Université Montpellier 2 Année 2014-2015
HLMA 410

Examen - Session 1

1 Analyse

Exercice 1. (Question de cours) Soit $\Gamma = ([a,b],\phi)$ un arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu.

1. Qu'appelle-t-on circulation de V le long de Γ ?

   La circulation de V le long de Γ est le nombre réel $\int_\Gamma \langle V, d\phi\rangle \doteq \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t)\rangle\, dt$.

Soit $\theta : [c,d] \to [a,b]$ un C^1-difféomorphisme et $\psi = \phi\circ\theta$.

2. Quelle relation y a-t-il entre la circulation de V le long de $\Gamma' = ([c,d],\psi)$ et la circulation le long de Γ ?

   On remarque que θ est un difféomorphisme, c'est donc une fonction strictement croissance ou décroissante et on note ε le signe de θ' sur $[a,b]$. On a $\int_\Gamma \langle V, d\phi\rangle = \varepsilon \int_{\Gamma'} \langle V, d\psi\rangle$.

3. Le-démontrer.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \langle V, d\phi\rangle &= \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \langle V(\phi(\theta(\tau)), \phi'(\theta(\tau))\rangle\, |\theta'(\tau)|\, d\tau \\
&= \begin{cases} \int_c^d \langle V(\phi(\theta(\tau)), \phi'(\theta(\tau))\rangle\, \theta'(\tau)d\tau, \text{ si } \theta' > 0, \\ \int_d^c \langle V(\phi(\theta(\tau)), \phi'(\theta(\tau))\rangle\, \theta'(\tau)d\tau \text{ si } \theta' < 0 \end{cases} \\
&= \varepsilon \int_c^d \langle V(\phi(\theta(\tau)), \phi'(\theta(\tau))\theta'(\tau)\rangle\, d\tau \\
&= \varepsilon \int_c^d \langle V(\psi(\tau)), \psi'(\tau)\rangle\, d\tau. \quad \square
\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (2xy + y\cos(xy), x\cos(xy) + x^2 - 1) \end{aligned}$$

On admettra provisoirement l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction f. On cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$F(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x + \cos(xy)) = 0 \\ x\cos(xy) + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   Il faut alors considérer les deux cas suivants :
   - $y = 0$ qui donne $x^2 - x - 1 = 0$. On a alors deux solutions $A = (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ et $B = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0)$.
   - $\cos(xy) = -2x$ qui donne $-x^2 - 1 = 0$ qui n'a pas de solution.

   En résumé, il y a deux points critiques A et B.

2. Calculer la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   On a
$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - y^2\sin(xy) & 2x + \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ 2x + \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer la nature de la matrice Hessienne de f en chacun des points critiques (*i.e.* la forme quadratique associée est-elle définie ? est-elle positive ? est elle négative ?)

   On a $\mathrm{Hess}_f(A) = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi la forme quadratique
$$\begin{aligned} Q_A &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) &\mapsto (h_1,h_2)\,\mathrm{Hess}_f(A)(h_1,h_2)^t = 2\sqrt{5}h_1h_2 \end{aligned}$$
   n'est pas définie car $Q_A(0,1) = 0$, n'est pas positive, n'est pas négative car $Q_A(1,1) > 0 > Q(-1,1)$.
   On a $\mathrm{Hess}_f(B) = -\mathrm{Hess}_f(A)$ et les mêmes remarques s'appliquent.

4. Peut-on déduire, de la question précédente, la nature des points critiques de f (*i.e.* minimum, maximum, strict, global) ? Justifier !

   On ne peut pas appliquer les "conditions suffisantes d'ordre 2" pour caractériser les points car les Hessiennes ne sont pas définies. Mais on peut remarquer que $\det(\mathrm{Hess}_f(A)), \det(\mathrm{Hess}_f(B)) < 0$ et les points A, B sont donc des points selles.

5. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla f = F$.

   On intègre une première fois en x la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$:
$$\int (2xy + y\cos(xy))dx = yx^2 + \sin(xy) + \varphi_1(y)$$
   où $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Puis on intégre en y la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$:
$$\int (x\cos(xy) + x^2 - 1)dy = yx^2 + \sin(xy) - y + \varphi_2(x)$$
   où $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, la fonction $f(x,y) = \sin(xy) + x^2y - y$ convient.

6. Soit Γ la courbe paramétrée par $\phi : t \mapsto (t, t^2)$ pour $t \in [0,1]$. Calculer la circulation de F le long de Γ.

   Le champ de vecteur F est un champ de gradient. On a
$$\int_\Gamma \langle F, d\phi\rangle = f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = f(1,1) - f(0,0) = \sin(1).$$

Exercice 3.

1. Soient $\alpha, \beta, R > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E \subset R^2$ définie par l'équation
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < R^2.$$
   Indication : On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) \mapsto (\alpha u, \beta v)$.

   On pose $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < R^2\right\}$ et $\phi(u,v) = (\alpha u = x, \beta v = y)$. On a $\Delta = \phi^{-1}(D) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < R^2\right\}$. Comme le changement de variable ϕ est linéaire, le déterminant du Jacobien est constant et égal à $\alpha\beta > 0$. On a
$$\mathrm{Aire}(E) = \iint_D dxdy = \alpha\beta \iint_\Delta dudv = \alpha\beta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr = \alpha\beta\pi R^2.$$
   où on a utilisé un changement de variables en coordonnées polaires. Remarquer enfin que si $\alpha = \beta = 1$ on retrouve une formule bien connue.

2. Soit $H_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^3$ le solide défini par

$$H_{a,b,c} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -1 < z < 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

où a, b et c sont des réels strictement positifs. Calculer le volume de $H_{a,b,c}$.

On a $H_{a,b,c} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | -1 < z < 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\}$ et la formule d'intégration par tranche donne :

$$\mathrm{Vol}(H_{a,b,c}) = \iiint_{H_{a,b,c}} dxdydz = \int_{-1}^{2} \mathrm{Aire}(D_z) dz$$

où $D_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 + \frac{z^2}{c^2}. \right\}$ et $\mathrm{Vol}(D_z) = ab\pi(1 + \frac{z^2}{c^2})$ d'après la question 1. On a alors

$$\mathrm{Vol}(H_{a,b,c}) = \pi ab \int_{-1}^{2} \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 3ab\pi \left(1 + \frac{1}{c^2}\right)$$

3. On suppose que $a = b = 1$ et $c = 2$. Calculer l'intégrale

$$I = \iiint_{H_{1,1,2}} z e^{x^2+y^2} dxdydz.$$

Faire un changement de coordonnées cylindrique :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} \left(2\pi \int_{0}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} e^{r^2} r dr \right) z dz \\ &= \pi \int_{-1}^{2} \left[e^{r^2} \right]_{0}^{\sqrt{1+\frac{z^2}{4}}} z dz \\ &= \pi \left[2e^{1+\frac{z^2}{4}} - \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^{2} \\ &= \pi (2e^2 - 2e^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

2 Probabilités

Exercice 4. (Dominos) Un domino se compose de deux cases, portant chacune un numéro n entier, $0 \leq n \leq 6$. Un jeu est formé de tous les dominos différents possibles.

1. Combien y a-t-il de domino dans un jeu ?

   Il y a $7(7+1)/2 = 28$ dominos.

2. On choisit deux dominos au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient compatibles (*i.e.* possèdent un numéro commun) ?

   On a Ω = "ensemble à 2 éléments parmi 28" muni de la probabilité uniforme. Le nombre de paires compatibles est $7\binom{7}{2}$. On a alors :

$$\mathbb{P}(\text{“2 dominos compatibles”}) = 7\frac{\binom{7}{2}}{\binom{28}{2}} = \frac{7}{18}.$$

Exercice 5. (Jeans) L'enseigne « Massimo Dutti » produit et vend 4×10^4 jeans par mois. Le coût de fabrication est de 100 euros par jean. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses jeans fabriqués. Le test est positif dans 90% des cas et un jean reconnu conforme peut alors être vendu à 200 euros. Si le test est en revanche négatif, le jean est bradé au prix de 50 euros.

1. On note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de jeans conformes parmi les 4×10^4 produits. Calculer l'espérance et la variance de Y.

   On a $Y \sim Bin(n, p)$ où $n = 4 \times 10^4$ et $p = 0.9$. Ce qui donne $\mathbb{E}(Y) = np = 3.6 \times 10^4$ et $Var(Y) = np(1-p) = 3.6 \times 10^3$.

2. On note Z la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance et la variance de Z.

   Remarquer que les recettes sont aléatoires, tandis que les dépenses sont déterministes. On a $Z = 200Y + 50(n-Y) - 100n = 150Y - 50n$. Utiliser la linéarité de l'espérance :

   $$\mathbb{E}(Z) = 140\mathbb{E}(Y) - 50n = 150np - 10n = n(135 - 50) = 3.4 \times 10^6.$$

   Utiliser les règles de calculs de la variance :

   $\mathrm{Var}(Z) = 150^2 \, \mathrm{Var}(Y) = 15^2 \times 10^2 \times 4 \times 10^4 \times 0.9 \times 0.1 = 225 \times 4 \times 10^5 \times 0.9 = 900 \times 0.9 \times 10^5 = 8.1 \times 10^7.$