangle}.$$

On considère plusieurs cas :

1. Cas $u = 0$ ou $v = 0$: tout est facilement vérifiable et découle des propriétés du produit scalaire.
2. Cas $u \neq 0$ et $v \neq 0$: on note $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ pour tout $u \in E$. De plus, on remarque que l'on a pour tout $u \in E \setminus \{0\}$ on a

$$\langle u, u\rangle > 0 \text{ et } \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = 1$$

Cela implique que :

$$0 \leq \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = 2 + 2\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Ainsi, on en déduit que $-\|u\|\|v\| \leq \langle u, v\rangle$. De même

$$0 \leq \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = 2 - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Ainsi, on en déduit que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. Cela termine la démonstration de l'inégalité.

Exercice 2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (xye^z, \cos(yz))$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

   La fonction $(x, y, z) \mapsto xye^z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De même pour $(x, y, z) \mapsto yz$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. Et donc $(x, y, z) \mapsto \cos(yz)$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$

2. Calculer la différentielle L de f au point $(1, 2, 3)$.

   Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\mathrm{Jac}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 0 & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \end{pmatrix}$$

   Pour on a $\mathrm{Jac}_f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2e^3 & e^3 & 2e^3 \\ 0 & -3\sin(6) & -2\sin(6) \end{pmatrix}$. Ainsi $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire définie par

$$(h_1, h_2, h_3) \mapsto (2e^3h_1 + e^3h_2 + 2e^3h_3, -3\sin(6)h_2 - 2\sin(6)h_3) \in \mathbb{R}^2$$

3. Détermniner l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | L(x, y, z) = (0, 0)\}$.

   Attention : ici, les variables «x, y, z» correspondent aux variables «h_1, h_2, h_3» de la question précédente.
   On cherche le noyau d'une application linéaire. Ici, c'est un sous espace vectoriel de dimension 1 car $\mathrm{Jac}_f(1, 2, 3)$ est de rang 2 (ses colonnes forment un espace de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$). On a

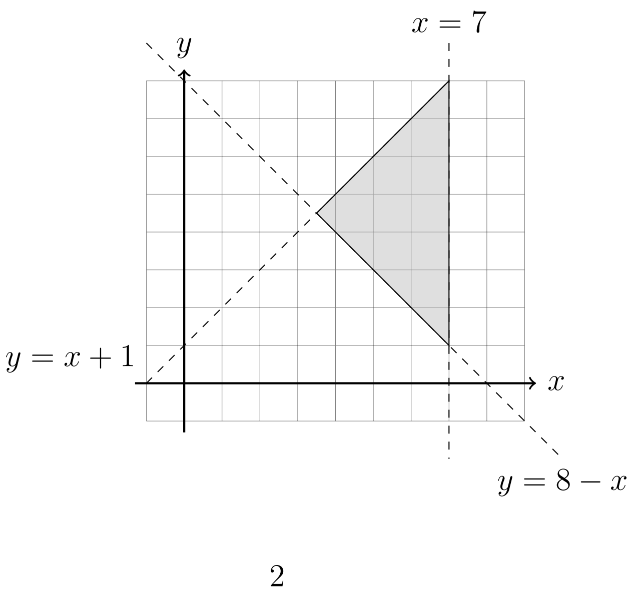
$$\begin{aligned} L(h_1, h_2, h_3) = (0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^3h_1 + e^3h_2 + 2e^3h_3 = 0 \\ -3\sin(6)h_2 - 2\sin(6)h_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2h_1 + h_2 + 2h_3 = 0 \\ h_2 = -\frac{2}{3}h_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = -\frac{2}{3}h_3 \\ h_2 = -\frac{2}{3}h_3 \end{cases} \end{aligned}$$

   C'est la droite $Vect\{(-2, -2, 3)\}$.

Exercice 3. On considère le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 7, 8 - x < y < x + 1\right\}$$

1. Dessiner D.



2. Calculer $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$8 - x < x + 1 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}.$$
   Ainsi
   $$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} &= \int_{7/2}^{7} \left(\int_{8-x}^{x+1} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx \\ &= \int_{7/2}^{7} \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{8-x}^{x+1} dx \\ &= \int_{7/2}^{7} \left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{8} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_{7/2}^{7} + \frac{7}{16} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{15}\right) + \frac{7}{16}\end{aligned}$$

Exercice 4. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction $\check{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

   On commence par observer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et donc en particulier continue et différentiable) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On observe que $0 \le y^2 \le x^2 + y^2$ et donc
   $$|f(x,y)| \le |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$
   Cela prouve que f tend vers 0 en $(0,0)$. Ainsi on peut prolonger f par continuité en posant $\check{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ f(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$.

2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $\check{f}$ est-elle différentiable ?

   Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ on a $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Cela implique que les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ et sont nulles. Ainsi, si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle est nécessairement nulle. Ainsi pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ la dérivée de f en $(0,0)$ et dans la direction v est nulle. Or pour $v = (1,1)$ on a
   $$\frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$
   D'où la contradiction. On a prouvé que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Ainsi l'ensemble des points en lesquels f est différentiable est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(x,y) = \exp\left(-4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 8\right)$$

définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Étudier la régularité f (continuité, différentiabilité, etc...).

   La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée et produit de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est donc continue, différentiable et $\mathcal{C}^1$ partout sur le plan.

2. Déterminer le signe de $(x,y) \mapsto -4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 8$. En déduire l'ensemble image de f.

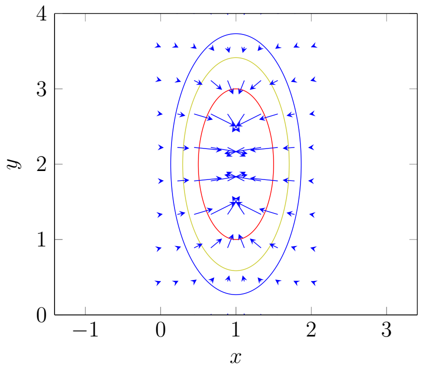
   Pour étudier le signe, on cherche à mettre sous forme de somme de carré. On trouve

   $$-4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 8 = -4(x-1)^2 - (y-2)^2.$$

   C'était écrit à la fin de l'exercice. La réponse est : cette forme quadratique décentrée est de signe négatif pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et l'image de f est alors $]0,1]$.

3. Soit
   $$E_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) \geq \lambda\right\}.$$
   Dessiner $E_{e^{-1}}$, $E_{e^{-2}}$ et $E_{e^{-3}}$. L'ensemble $E_{e^{-1}} \cup E_{e^{-2}} \cup E_{e^{-3}}$ est-il ouvert, fermé, les deux, ni l'un ni l'autre ? Faire une démonstration.

   On a $(x,y) \in E_\lambda \Leftrightarrow 4(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq -\ln\lambda$. Ainsi, les ensembles $E_{e^{-1}}$, $E_{e^{-2}}$ et $E_{e^{-3}}$ sont l'intérieur d'ellipses concentriques centrées en $(1,2)$. On a :

   On a $E_{e^{-1}} \cup E_{e^{-2}} \cup E_{e^{-3}} = E_{e^{-3}}$. Il suffit de montrer que $E_{e^{-3}}$ contient les limites de ses sous suites convergentes. Soit $u_n = (x_n, y_n)$ une suite de $E_{e^{-3}}$ qui converge vers $\ell = (x,y)$. Alors
   $$-4(x_n-1)^2 - (y_n-2)^2 \geq -3$$
   en passant à la limite on a
   $$\begin{aligned} -4(\lim_n x_n - 1)^2 - (\lim_n y_n - 2)^2 &\geq -3 \\ -4(x-1)^2 - (y-2)^2 &\geq -3 \end{aligned}$$
   ce qui montre que $\ell \in E_{e^{-3}}$.

4. Calculer le gradient de f et le représenter succinctement sur la figure de la question 3.

   On a $\nabla f(x,y) = (-8x+8, -2y+4)e^{-4x^2-y^2+8x+4y-8}$. Pour la représentation graphique, on se rappelle que les vecteurs du champ de gradients sont perpendiculaires aux lignes de niveau.

5. Calculer la hessienne de f.

   On a $\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -8+(-8x+8)^2 & (-8x+8)(-2y+4) \\ (-8x+8)(-2y+4) & -2+(-2y+4)^2 \end{pmatrix} e^{-4x^2-y^2+8x+4y-8}$.

6. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f et donner leur nature (minimum, maximum, point selle,...).
   On calcule la solution de $\nabla f(x,y) = (0,0)$. L'unique point critique est donc $(1,2)$. On a $\mathrm{Hess}_f(1,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Le critère de Sylvester donne immédiatement que f a un maximum local en $(1,2)$ (c'est en fait un maximum global).

7. On pose $D_1 = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 | X^2+Y^2 < 1\}$ et on donne $\iint_{D_1} \exp(-X^2-Y^2)dXdY = \pi(1-e^{-1})$. En déduire de la valeur de

   $$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

   où $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4(x-1)^2 + (y-2)^2 < 1\}$.

   Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x,y) = (2(x-1), (y-2)) = (X,Y)$. C'est un changement de variable affine tel que $\phi(D_2) = D_1$ et de jacobien $\det \phi(x,y) = 2$. Il suffit donc de remarquer que

   $$\iint_{D_1} \exp(-X^2-Y^2)dXdY = \iint_{D_2} 2f(x,y)dxdy$$

   et $\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$.

2 Probabilités

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

C'est du cours !

Exercice 7. Sachant que l'on a obtenu 12 fois «face» en 20 lancers d'une pièce équilibrée, calculer la probabilité que :

1. le premier lancer ait amené «face»

   Soit E_i ="le i-ème lancer donne «face»" et on note X_i l'indicatrice de E_i. Par définition on a $X_i \sim Bin(1, 1/2)$ et $X = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim Bin(20, 1/2)$ et $\mathbb{P}(X=k) = \binom{20}{k}\frac{1}{2^{20}}$. On cherche à calculer

   $$\mathbb{P}(X_1 = 1 | X = 12) = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X = 12\})}{\mathbb{P}(\{X = 12\})} =$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{X_1=1\}\cap\{X=12\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X_1=1\}\cap\left\{\sum_{i=2}^{20}X_i=11\right\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\{X_1=1\}\right)\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=2}^{20}X_i=11\right\}\right)\\ &= 1/2\binom{19}{11}1/2^{19}=1/2^{20}\binom{19}{11}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_1=1|X=12)=\frac{\binom{19}{11}}{\binom{20}{12}}=\frac{12}{20}.$$

2. au moins deux des cinq premiers lancers aient amené «face» (on ne demande pas de calculer la valeur numérique approchée, c'est le raisonnement qui sera évalué).

   Soit $B=$" au moins deux des cinq premiers lancers aient amené «face»". On a

$$B^c=\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=0\right\}\cup\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=1\right\}$$

   C'est une union d'évènements disjoints. On a de plus,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=0\right\}\cap X=12\right)=\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=0\right\}\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=6}^{20}X_i=12\right)=1/2^5\binom{15}{12}1/2^{15}.$$

   et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=1\right\}\cap X=12\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{5}X_i=1\right\}\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=6}^{20}X_i=11\right)\\ &= 5/2^5\binom{15}{11}1/2^{15}.\end{aligned}$$

   Pour conclure on a :

$$\mathbb{P}(B^c|X=12)=\frac{\binom{15}{12}1/2^{20}+5\binom{15}{11}1/2^{20}}{\binom{20}{12}1/2^{20}}=\frac{\binom{15}{12}+5\binom{15}{11}}{\binom{20}{12}}=16\frac{8!15!}{3!20!},$$

   et $\mathbb{P}(B|X=12)=1-16\frac{8!15!}{3!20!}\approx 0.9422$.