

Fonctions de plusieurs variables

Benjamin Charlier & Matthieu Hillairet

21 janvier 2021

Table des matières

4	Représentation	5
4.1	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	5
4.1.1	Rappels de bases et définitions	5
4.1.2	Graphe	6
4.1.3	Représentation en couleur	7
4.1.4	Ensembles de niveau	8
4.1.5	Les fonctions partielles	10
4.2	Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles	11
4.2.1	Définition	11
4.2.2	Représentation des champs de vecteurs	11
5	Limite, continuité et différentiabilité	13
5.1	Limites de fonctions	13
5.1.1	Définition	13
5.1.2	Calculer des limites en pratique	13
5.2	Fonctions continues	16
5.2.1	Définition et propriétés	16
5.2.2	Opérations sur les fonctions continues	17
5.2.3	Fonctions partielles	17
5.3	Dérivées partielles	18
5.4	Fonctions différentiables	19
5.4.1	Définition et propriétés	19
5.4.2	Plan tangent	22
5.4.3	Vecteur gradient	23
5.4.4	Matrice jacobienne	24
6	Fonctions de classe \mathcal{C}^1	27
6.1	Définition et propriétés	27
6.1.1	Définition	27
6.1.2	Relation entre les fonctions \mathcal{C}^1 et les fonctions différentiables	28
6.2	Composition des fonctions de classe \mathcal{C}^1	29
6.3	Difféomorphismes	31
6.4	Fonctions implicites	33
7	Dérivées d'ordres supérieurs et études des extrema	37
7.1	Dérivées partielles d'ordre supérieur	37
7.1.1	Définitions et propriétés	37
7.1.2	Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	39
7.1.3	Formules de Taylor et matrice hessienne	40

7.2	Étude des extrema locaux	41
7.2.1	Définitions	41
7.2.2	Condition nécessaire d'ordre 1	42
7.2.3	Condition suffisante d'ordre 2	43
7.2.4	Fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	44
8	Intégrales Multiples	47
8.1	Détour par les intégrales simples	47
8.1.1	Construction de l'intégrale de Riemann	47
8.1.2	Intégrales à paramètres	48
8.2	Intégrales doubles	49
8.2.1	Intégrales doubles sur un pavé	50
8.2.2	Intégrales doubles sur une partie élémentaire	52
8.2.3	Intégrales doubles sur une partie simple	54
8.2.4	Propriétés	55
8.3	Intégrales triples	56
8.3.1	Intégrales triples sur un pavé	56
8.3.2	Formule de sommation par piles	56
8.3.3	Formule de sommation par tranches	57
8.4	Formule de changement de variables	58
8.4.1	Cas des intégrales doubles	58
8.4.2	Cas des intégrales triples	60
8.5	Circulation d'un champ de vecteurs	61
8.5.1	Définitions et propriétés	62
8.5.2	Champs de Gradient	63
8.5.3	Formule de Green-Riemann (cas $n = 2$)	64

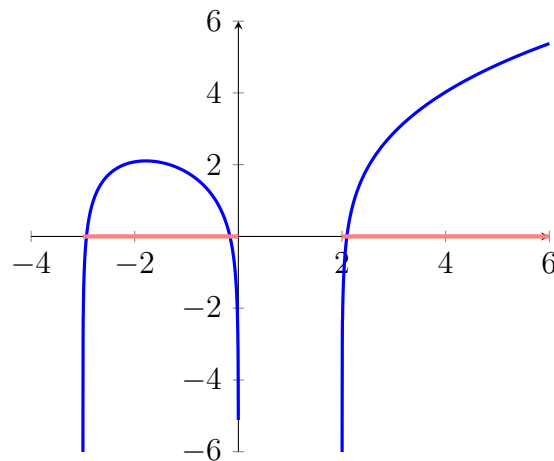
Chapitre 4

Réprésentation des fonctions de plusieurs variables

4.1 Représentation des fonctions de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 à valeurs réelles

4.1.1 Rappels de bases et définitions

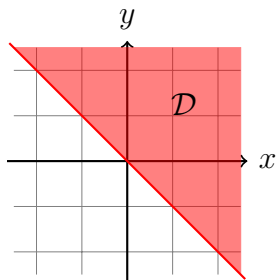
Exemple 4.1.1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \log(x(x+3)(x-2))$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}(f) =]-3, 0[\cup]2, +\infty[$ (en rouge sur le graphique) et pour ensemble image $Im(f) = \mathbb{R}$:



Définition 5.1.1. Une fonction f de plusieurs variables et à valeurs réelles (aussi appelé **champ scalaire**) est une fonction définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et à valeurs dans \mathbb{R} . Elle fait correspondre à tout point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathcal{D} un unique point $y = f(x)$ de \mathbb{R} .

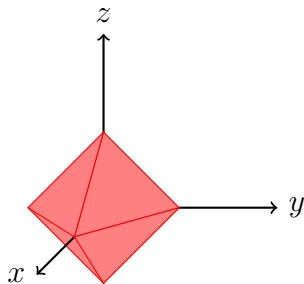
Dans la suite de ce chapitre nous donnerons principalement des exemples où $n = 2$ et $n = 3$.

Exemple 4.1.2. Le domaine de définition la fonction $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x+y \geq 0\}$. C'est la partie du plan suivante :



Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

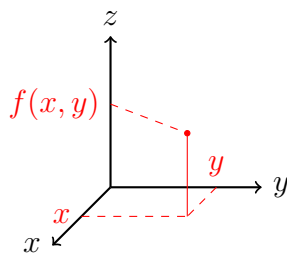
Exemple 4.1.3. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y, z) = \ln(1 - |x| - |y| - |z|)$ est l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| + |y| + |z| < 1\}$ qui est représenté ci dessous :



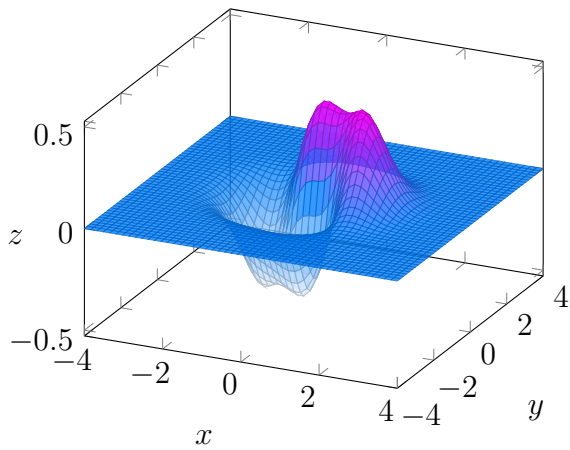
4.1.2 Graphe

Dans le cas des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{D}\}$ est un sous ensemble de \mathbb{R}^3 . Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière on peut représenter ce graphe comme une surface (on peut penser à un “drap qui flotte”) dans \mathbb{R}^3 .

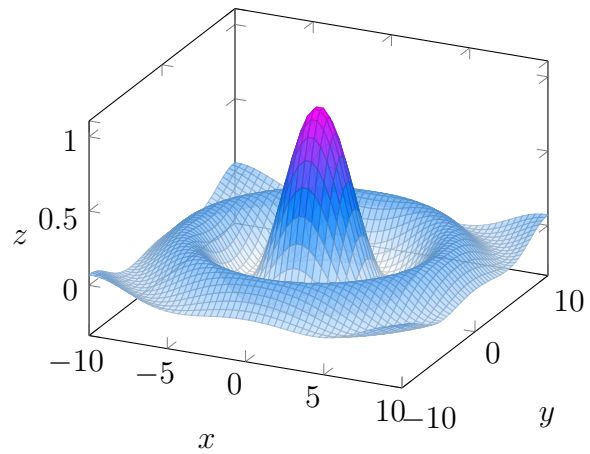
Les axes Ox et Oy (qui forment le plus souvent le plan horizontal dans les représentations graphiques) sont réservés aux variables x et y tandis que l'axe Oz (le plus souvent l'axe vertical) représente la valeur de $z = f(x, y)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ on a le point $(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{G}(f)$.



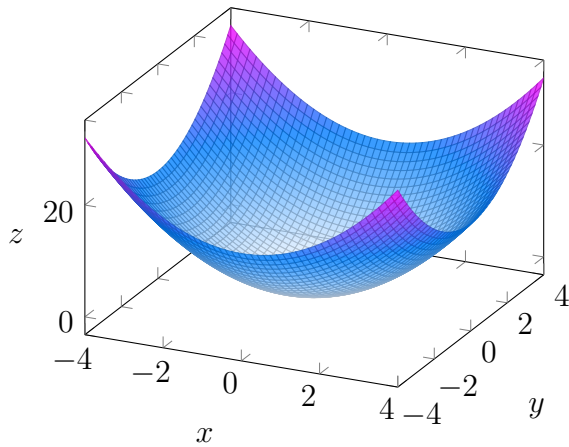
Exemple 4.1.4. Voici quelques exemples de graphes de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Les couleurs ne servent qu'à améliorer la lisibilité.



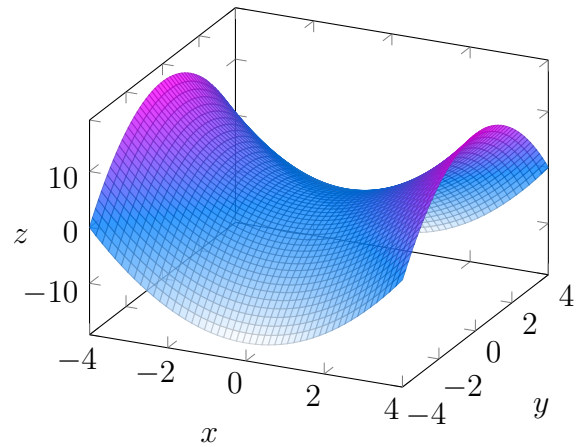
$$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$$



$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$$



Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$

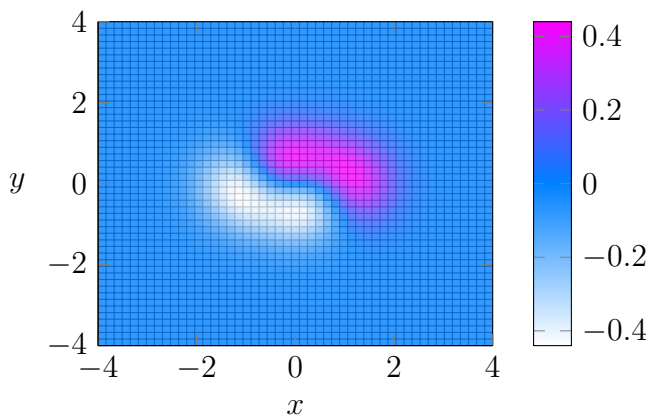


Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

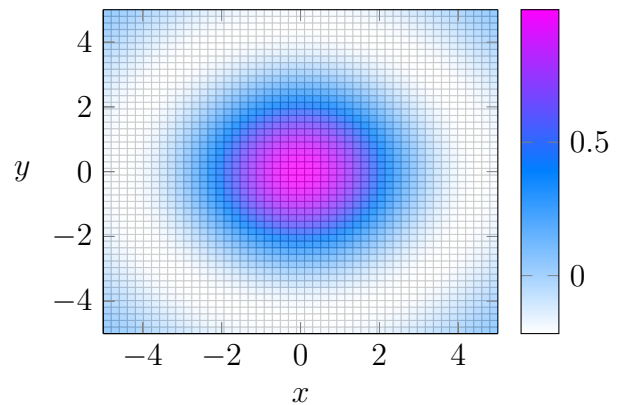
4.1.3 Représentation en couleur

Une image peut être modélisée par une fonction de deux variables à valeurs réelles et définie sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$.

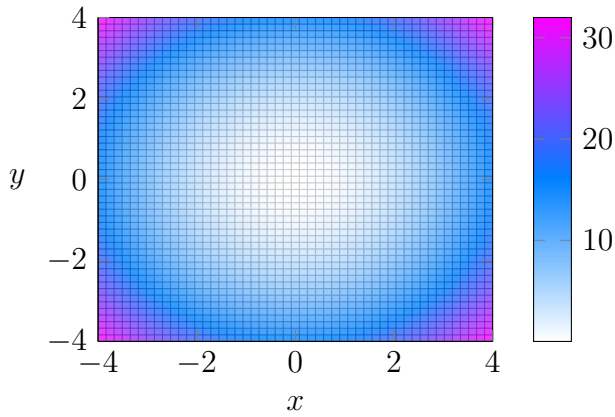
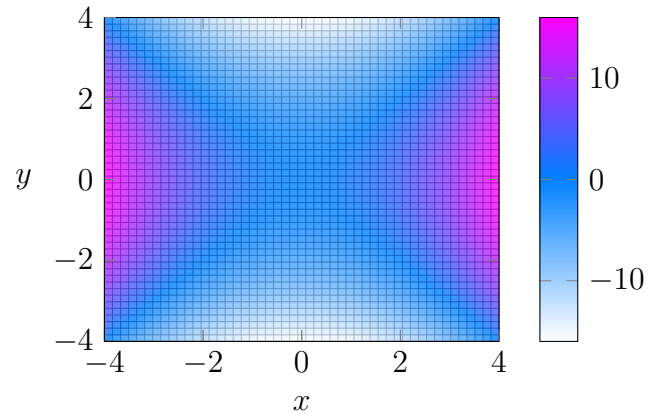
Exemple 4.1.5. Voici les fonctions du paragraphe précédent. Les couleurs codent l'intensité du signal comme l'indique la présence d'une échelle de couleurs à coté de chaque graphique.



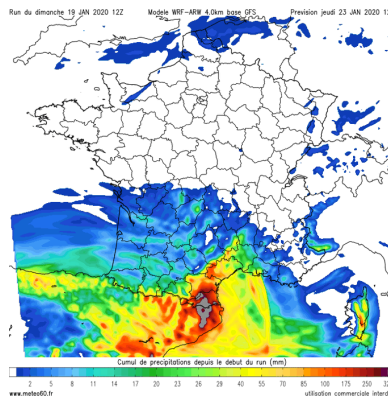
$$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$$



$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$ Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

Exemple 4.1.6. Un exemple issu des prévisions météo donnant les cumuls de pluie prévu par un modèle :

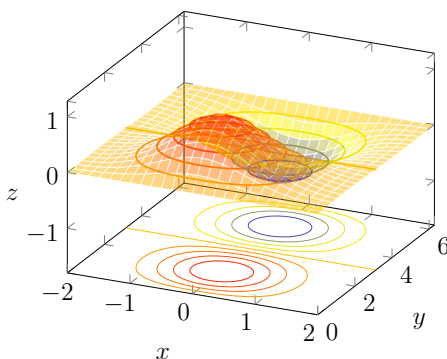
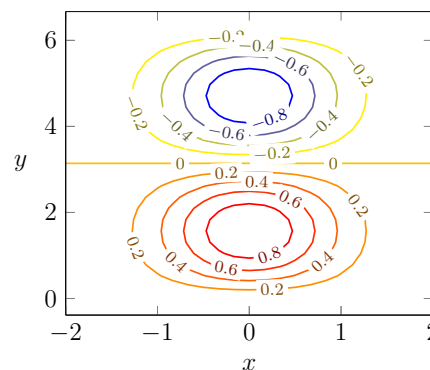


4.1.4 Ensembles de niveau

Définition 5.1.2. Étant donnée une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, l'**ensemble de niveau** $\lambda \in \text{Im}(f)$ est

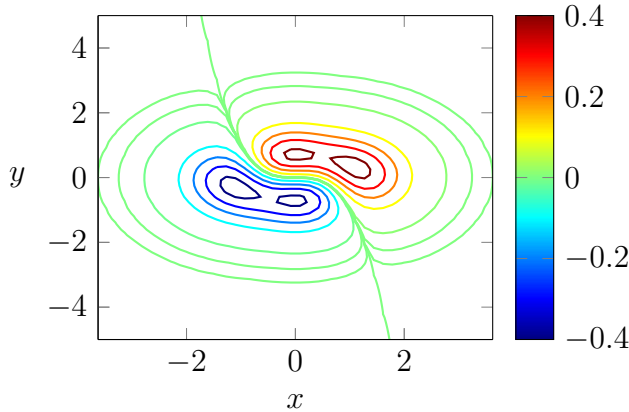
$$L_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \lambda\}.$$

Dans le cas des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on parle de **lignes de niveau**. On peut tracer les lignes de niveau en projetant sur le plan horizontal $z = 0$ la courbe donnée par l'intersection du plan horizontal de hauteur λ (*i.e.* le plan d'équation $z = \lambda$) et le graphe de la fonction f .

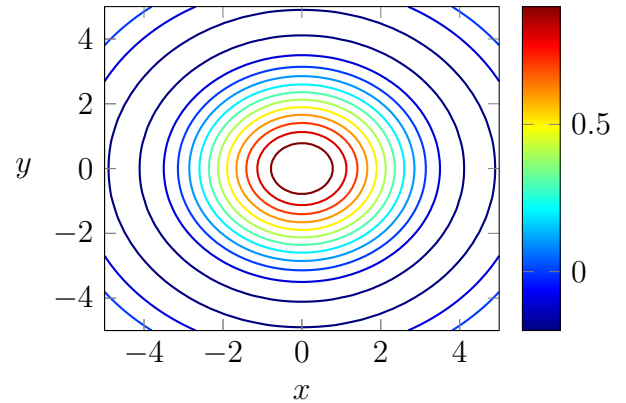
Graphe de $f(x, y) = \sin(y)e^{-x^2}$ Lignes de niveau de $f(x, y) = \sin(y)e^{-x^2}$

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser les différents niveaux du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. En bref, les courbes de niveau d'une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f dans le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.

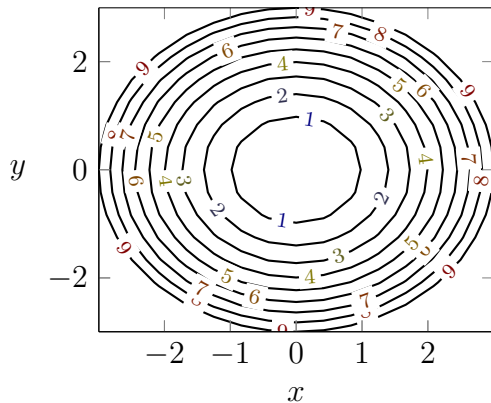
Exemple 4.1.7. Voici les lignes de niveau des fonctions du paragraphe précédent représentées en couleur ou avec des labels.



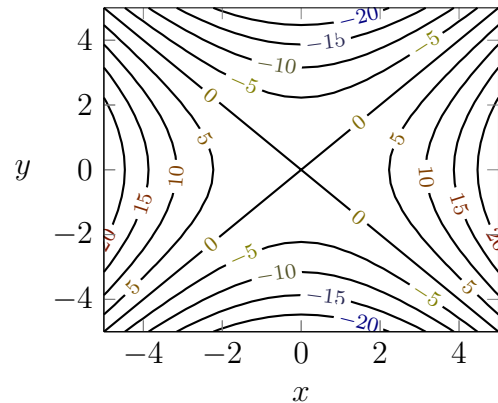
$$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$$



$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

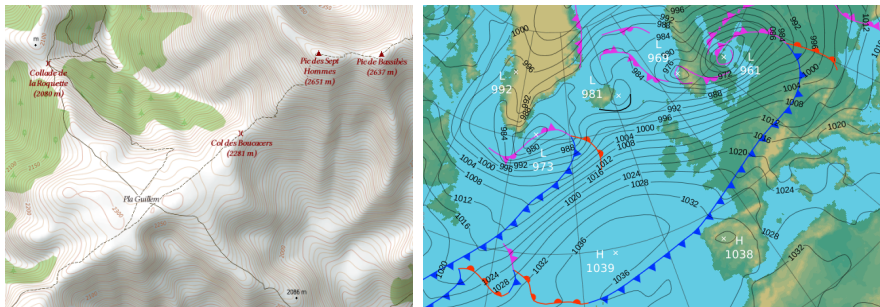


Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$



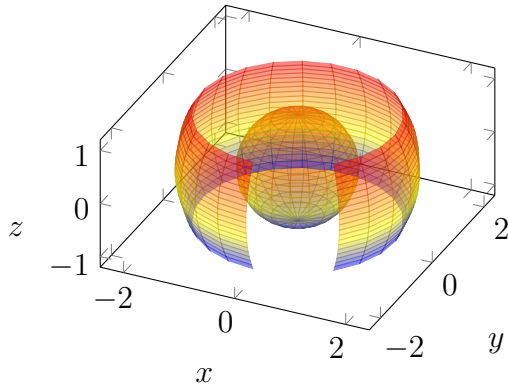
Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

Quelques exemples de la vie courante :

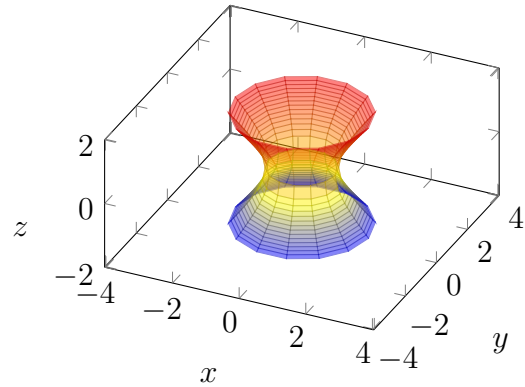


Pour les fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , les ensembles de niveau sont appelés **surfaces de niveau**. Ces surfaces sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^3 et cela permet de représenter la fonction alors qu'il serait délicat de représenter son graphe, qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^4 .

Exemple 4.1.8. Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale, on parle de surfaces algébriques. En voici deux exemples classiques :



Sphère : surfaces de niveau 1 et 4 (tronquée) de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



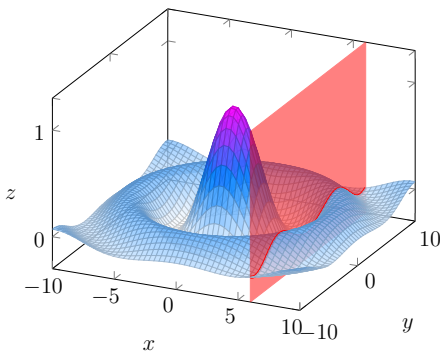
Paraboloïde : Surface de niveau 1 de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

4.1.5 Les fonctions partielles

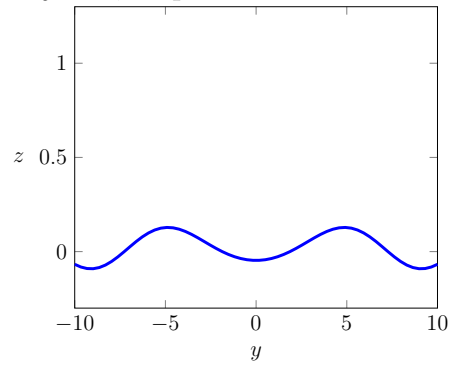
Définition 5.1.3. Étant donné une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur tout le plan et un nombre $a \in \mathbb{R}$, les fonctions partielles de f sont $f_a^1, f_a^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f_a^1(t) = f(a, t) \quad \text{et} \quad f_a^2(t) = f(t, a).$$

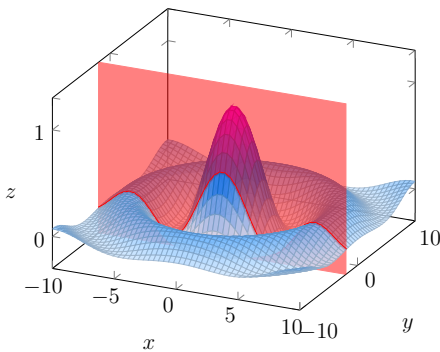
Le graphe des fonctions partielles peut être déduit du graphe \mathcal{G}_f de f en prenant l'intersection entre \mathcal{G}_f et les plans (verticaux) d'équation $x = a$ et $y = a$, respectivement.



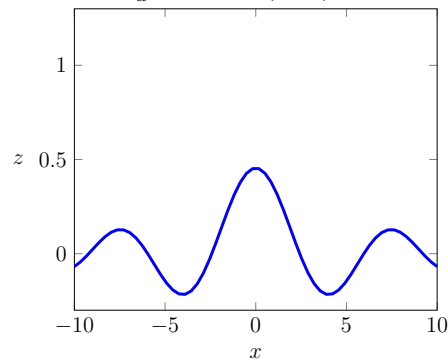
Graphe de $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$



Graphe de $f_a^2 : y \mapsto f(a, y)$ où $a = 6$



Graphe de $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$



Graphe de $f_b^1 : x \mapsto f(x, b)$ où $b = -2$

4.2 Représentation des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles

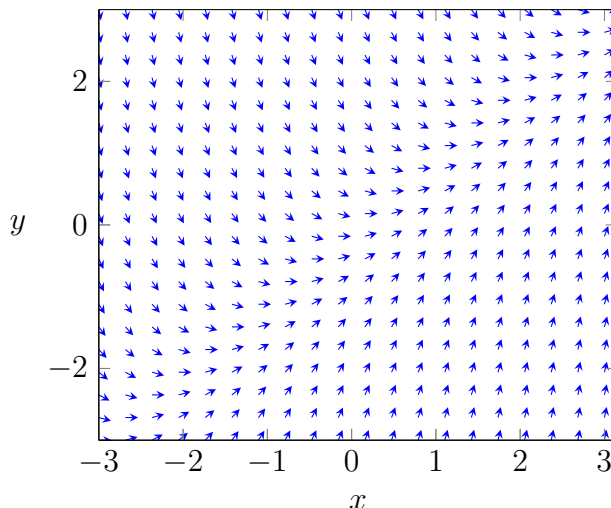
4.2.1 Définition

Définition 4.2.1. Une fonction f de plusieurs variables à valeurs vectorielles (aussi appelée **champ de vecteurs**) est une fonction définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et à valeurs dans \mathbb{R}^m ($m \geq 1$). Dans ce cas, il existe m fonctions $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de \mathcal{D} on ait $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$.

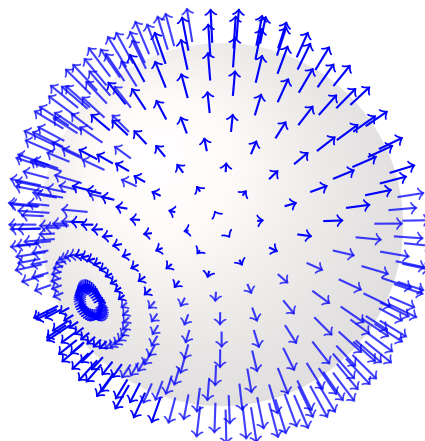
4.2.2 Représentation des champs de vecteurs

Lorsque $m = n = 2$ ou 3 , on peut représenter l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par une collection de flèches : en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est représenté un vecteur $f(x) \in \mathbb{R}^n$. La terminologie “champ de vecteurs” est donc appropriée.

Exemple 4.2.1. Le champ de vecteurs $f(x, y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}} (1, x-y)$ défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$:



Exemple 4.2.2. Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini sur $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On a $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En chaque point du domaine de définition on a donc un vecteur (“une flèche”) représenté :



Chapitre 5

Limite, continuité et différentiabilité des fonctions de plusieurs variables

5.1 Limites de fonctions

Soit E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.

5.1.1 Définition

Définition 5.1.1 (Limite de fonction). Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à \mathcal{D} (i.e. $a \in \bar{\mathcal{D}}$). On dit que f admet une limite $\ell \in F$ en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|' < \varepsilon$.

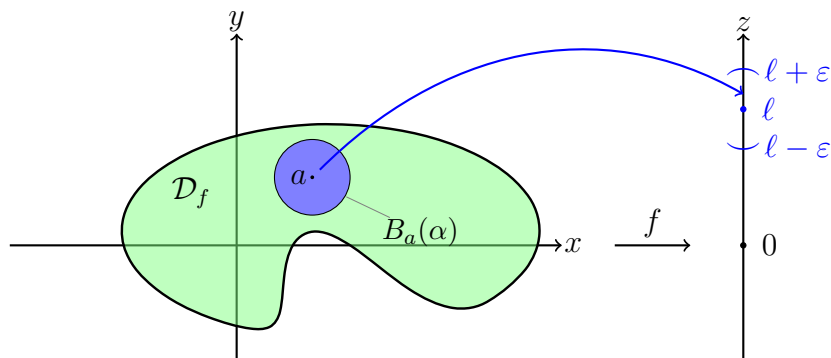


Illustration de la limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en a .

Remarque 1. 1. La définition précédente ne dépend pas du choix des normes sur E et F .
2. La limite d'une fonction est unique.

Définition 5.1.2 Notation de Landau. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés réels et $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage de $a \in E$ (c'est à dire au moins sur une boule ouverte $B_r(a) \subset E$) et sauf peut être en a . On dit que $f = o(\|x - a\|^n)$ au voisinage de a si $\frac{\|f(x)\|'}{\|x - a\|^n} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$.

5.1.2 Calculer des limites en pratique

Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point

Proposition 5.1.1 (Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à \mathcal{D} (i.e. $a \in \bar{\mathcal{D}}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f a pour limite ℓ en a
2. pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{D} qui converge vers a , la suite $f(u_k)$ tend vers ℓ .

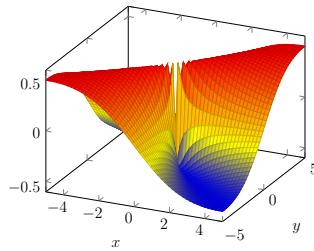
Démonstration.



□

Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite, il suffit de trouver deux suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de même limite $a \in \mathcal{D}$ et telles que $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ possèdent des limites différentes.

Exemple 5.1.1. Étude de la limite en 0 de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.



Montrer qu'une fonction admet une limite en un point

Proposition 5.1.2. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow F$, $a \in \bar{\mathcal{D}}$ et $\ell \in F$. S'il existe une fonction $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$ telle que pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$\|f(x) - \ell\|' \leq s(\|x - a\|)$$

alors on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Démonstration.

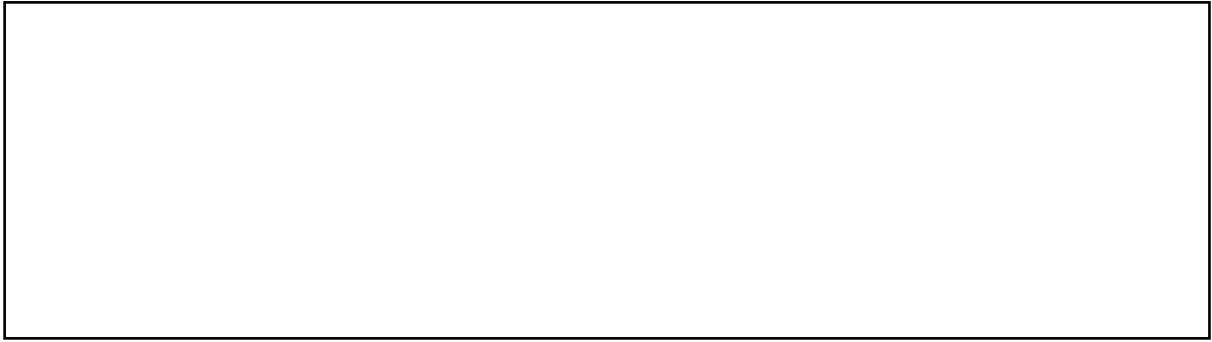


□

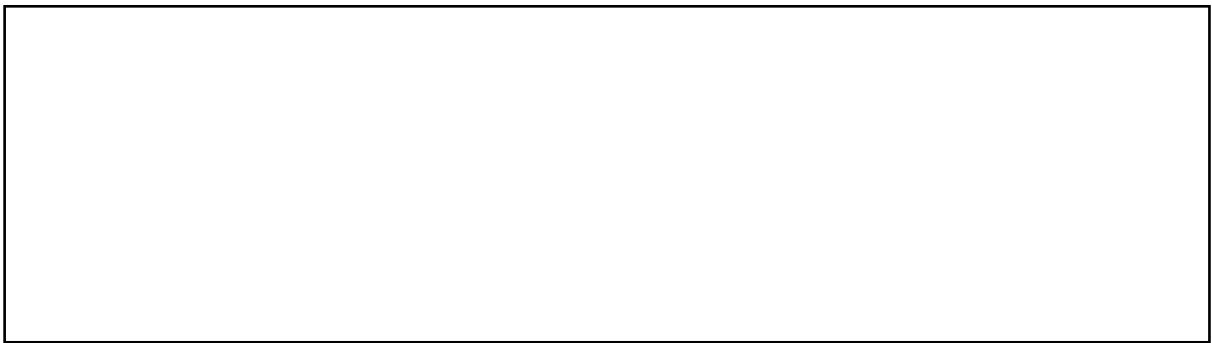
Remarque 2. Pour les fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cette dernière proposition suggère de passer en coordonnées polaires comme dans l'exemple ci dessous.

Exemple 5.1.2. Calcul de limite en pratique : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrons de plusieurs manières que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

1.



2.



5.2 Fonctions continues

Soient E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement. Dans la suite on note \mathcal{D} un domaine de E et \mathcal{U} un ouvert de E .

5.2.1 Définition et propriétés

Définition 5.2.1. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est **continue** en a si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}}} f(x) = f(a).$$

La continuité est une notion **locale**. On dit que f est continue sur \mathcal{D} si f est continue en tout point de \mathcal{D} .

Exemple 5.2.1. Si $E = \mathbb{R}^n$ les fonctions polynômiales sont continues. En particulier si $E = \mathbb{R}^2$, $s(x, y) = x + y$ et $p(x, y) = xy$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Définition - Proposition 5.2.1. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ et $a \in \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, la fonction \tilde{f} définie sur $\mathcal{D} \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(a) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ est l'unique fonction continue en a dont la restriction à \mathcal{D} est f . On appelle \tilde{f} le **prolongement par continuité** de f à $\{a\}$.

On peut faire le lien entre topologie et continuité :

Théorème 5.2.1. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction continue :

- (i) si $\mathcal{O} \subset F$ un ensemble ouvert, alors $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset E$ est un ouvert.
- (ii) si $\mathcal{F} \subset F$ un ensemble fermé, alors $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset E$ est un fermé.

(iii) si $K \subset E$ un ensemble compact, alors $f(K) \subset F$ est une partie compacte de F .

Démonstration. Admis dans ce cours. □

Remarque 3. Si $F = \mathbb{R}$, la propriété (iii) implique que f est bornée (et atteint ses bornes) sur K .

5.2.2 Opérations sur les fonctions continues

La continuité est stable par les opérations algébriques usuelles :

Proposition 5.2.1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés et $\mathcal{D} \subset E$:

- (i) Addition : $f, g : \mathcal{D} \rightarrow F$ continues en $a \in \mathcal{D}$ alors $f + g$ est continue en a
- (ii) Multiplication par un scalaire : $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ continue en a alors λf est continue en a .
- (iii) Multiplication (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en a alors fg est continue en a .
- (iv) Inverse (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .
- (v) Composition : $f : \mathcal{D} \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f est continue en $a \in \mathcal{D}$ et g est continue en $f(a) \in F$, alors $g \circ f : \mathcal{D} \rightarrow G$ est continue en a .

Démonstration. □

Exemple 5.2.2.



5.2.3 Fonctions partielles

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $a \in E$ on note (a_1, \dots, a_n) les coordonnées de a dans la base \mathcal{B} .

Définition 5.2.2. Soit $f : E \rightarrow F$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. On définit la i -ème application partielle de f en a par

$$f_a^i : \mathbb{R} \rightarrow F$$

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Proposition 5.2.2. Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ chacune de ses applications partielles f_a^i est continue en $a_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, \dots, n$.

Remarque 4. La réciproque est fautive : la fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

5.3 Dérivées partielles

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace vectoriel normé E .

Définition 5.3.1 (Dérivée suivant un vecteur). Soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$ avec $v \neq 0$. On dit que f admet une dérivée en a suivant la direction v si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas on note :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Remarque 5. Dans le cas où $F = \mathbb{R}^p$, on a $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$. Et la limite dans la définition précédente est égale à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} f_1(a + tv) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a + tv) - f_p(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Définition 5.3.2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Étant donné $a \in \mathcal{U}$, la i -ème **dérivée partielle** de f en a est, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur e_i avec $i = 1, \dots, n$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et on a

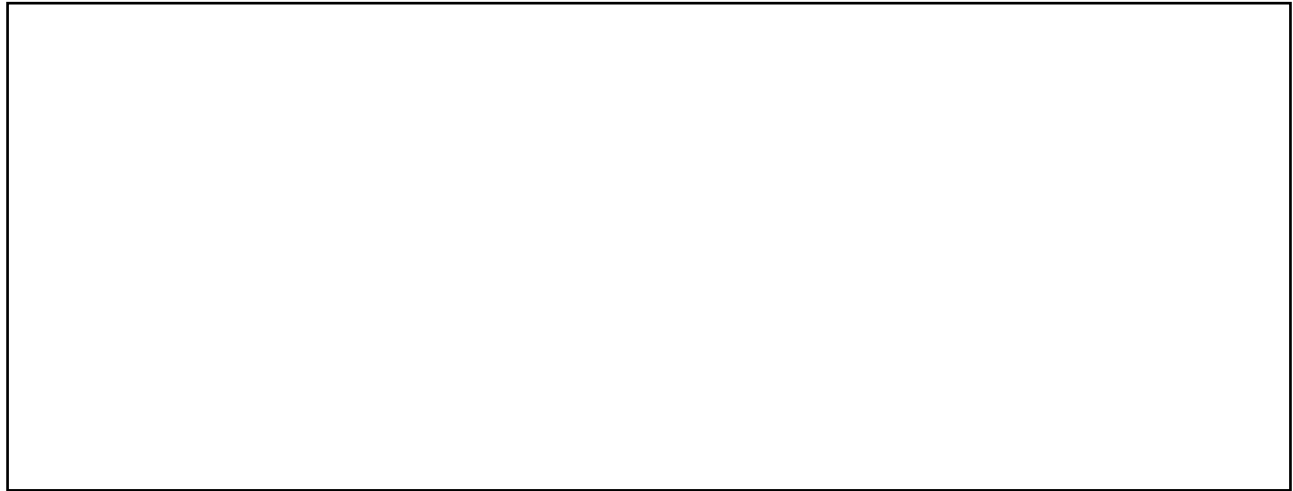
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &\doteq D_{e_i} f(a) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}. \end{aligned}$$

Si, de plus, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe en tout point $a \in \mathcal{U}$, on définit la i -ème **fonction dérivée partielle** de f par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} &\rightarrow F \\ a &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \end{aligned}$$

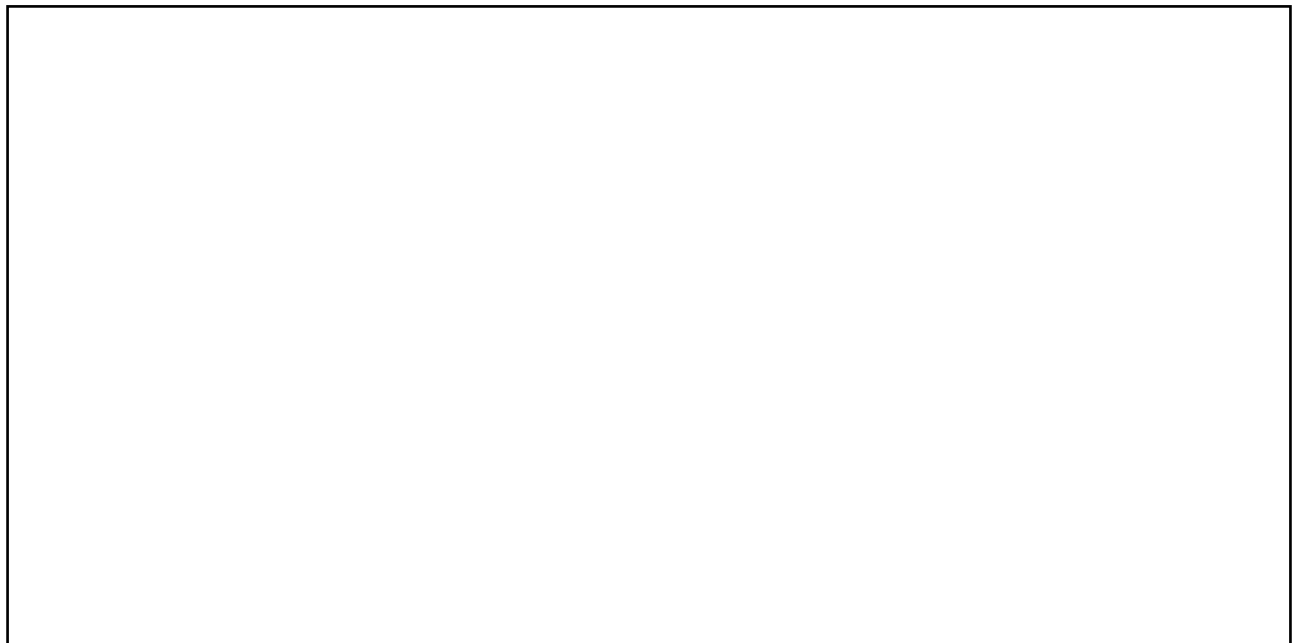
Exemple 5.3.1. Calcul des dérivées partielles de la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



5.4 Fonctions différentiables

Exemple 5.4.1. Retour sur les fonctions réelles dérivables.



5.4.1 Définition et propriétés

Soit E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.

Définition 5.4.1 (Différentiabilité en a). Soit $f : E \rightarrow F$ définie sur un ouvert \mathcal{U} et $a \in \mathcal{U}$.

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $\varphi_a : E \rightarrow F$ telle que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi_a(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \neq 0_E]{h \rightarrow 0_E} 0$$

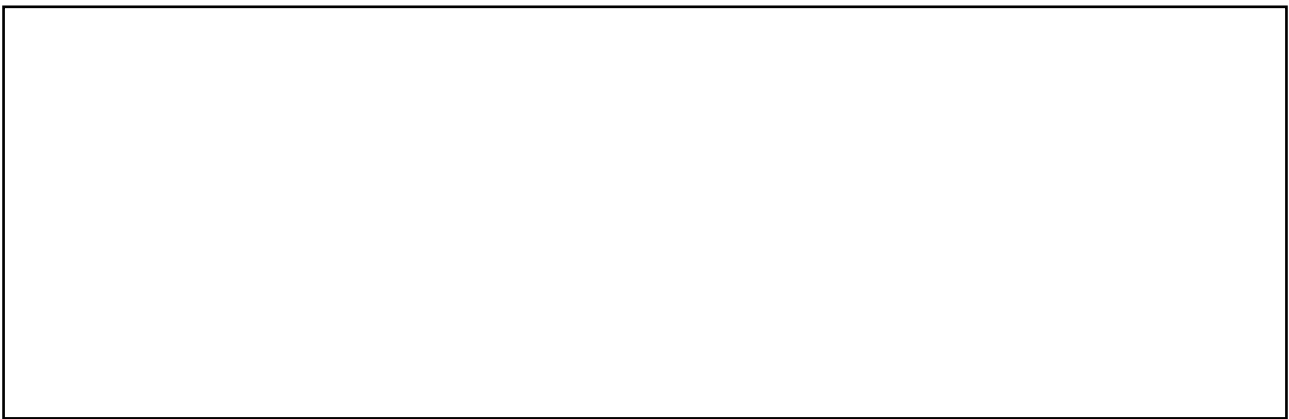
Avec la notation de Landau cela s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi_a(h) + o(\|h\|), \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

Contrairement aux dérivées partielles ou directionnelles, la notion de différentiabilité implique la continuité :

Proposition 5.4.1. Si f est différentiable en a alors f est continue en a .

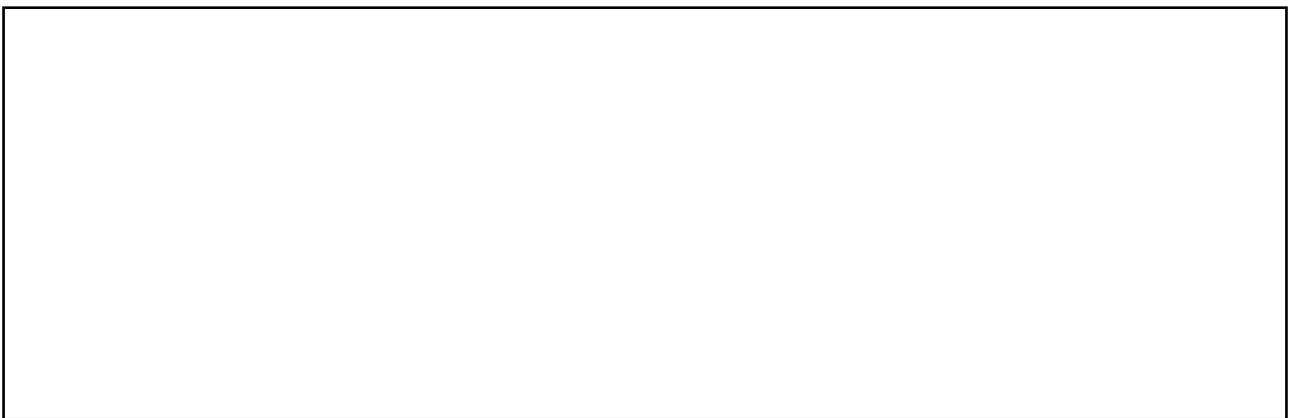
Démonstration.



□

Proposition 5.4.2. Si f est différentiable en a , f admet en a une dérivée suivant tout vecteur $v \neq 0$. De plus, cette dérivée vaut $\varphi_a(v)$.

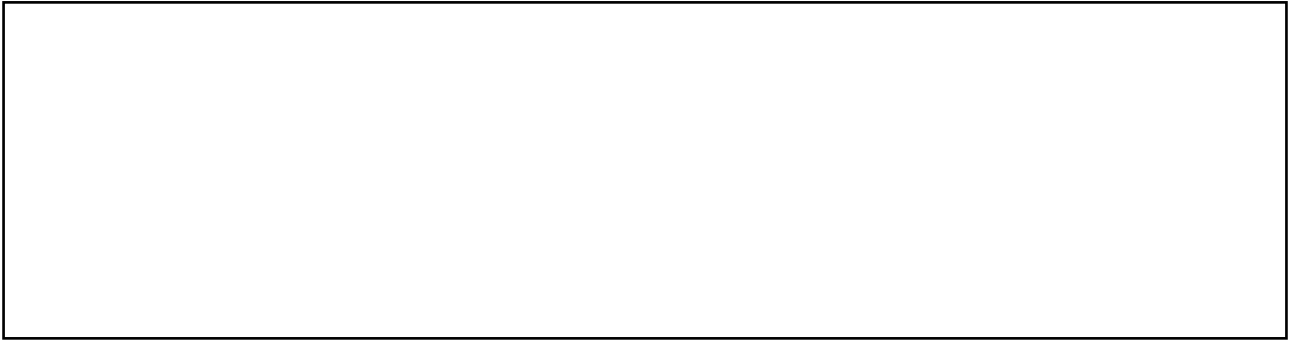
Démonstration.



□

Définition - Proposition 5.4.1. Si f est différentiable en a , l'application linéaire $\varphi_a : E \rightarrow F$ est définie de manière unique. Elle est appelée **différentielle** de f en a et est notée $d_a f$.

Démonstration.



□

Proposition 5.4.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in E$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application différentiable en $a \in E$, alors $d_a f(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$

Démonstration.



□

Notation : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i = 1, \dots, n$, on note $dx_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire duale de e_i définie par

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $dx_i(h) = h_i$ (en d'autres termes dx_i renvoie la i -ème coordonnée de $h \in E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$). On note alors

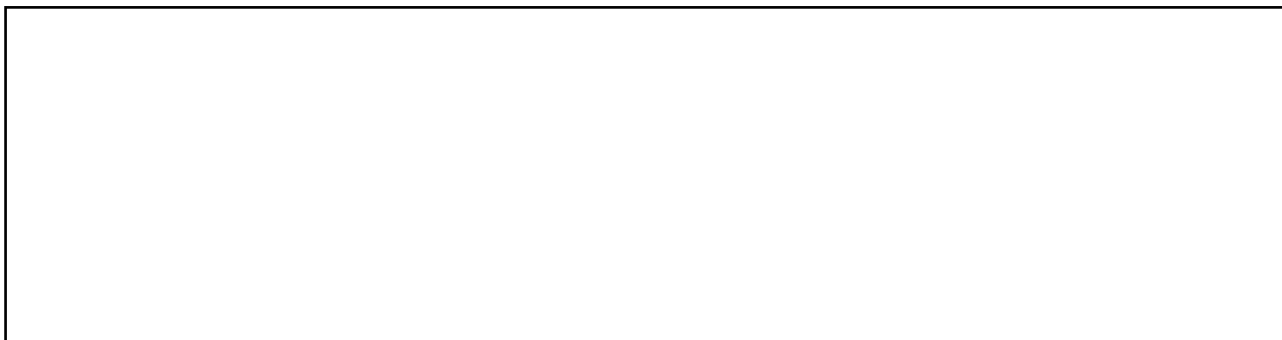
$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n$$

Proposition 5.4.4 (Cas de $E = \mathbb{R}$). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow F$. La fonction f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et alors $d_a f$ est définie par :

$$d_a f(h) = hf'(a)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Démonstration.



□

Remarque 6. Si $F = \mathbb{R}^n$ on a alors $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ et $f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Proposition 5.4.5 (Linéarité de la différentielle). Soient $f, g : E \rightarrow F$ différentiables en $a \in E$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a avec

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

Démonstration.



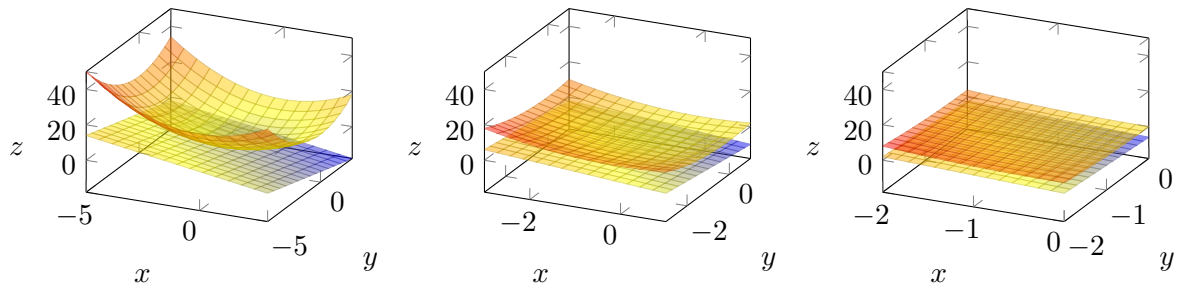
□

5.4.2 Plan tangent

Proposition 5.4.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Le plan tangent à \mathcal{G}_f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation :

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Remarque 7. L'application L est bien définie sur \mathbb{R}^2 tout entier.



Graphes de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ et le plan tangent au point $(-1, -1, f(-1, -1))$. On représente trois niveaux de “zoom” vers ce point.

5.4.3 Vecteur gradient

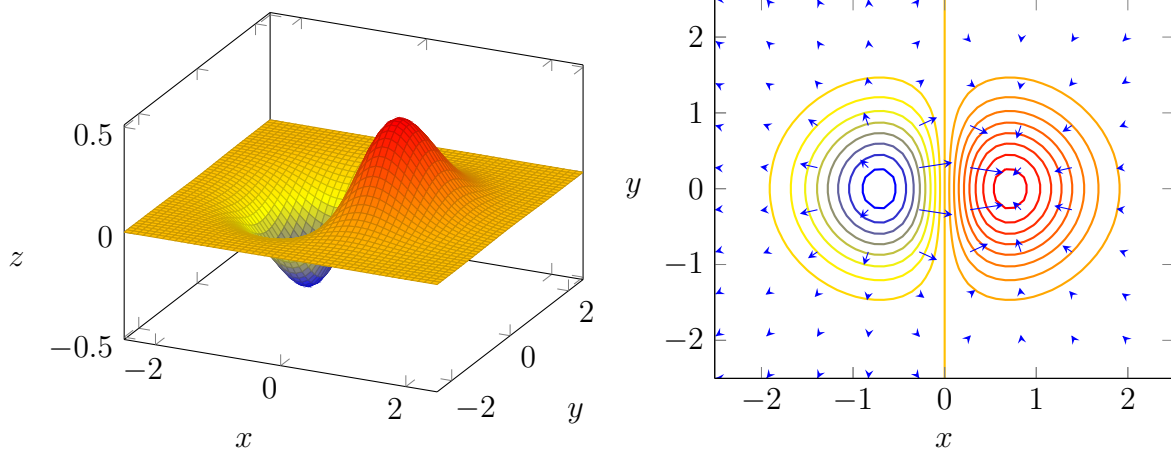
Dans cette section, on considère des applications définies sur \mathbb{R}^n et à valeurs réelles. On note aussi \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 5.4.2. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle **gradient** de $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

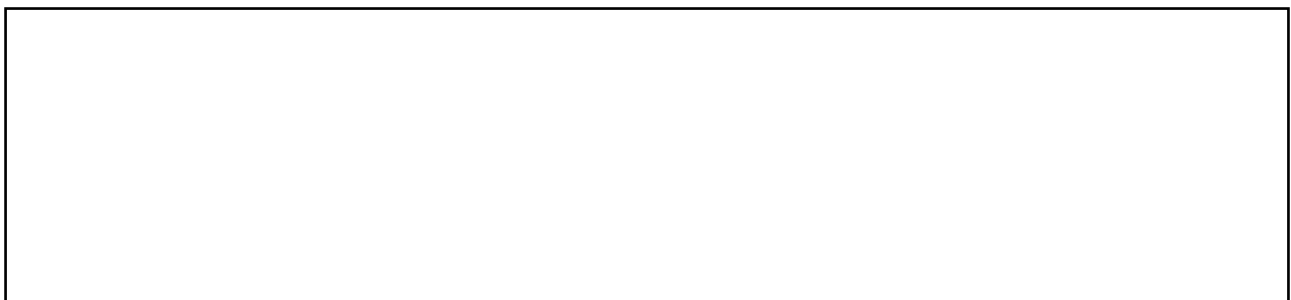
Proposition 5.4.7. Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient est l’unique vecteur de \mathbb{R}^n tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$



Graphes, lignes de niveau et gradient de la fonction $(x, y) \mapsto xe^{-x^2-y^2}$.

Remarque 8.



5.4.4 Matrice jacobienne

Définition 5.4.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . On suppose f différentiable en $a \in E$. La matrice de l'application linéaire $d_a f : E \rightarrow F$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est appelée **matrice jacobienne** de f en a . On la note $\text{Jac}_f(a)$.

Remarque 9. On a donc $\text{Jac}_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(d_a f)$

Proposition 5.4.8. On a avec les notations précédentes :

$$\text{Jac}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

où $n = \dim E$ et $p = \dim F$.

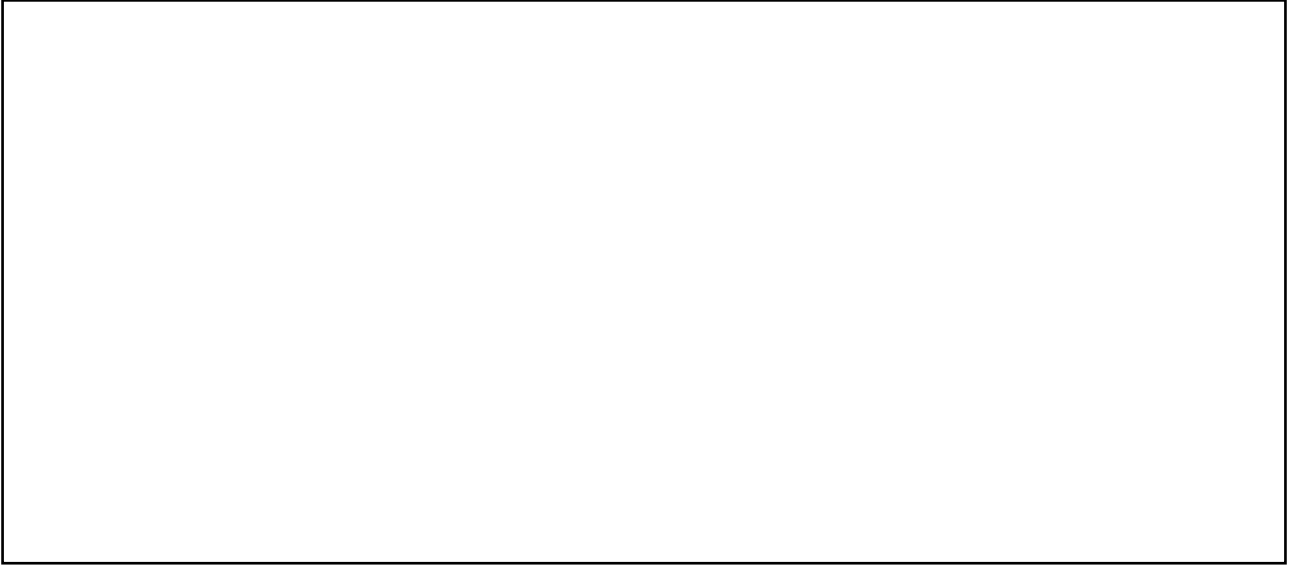
Démonstration.

□

Définition 5.4.4. On suppose que $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Le déterminant de la matrice $\text{Jac}_f(a)$ est alors appelé **jacobien** de f en a .

Notation : On note parfois $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det(\text{Jac}_f(a))$.

Exemple 5.4.2. Changement de coordonnées polaires : On a $E = F = \mathbb{R}^2$ et on pose $\psi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calcul du jacobien.



Chapitre 6

Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Soient E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.



6.1 Définition et propriétés

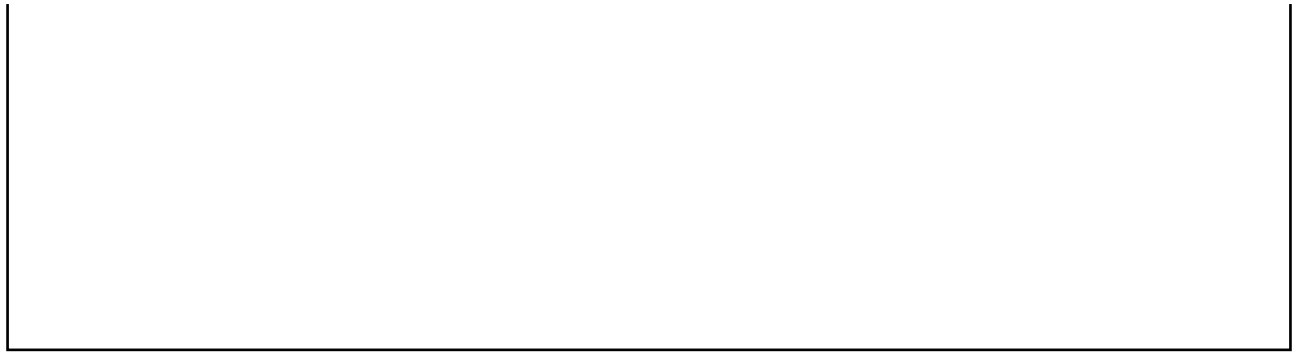
6.1.1 Définition

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un \mathbb{R} espace vectoriel E de dimension finie.

Définition 6.1.1 (Fonction de classe \mathcal{C}^1). Une fonction $\mathcal{U} \rightarrow F$ est dite de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, n$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est bien définie et est continue sur \mathcal{U} .

Exemple 6.1.1. La fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.





6.1.2 Relation entre les fonctions C^1 et les fonctions différentiables

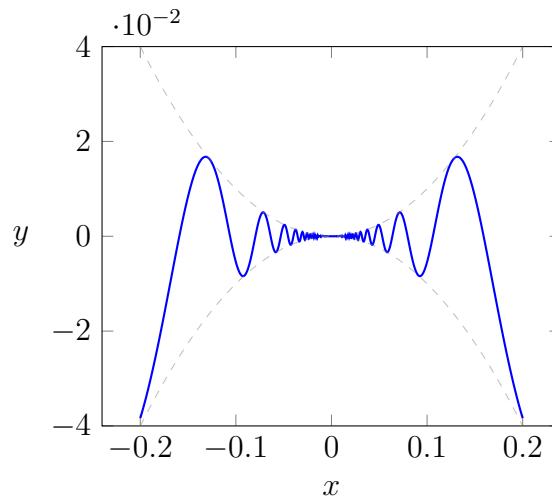
Théorème 6.1.1. Soit $f : E \rightarrow F$ définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que f est de classe C^1 sur \mathcal{U} . Alors f est différentiable sur \mathcal{U} .

Démonstration.



□

Remarque 10. La réciproque est fautive : la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ n'est pas \mathcal{C}^1 mais est différentiable sur \mathbb{R} .



6.2 Composition des fonctions de classe \mathcal{C}^1

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 6.2.1 (Règle de la chaîne). Soient $f : E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \rightarrow G$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} avec, pour tout $x \in \mathcal{U}$:

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$$

Démonstration.





□

Remarque 11. Il s'agit de la généralisation de la formule de dérivation d'une composée pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Proposition 6.2.1. Soient $f : E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \rightarrow G$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$.

La matrice jacobienne de $g \circ f$ en $x \in \mathcal{U}$ est donnée par

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Démonstration. C'est la traduction matricielle du théorème précédent. □

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . Soit une application $f : E \rightarrow F$, on note $f_1, \dots, f_p : E \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B}' . Autrement dit, on a $f(x) = f_1(x)e'_1 + \dots + f_p(x)e'_p \in F$ pour tout $x \in E$.

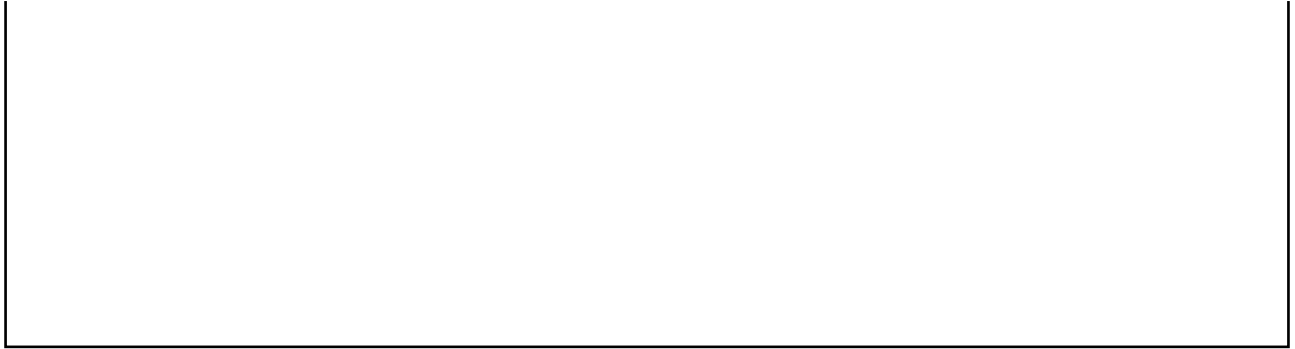
Proposition 6.2.2. Soient $f : E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$. Alors en tout point $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$, on a pour tout $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g}{\partial f_i}(f_1(x), \dots, f_p(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

où on a noté $\frac{\partial g}{\partial f_i}(f_1(x), \dots, f_p(x))$ la i -ème dérivée partielle de g en $f(x) \in \mathcal{V}$.

Démonstration.





□

Remarque 12. On a la notation plus condensée suivante :

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

La formule est concise mais les abus de notations peuvent être trompeurs pour le néophyte...

Exemple 6.2.1. Coordonnées cylindriques : $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Calcul de $\frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_j}$.



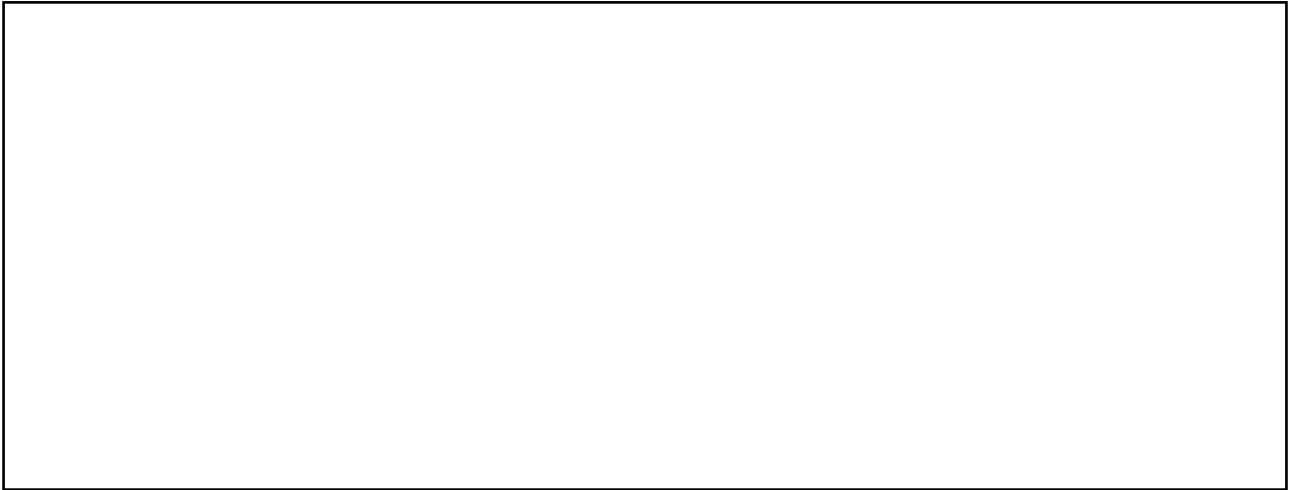
6.3 Difféomorphismes

Soient E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels normés de dimension finie et \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts de E et F respectivement.

Définition 6.3.1 (Difféomorphismes). On dit que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathcal{U} vers \mathcal{V} si f est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{U} sur \mathcal{V} dont la réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{V} .

Exemple 6.3.1. L'application $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 6.3.2. L'application $\phi : x \mapsto \text{Sign}(x)\sqrt{|x|}$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'inverse $\phi^{-1} : x \mapsto \text{Sign}(x)x^2$. L'application ϕ^{-1} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} mais ϕ n'est pas \mathcal{C}^1 .



Proposition 6.3.1. Soit $f : E \rightarrow F$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{V} . Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, $d_a f$ est un isomorphisme de E sur F tel que

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1}).$$

Démonstration.



□

Remarque 13. On a donc $\dim E = \dim F$.

On dispose de la caractérisation suivante des difféomorphismes

Théorème 6.3.1 (Inversion globale). Soit \mathcal{U} un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application injective de classe \mathcal{C}^1 . Alors f définit un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathcal{U} sur $f(\mathcal{U})$ si et seulement si $d_a f$ est un isomorphisme pour tout $a \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Admis.

□

Remarque 14.



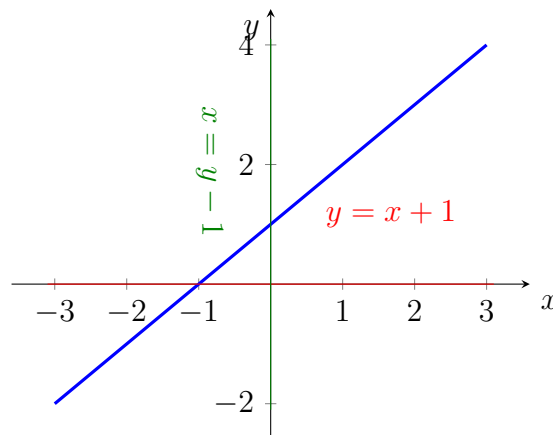
Exemple 6.3.3. Coordonnées polaires : $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ (\mathbb{R}^2 privé de la demi-droite des réels négatif).

6.4 Fonctions implicites

Dans \mathbb{R}^2 , la droite \mathcal{D} d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est la ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto ax + by + c$. Si $b \neq 0$ (i.e. si la droite n'est pas verticale) on peut définir la fonction $\varphi(x) = -\frac{ax+c}{b}$ de sorte que $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{D}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De la même manière, si $a \neq 0$ les points $(\phi(y), y)$ où $\phi(y) = -\frac{by+c}{a}$ sont sur \mathcal{D} .

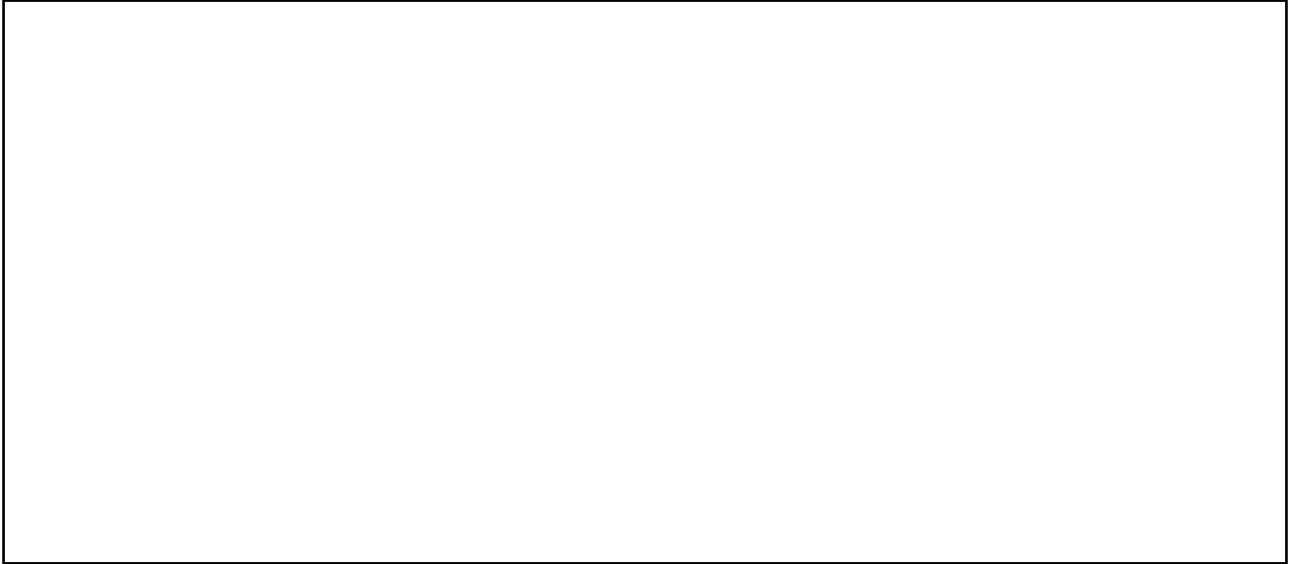


Remarque 15. En physique, on utilise très souvent cette formulation implicite. Par exemple, la loi d'Ohm, souvent énoncée par $U = RI$, devrait plutôt être comprise comme la formulation implicite de la courbe de niveau 0 de l'application $f(U, R, I) = U - RI$. En effet, on peut, suivant les besoins, exprimer U en fonction de R et de I , ou I en fonction de U et de R , etc. . .

Question : étant donnée une équation $f(x, y) = 0$. À quelles conditions sur f peut-on faire le même procédé ?

Définition 6.4.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Si T peut être représenté au voisinage de $(x_0, y_0) \in T$ par le graphe d'une fonction $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $x_0 \in]a, b[$ (i.e. $(x, \varphi(x)) \in T$ pour tout $x \in]a, b[$), alors on dit que φ est une fonction implicite de l'équation $f(x, y) = 0$.

Exemple 6.4.1. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

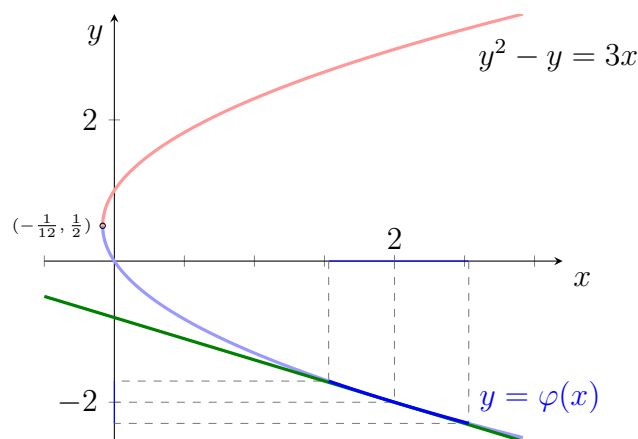


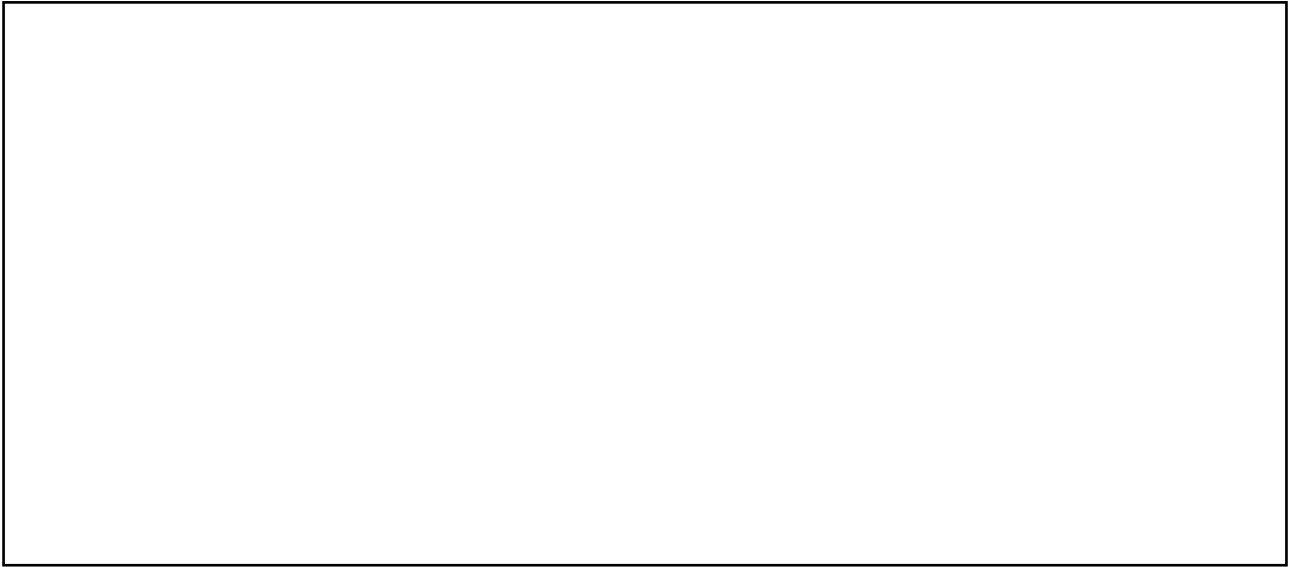
Théorème 6.4.1 (Fonction implicite sur \mathbb{R}^2). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une unique fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

1. $\varphi(x_0) = y_0$.
2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.
3. $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ pour tout $x \in I$.
4. la droite tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Démonstration. Admis. Mais on trouvera une preuve dans [1] page 204. □

Exemple 6.4.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - y - 3x$ et le point $(x_0, y_0) = (2, -2)$. On a $f(2, -2) = 0$ et on considère la courbe de niveau 0.





Chapitre 7

Dérivées d'ordres supérieurs et études des extrema

7.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel et \mathcal{U} un ouvert de E . On suppose que $\dim E = n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

7.1.1 Définitions et propriétés

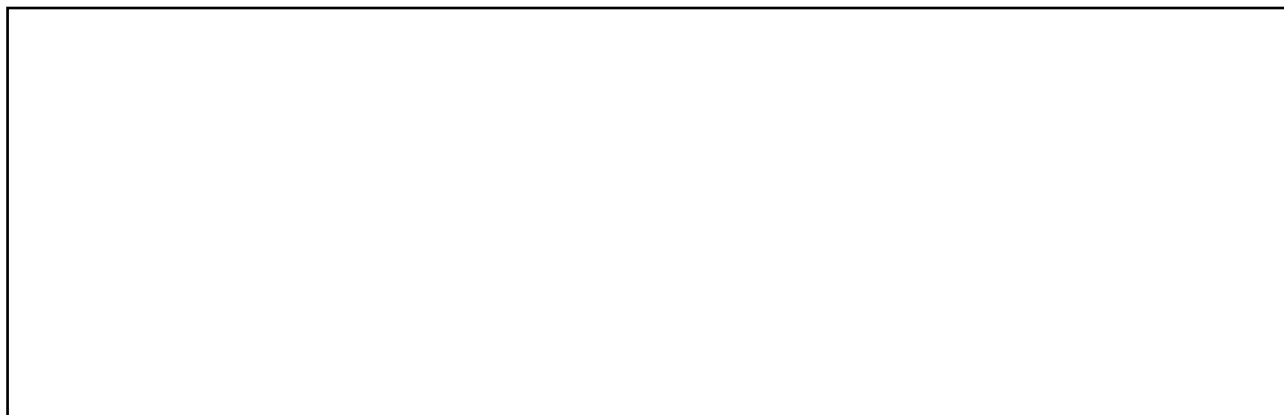
Définition 7.1.1. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ et $a \in \mathcal{U}$. On suppose que f admet une j -ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ pour $j = 1, \dots, n$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet en a une k -ème dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$, $1 \leq k \leq n$, on dit que f admet en a une (k, j) -ième **dérivée partielle seconde** que l'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Remarque 16. En itérant le procédé, on définit les dérivées partielles triples, quadruples...

Définition 7.1.2. Une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est de **classe \mathcal{C}^k** sur \mathcal{U} si pour tout $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} : \mathcal{U} \rightarrow F$ est continue sur \mathcal{U} .

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 7.1.1. Calcul des dérivées partielles secondes de la fonction $f(x, y) = x^2 \cos(y)$.

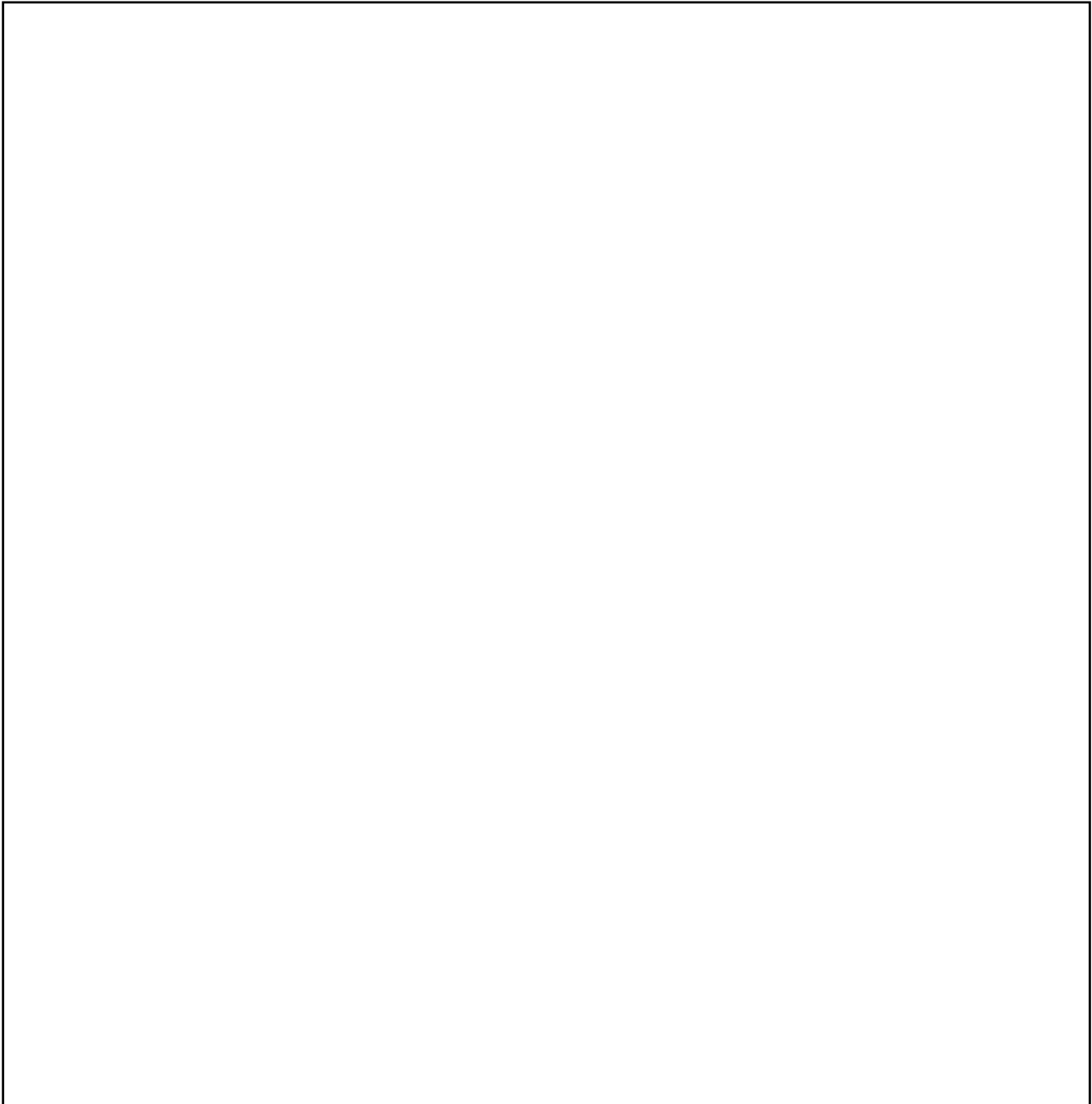


Le calcul des dérivées secondes de l'exemple précédent semble suggérer que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont égales. C'est le cas pour les fonctions suffisamment régulières :

Théorème 7.1.1 (Schwarz). On suppose que $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} . Alors, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a sur \mathcal{U}

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Démonstration.





□

Le résultat s'étend aux dérivées partielles d'ordre supérieur :

Proposition 7.1.1. Si $f : E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} , alors pour tout $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(k)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(1)}}}$$

Démonstration. C'est un corollaire du théorème de Schwarz. □

Notations : Par exemple, si f est de classe \mathcal{C}^4 sur \mathcal{U} les calculs de dérivées partielles d'ordres ≤ 4 peuvent se faire dans un ordre arbitraire et on écrit : $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ pour $\frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$.

7.1.2 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Proposition 7.1.2. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, $\mathcal{U} \subset E$ et $\mathcal{V} \subset F$ des ouverts :

- (i) Addition : $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} alors $f + g$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} .
- (ii) Multiplication par un scalaire : $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} alors λf est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} .
- (iii) Multiplication (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} alors fg est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} .
- (iv) Inverse (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} et $a \in \mathcal{U}$ tel que $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe \mathcal{C}^k sur un voisinage de $a \in \mathcal{U}$.
- (v) Composition : $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} et g est de classe \mathcal{C}^k sur $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{U} .

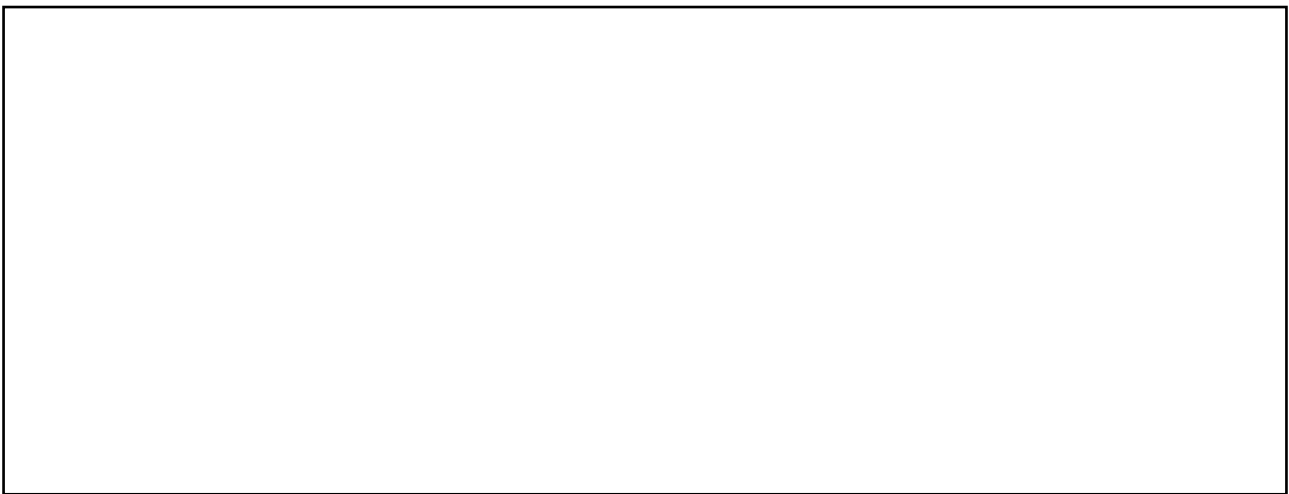
7.1.3 Formules de Taylor et matrice hessienne

Théorème 7.1.2 (Formule de Taylor-Young). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \mathcal{U}$. Alors il existe une fonction $\omega : E \rightarrow F$ définie au voisinage de 0 telle que pour tout $h \in E$ assez petit en norme,

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} d_a^2 f(h, h) + \|h\|^2 \omega(h) \text{ avec } \|\omega(h)\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

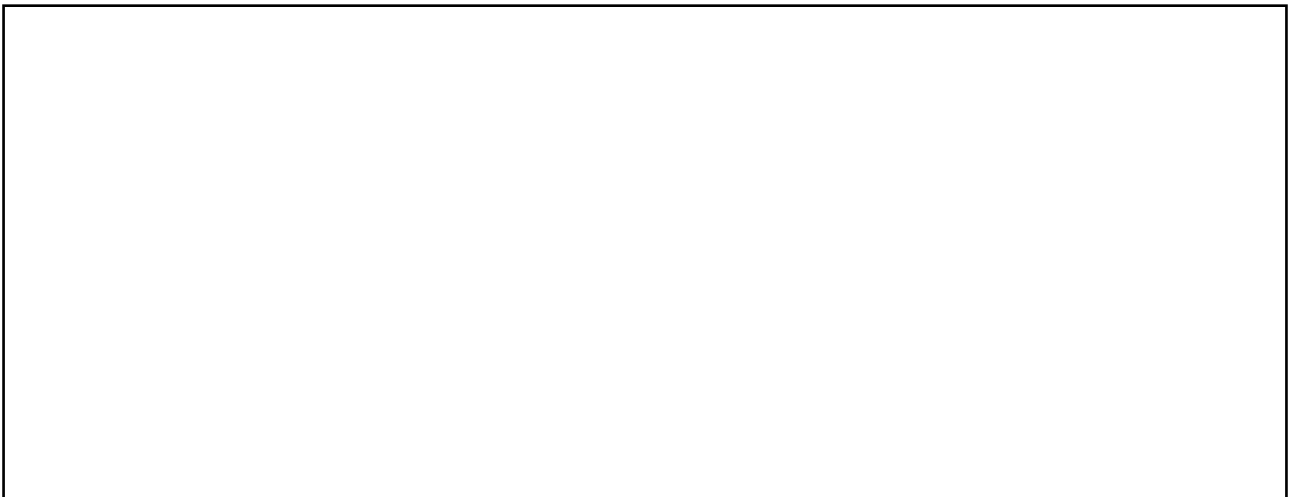
où $d_a^2 f(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

Démonstration.



□

Exemple 7.1.2. Développement limité en $(0, 0)$ et à l'ordre 2 de $(x, y) \mapsto (ye^x, \cos(x+y))$.



Dans le cas $F = \mathbb{R}$: Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a, h \in \mathbb{R}^n$, la formule de Taylor donne :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2).$$

L'application $Q_a f : h \mapsto d_a^2 f(h, h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n . On peut donc l'écrire sous forme matricielle :

Définition 7.1.3. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} et $a \in \mathcal{U}$. On appelle **matrice Hessienne** de f en a la matrice

$$\text{Hess}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

En notations matricielles on a alors :

$$f(a+h) = f(a) + [J_f(a)]h + \frac{1}{2}h^t \text{Hess}_f(a)h + o(\|h\|^2)$$

Exemple 7.1.3. Soit $f_1(x, y) = ye^x$

7.2 Étude des extrema locaux

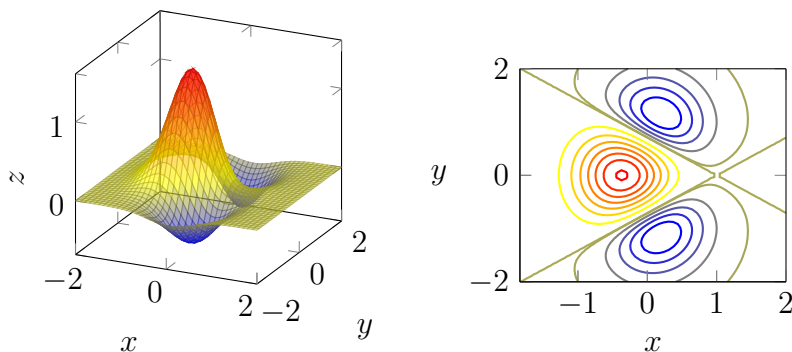
7.2.1 Définitions

Définition 7.2.1. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset E$ et $a \in \mathcal{D}$. La fonction f admet en a

1. un **maximum** (resp. **minimum**) **global** si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

2. un **maximum** (resp. **minimum**) **strict** si pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ on a $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).
3. un **maximum** (resp. **minimum**) **local** si il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que pour tout $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

On dit que f admet en $a \in \mathcal{D}$ un **extremum global** (resp. **strict** ou **local**) si f admet un maximum ou un minimum global (resp. strict, local).



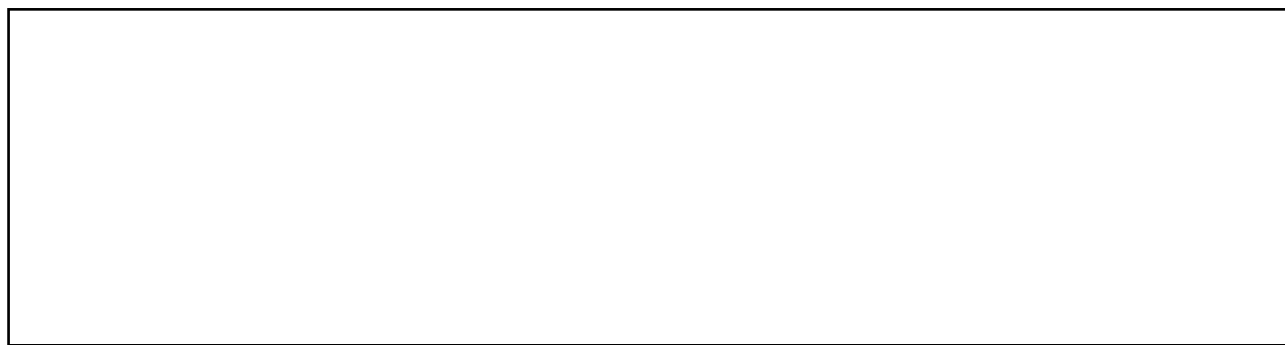
Graphes et lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto ((x-1)^2 - 2y^2)e^{-2x^2-y^2}$.

7.2.2 Condition nécessaire d'ordre 1

Définition 7.2.2. On suppose que $\dim E = n$. On dit que $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} admet un point critique en $a \in \mathcal{U}$ si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Théorème 7.2.1. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} . Si f admet un extremum local en $a \in \mathcal{U}$ alors a est un point critique de f .

Démonstration.



□

Exemple 7.2.1. La condition n'est pas suffisante : prendre $f(x, y) = xy$ en $(0, 0)$.



7.2.3 Condition suffisante d'ordre 2

On suppose maintenant que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 et que a est un point critique de f . D'après la formule de Taylor-Young on a :

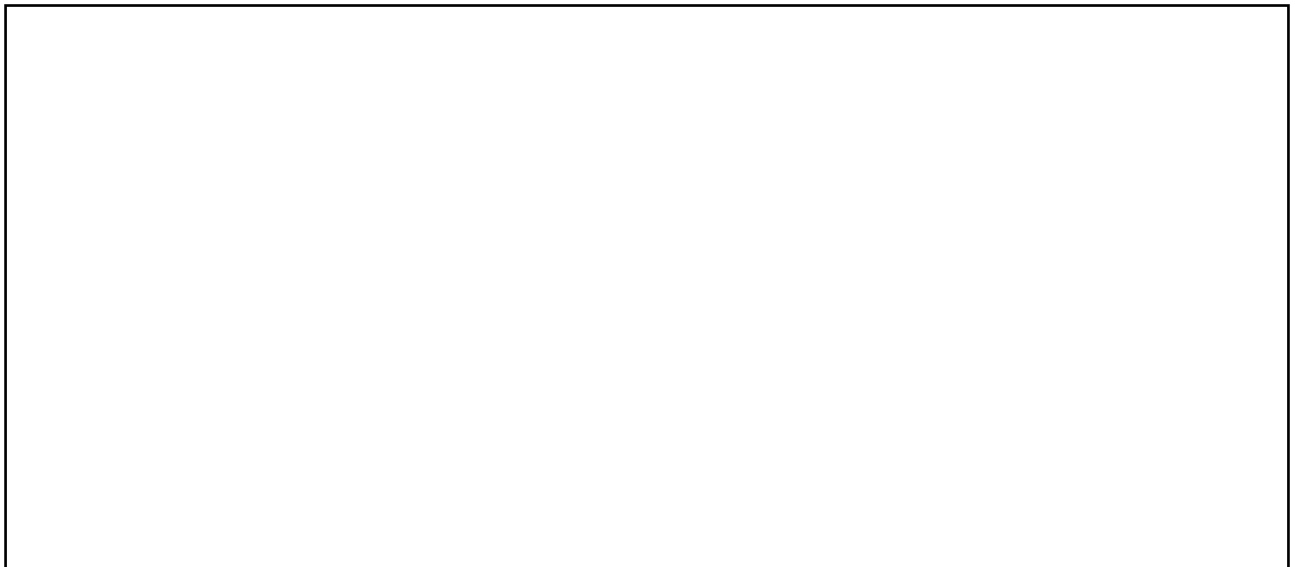
$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a f(h) + o(\|h\|^2)$$

Le signe de la forme quadratique $Q_a f : h \mapsto d_a^2 f(h, h) = h^t \text{Hess}_f(a)h$ permet dans certains cas de caractériser les extrema :

Proposition 7.2.1. Soit $a \in \mathcal{D}$ un point critique de $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si la forme quadratique $Q_a f$ est :

1. définie et positive alors f admet un minimum local strict en a .
2. définie et négative alors f admet un maximum local strict en a .

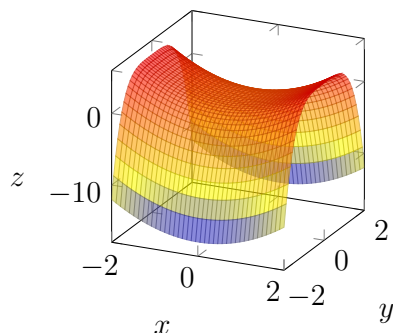
Démonstration.



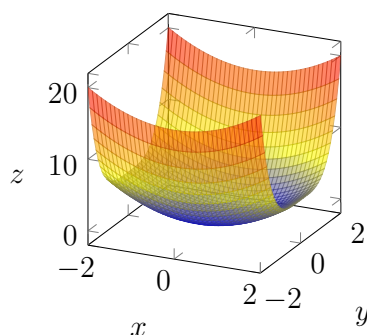
□

Remarque 17. Ne pas oublier la condition “définie” : soit $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 - y^4$ et $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + y^4$. On a $J_{f_1}(a) = J_{f_2}(a) = (0, 0)$ et $\text{Hess}_{f_1}(0, 0) = \text{Hess}_{f_2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, l'origine est un point critique de f_1 et f_2 , les formes quadratiques $Q_a f_1$ et $Q_a f_2$ sont positives non-définies.

1. l'origine n'est pas un extremum de f_1 :



2. l'origine est un minimum (global) de f_2 :



7.2.4 Fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Notation de Monge : Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} et $(a, b) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. On note $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$. La formule de Taylor-Young devient :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2} (rh^2 + 2shk + tk^2) + o(h^2 + k^2)$$

Définition - Proposition 7.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} et $(a, b) \in \mathcal{U}$ un point critique de f :

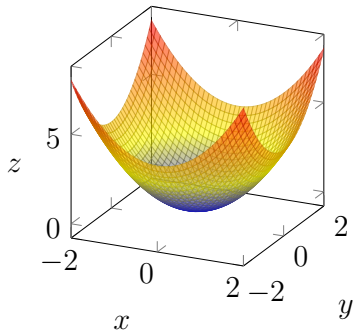
1. si $rt - s^2 \neq 0$ on dit que (a, b) est un **point critique non dégénéré**. Dans ce cas :
 - (a) si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: (a, b) est un minimum local de f .
 - (b) si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: (a, b) est un maximum local de f .
 - (c) si $rt - s^2 < 0$: (a, b) est un **point selle** de f .
2. si $rt - s^2 = 0$ on dit que (a, b) est un **point critique dégénéré**.

Démonstration.



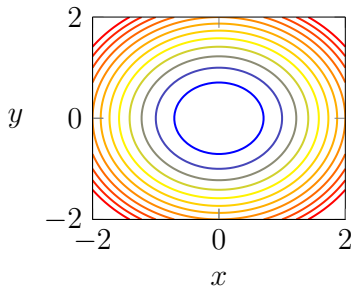


□

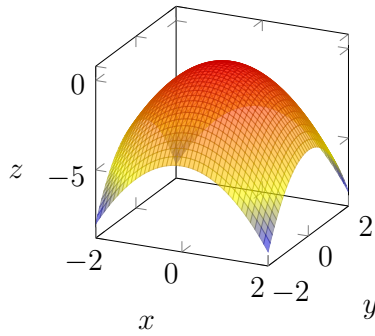


x

y

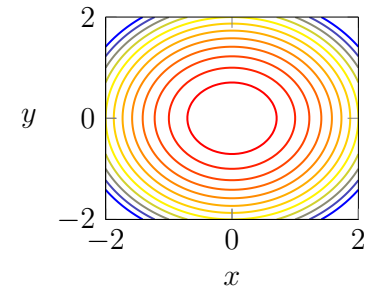


Minimum

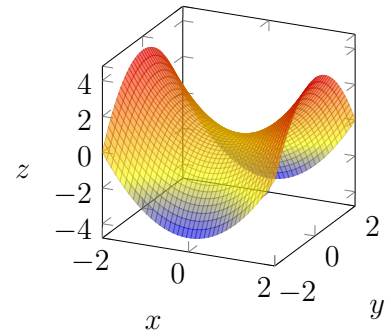


x

y

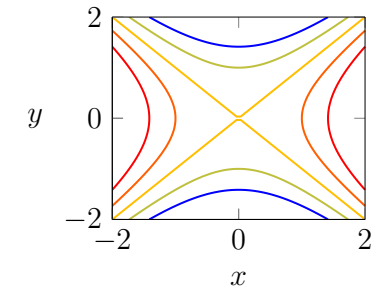


Maximum



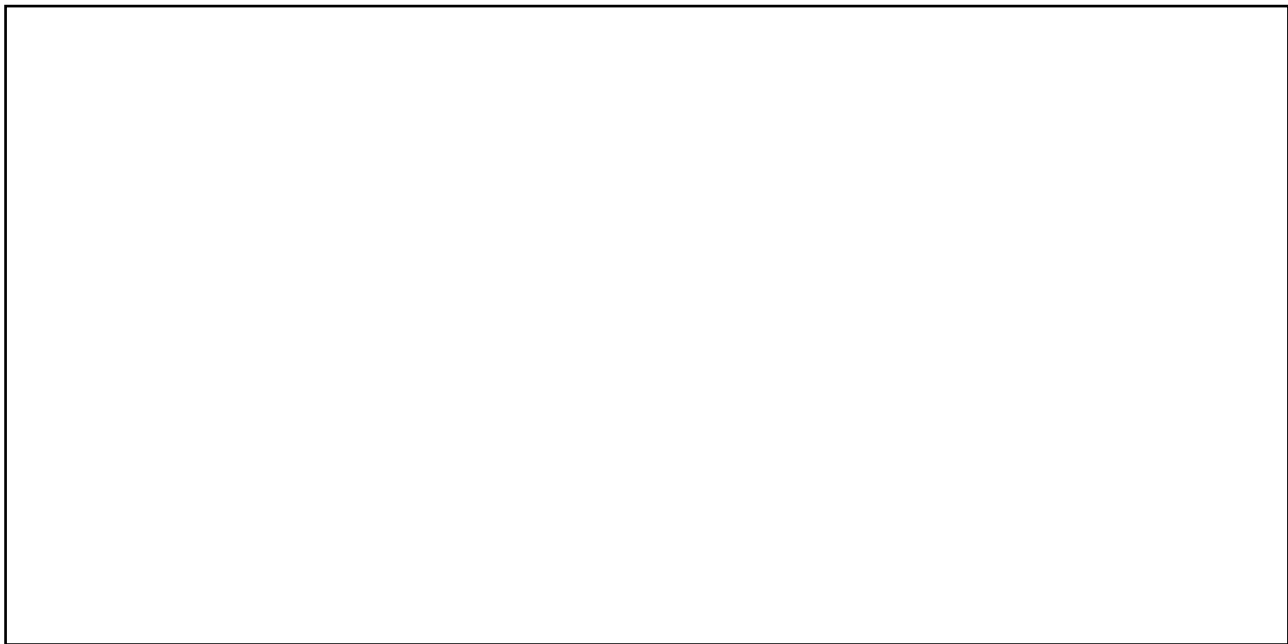
x

y

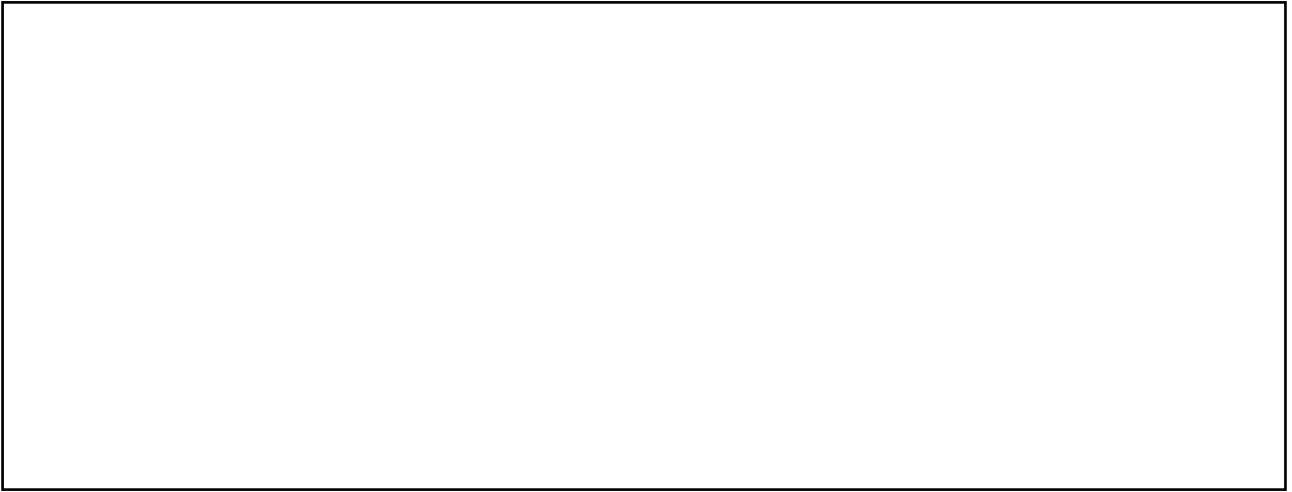


Point selle

Exemple 7.2.2. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$.



Exemple 7.2.3. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^4 + y^4$.



Chapitre 8

Intégrales Multiples

8.1 Détour par les intégrales simples

8.1.1 Construction de l'intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On construit l'intégrale de Riemann en plusieurs étapes :

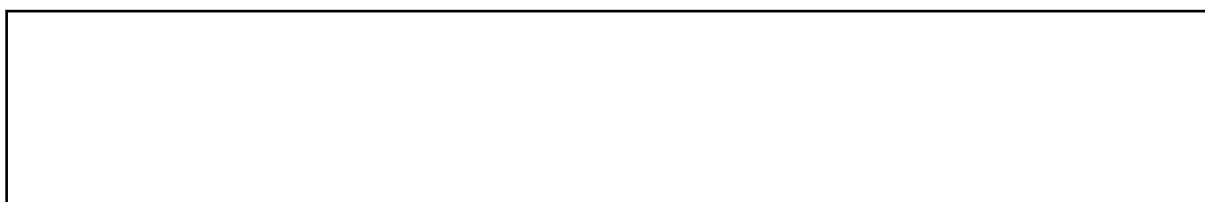
1. l'intégrale des fonctions constantes sur $[a, b]$.



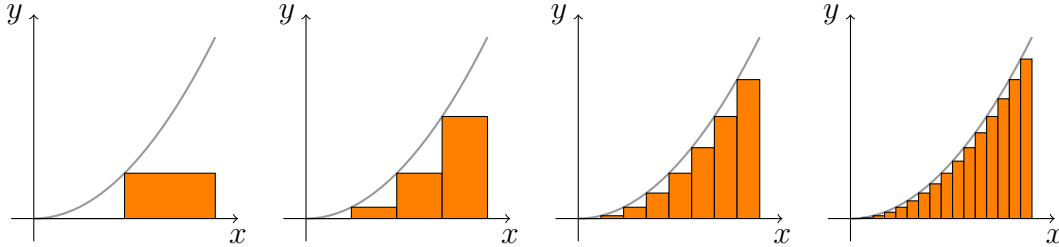
2. on définit par linéarité l'intégrale des fonctions en escalier (constantes par morceaux).



3. Si f est suffisamment régulière ("Riemann intégrable"), on approche f par une suite de fonctions en escalier, puis on définit l'intégrale comme la limite des intégrales des fonctions en escalier.



4. On montre que les fonctions continues sur un fermé borné sont Riemann intégrable.



Enfin, on montre le théorème fondamental de l'analyse (lien entre calcul de primitive et intégration).

8.1.2 Intégrales à paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et J un intervalle non vide de \mathbb{R} . On considère une fonction f de $[a, b] \times J$ dans \mathbb{R} . On cherche à étudier l'application ϕ définie sur J par

$$\phi(y) = \int_a^b f(t, y) dt.$$

Proposition 8.1.1. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$. Alors ϕ est définie et continue sur J .

Démonstration. Admis. Mais on peut aller Voir [1] page 229. □

Proposition 8.1.2. On suppose que J est un intervalle ouvert. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur $[a, b] \times J$. Alors l'application ϕ est définie et de classe \mathcal{C}^1 et

$$\phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt$$

Démonstration. Admis. Mais on peut aller Voir [1] page 230. □

Remarque 18. Sous les hypothèses de la proposition précédente : la dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée. . .

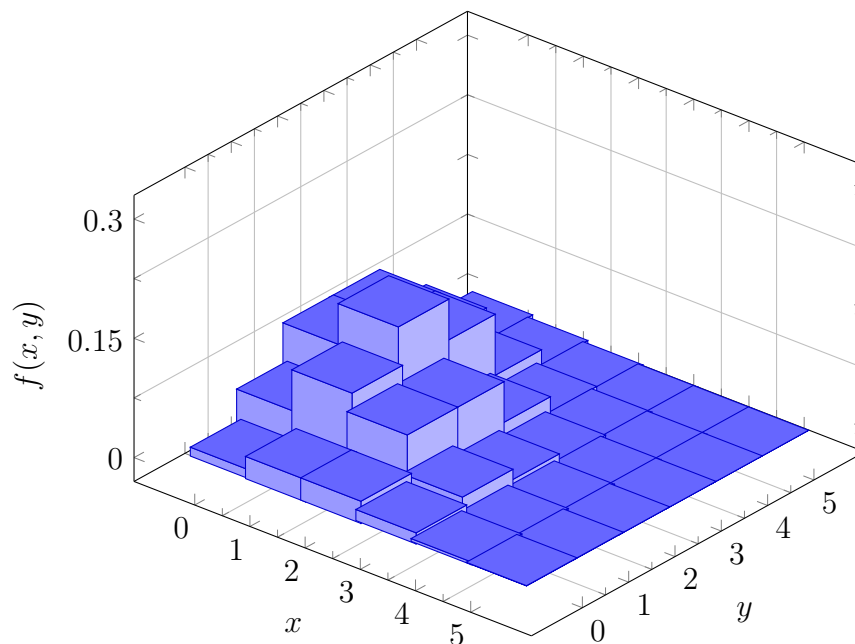
Exemple 8.1.1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Calcul de $f(0)$ et $f'(0)$.



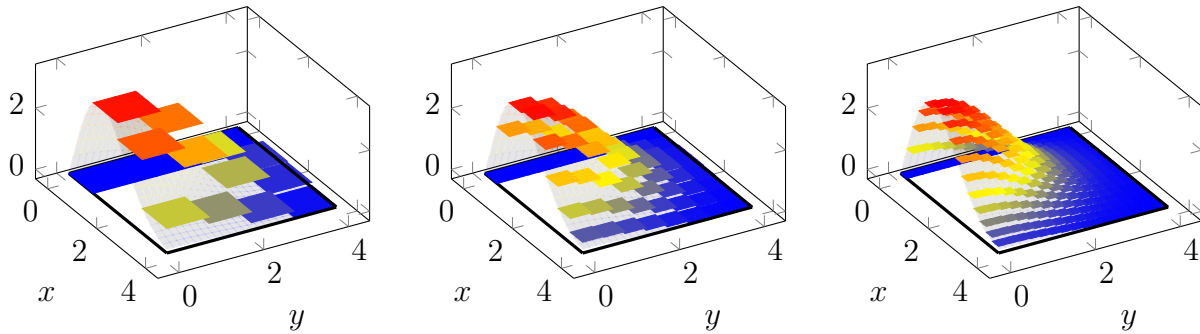
8.2 Intégrales doubles

La construction de l'intégrale de fonctions de plusieurs variables suit sensiblement le même schéma que pour l'intégrale simple. Au lieu de calculer une aire, on calcul un volume.

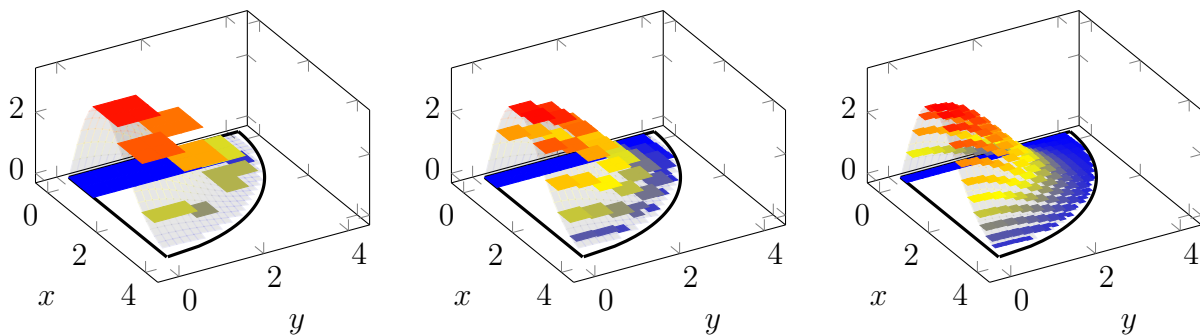
1. On définit l'intégrale de fonctions indicatrices :



2. L'intégrale de fonction plus générale est alors définie comme la limite des intégrales de fonctions indicatrices :



La difficulté supplémentaire pour les intégrales doubles est que le domaine d'intégration peut être plus compliqué qu'un simple pavé ("un rectangle"). Ici, on souhaite calculer le volume situé sous le graphe d'une fonction et dont la base est un quart de disque.



8.2.1 Intégrales doubles sur un pavé

Définition 8.2.1. Un **pavé** P est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 de la forme $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ où $a \leq b$ et $c \leq d$.

Théorème 8.2.1 (Fubini pour les pavés). Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On a alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

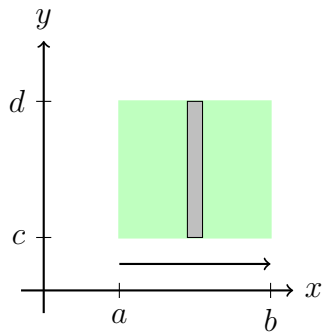
Démonstration. Admis. Mais on peut aller voir [1] page 250. □

Définition 8.2.2 (Intégrale double sur un pavé). L'intégrale double sur le pavé $P = [a, b] \times [c, d]$ de la fonction réelle f est la valeur commune des deux intégrales du théorème précédent :

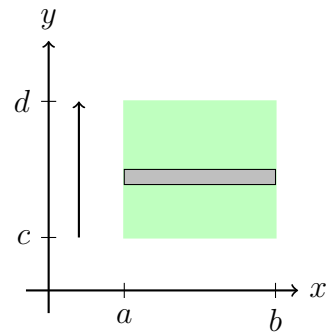
$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Notations : $\iint_P f(x, y) dx dy$ ou $\iint_P f$ ou $\int_P f(x, y) dx dy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambiguïtés.

Remarque 19. On peut calculer l'intégrale double de deux manières différentes :



2) intégrer par rapport à y (“en colonne”),
puis intégrer par rapport à x (“en ligne”)

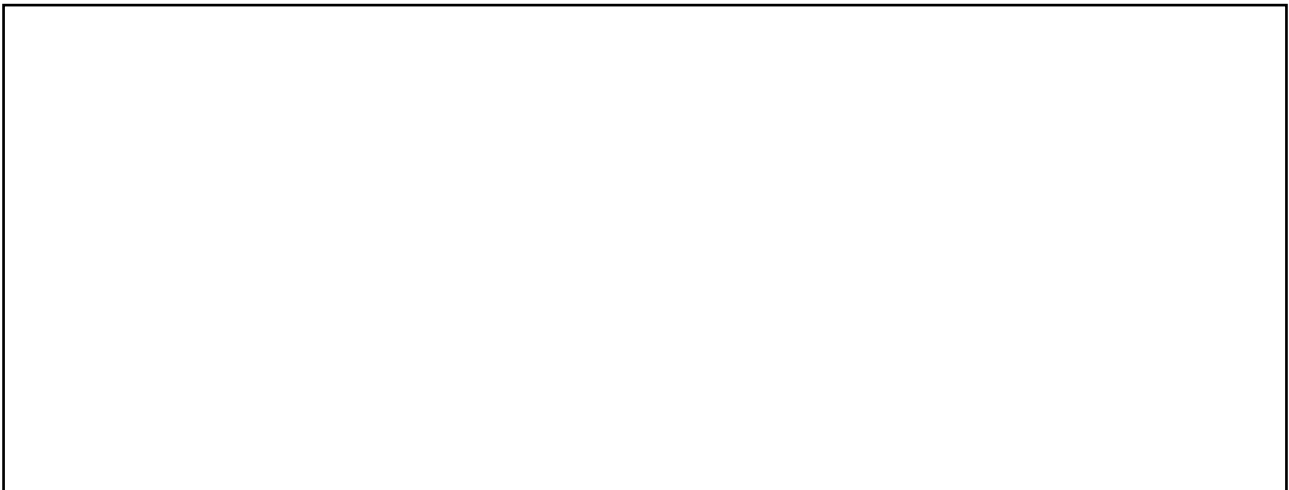


1) intégrer par rapport à x (“en ligne”),
puis intégrer par rapport à y (“en colonne”)

Proposition 8.2.1. Si $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose en $f(x, y) = g(x)\ell(y)$ alors on a :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d \ell(y) dy \right)$$

Démonstration.



□

Exemple 8.2.1. $f(x, y) = xy^2$ définie sur $P = [0, 1] \times [1, 2]$.



8.2.2 Intégrales doubles sur une partie élémentaire

Définition 8.2.3 (Partie élémentaire du plan). Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite élémentaire si elle admet les deux définitions suivantes

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad (1)$$

et

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\} \quad (2)$$

où φ_1, φ_2 (resp. ϕ_1, ϕ_2) sont des fonctions continues sur $[a, b]$ (resp. $[c, d]$)

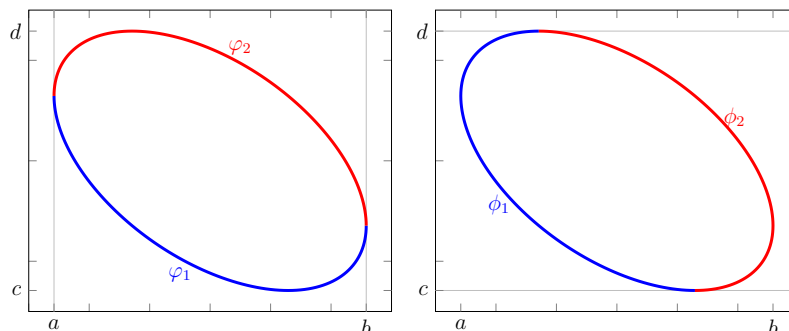
Remarque 20. L'intérieur de A est :

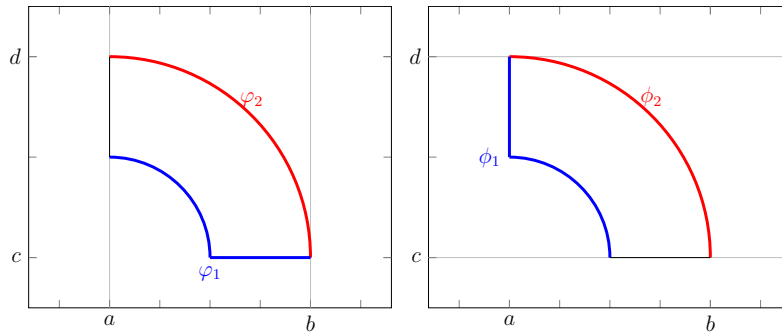
$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \quad (1)$$

et

$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \phi_1(y) < x < \phi_2(y)\}. \quad (2)$$

Exemple 8.2.2. Voici quelques exemples :





Théorème 8.2.2 (Fubini). Soit A une partie élémentaire définie par les formules (1) et (2) ci dessus. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. On a alors :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

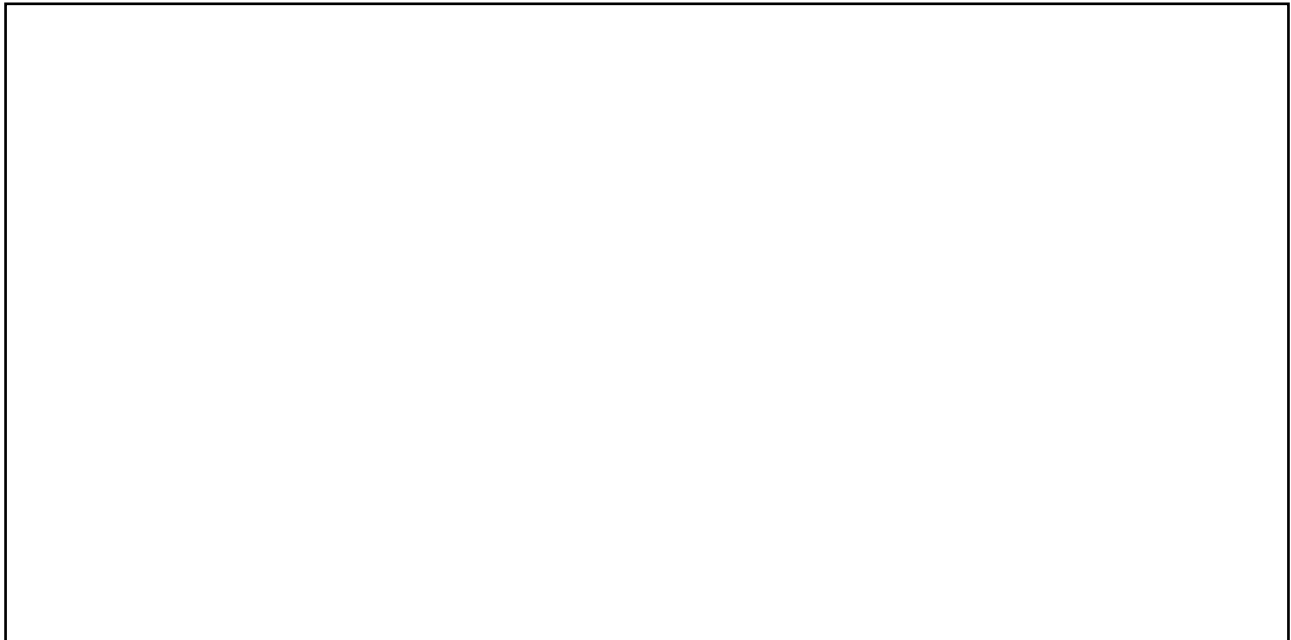
Démonstration. Admis. □

Définition 8.2.4 (Intégrale double sur une partie élémentaire). L'intégrale double sur A de f est alors la valeur commune des deux intégrales ci-dessus. On a

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Notations : $\iint_A f(x, y) dx dy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x, y) dx dy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambiguïtés.

Exemple 8.2.3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ et $f(x, y) = xy$.



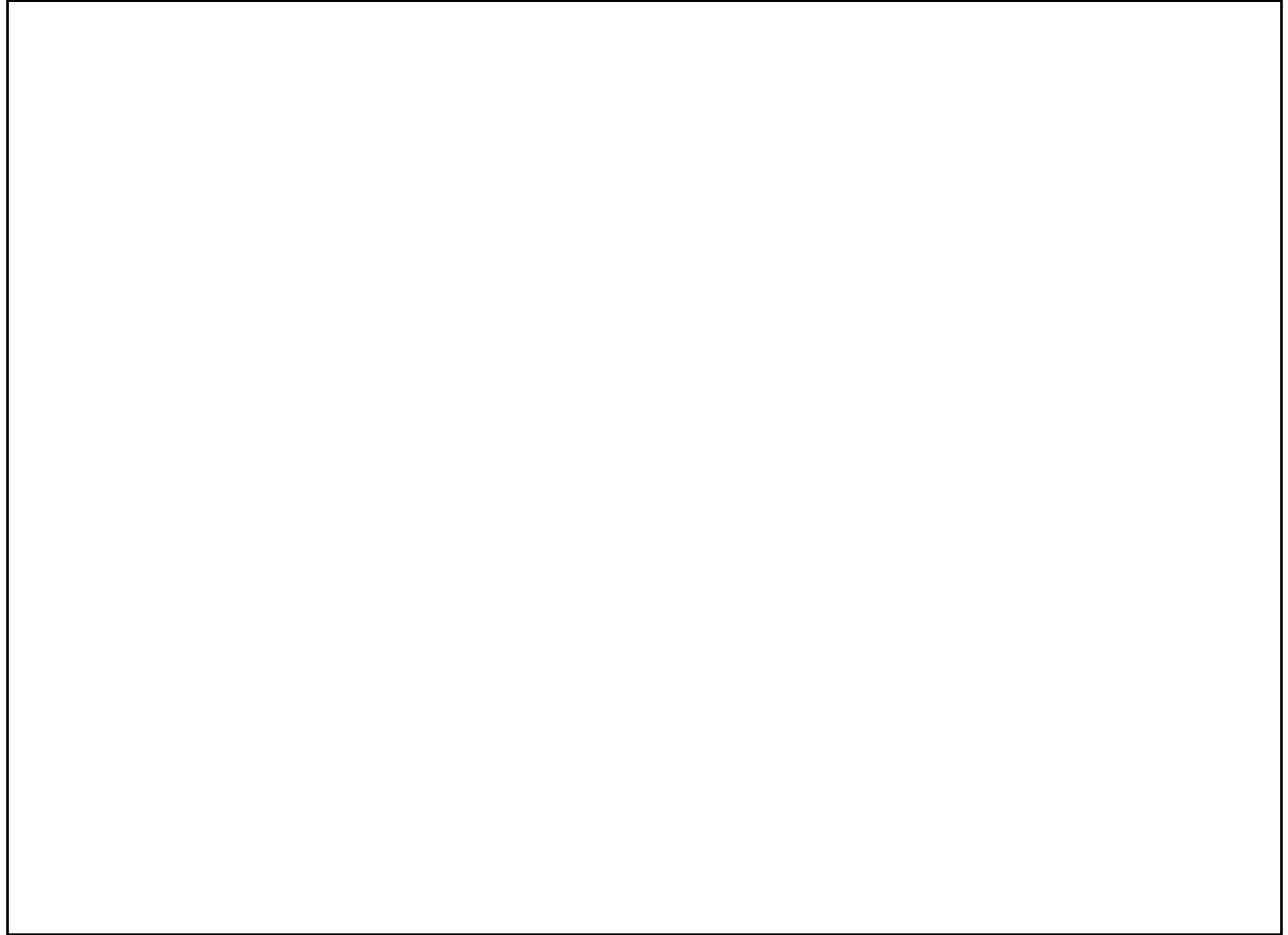
Définition - Proposition 8.2.1. L'aire de la partie élémentaire A est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx dy.$$

On a alors

$$\text{Aire}(A) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y)) dy.$$

Exemple 8.2.4. Soit A de disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Retrouver $\text{Aire}(A) = \pi$



8.2.3 Intégrales doubles sur une partie simple

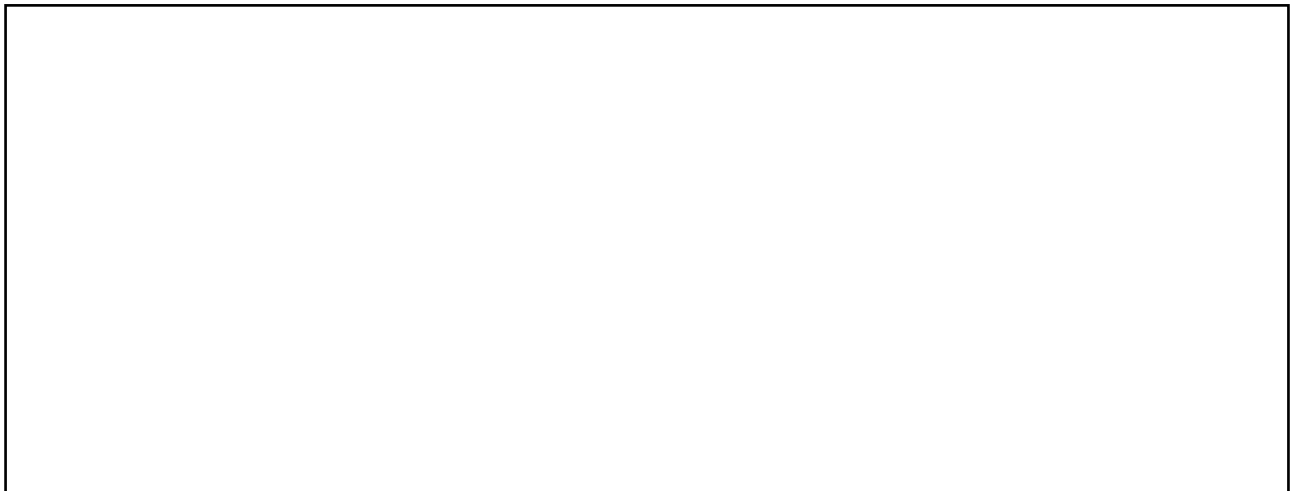
Définition 8.2.5. On dit que A est une **partie simple** de \mathbb{R}^2 si c'est la réunion d'une famille finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Définition 8.2.6 (Intégrale double sur une partie simple). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 , on peut écrire $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit l'intégrale double de f sur A par

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) dx dy.$$

Notations : $\iint_A f(x, y) dx dy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x, y) dx dy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambiguïtés.

Exemple 8.2.5.



Définition 8.2.7. L'aire $\text{Aire}(A)$ d'une partie simple de A de \mathbb{R}^2 est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} dx dy = \sum_{i=1}^n \text{Aire}(A_i).$$

8.2.4 Propriétés

Proposition 8.2.2 (Linéarité). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . Soient $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\iint_A \lambda f + \mu g = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g.$$

Proposition 8.2.3 (Croissance). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f \leq g$. Alors

$$\iint_A f \leq \iint_A g.$$

Proposition 8.2.4. Soient A_1 et A_2 deux parties simples de \mathbb{R}^2 telles que $A_1 \subset A_2$ et f une fonction continue et positive sur A_2 . Alors

$$\iint_{A_1} f \leq \iint_{A_2} f.$$

Définition 8.2.8. Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . On appelle centre de gravité de A , le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\text{Aire } A} \left(\iint_A x dx dy, \iint_A y dx dy \right).$$

Exemple 8.2.6. Calculer le centre de gravité du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.



8.3 Intégrales triples

Les définitions des domaines élémentaires peuvent être généralisées de manière évidente à \mathbb{R}^n . On se contente ici de traiter le cas $n = 3$.

8.3.1 Intégrales triples sur un pavé

Définition 8.3.1. Soient $a < a'$, $b < b'$ et $c < c'$ des réels. L'ensemble $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ est un pavé de \mathbb{R}^3 .

Définition 8.3.2. L'intégrale triple sur P de $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left(\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Notations : $\iiint_P f(x, y) dx dy$ ou $\iiint_P f$ ou $\int_P f(x, y) dx dy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambiguïtés.

Remarque 21. Les propriétés de l'intégrale triples sont identiques à l'intégrale double :

1. on peut permuter l'ordre d'intégration.
2. si $f(x, y, z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ alors

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_a^{a'} \alpha(x) dx \right) \left(\int_b^{b'} \beta(y) dy \right) \left(\int_c^{c'} \gamma(z) dz \right).$$

8.3.2 Formule de sommation par piles

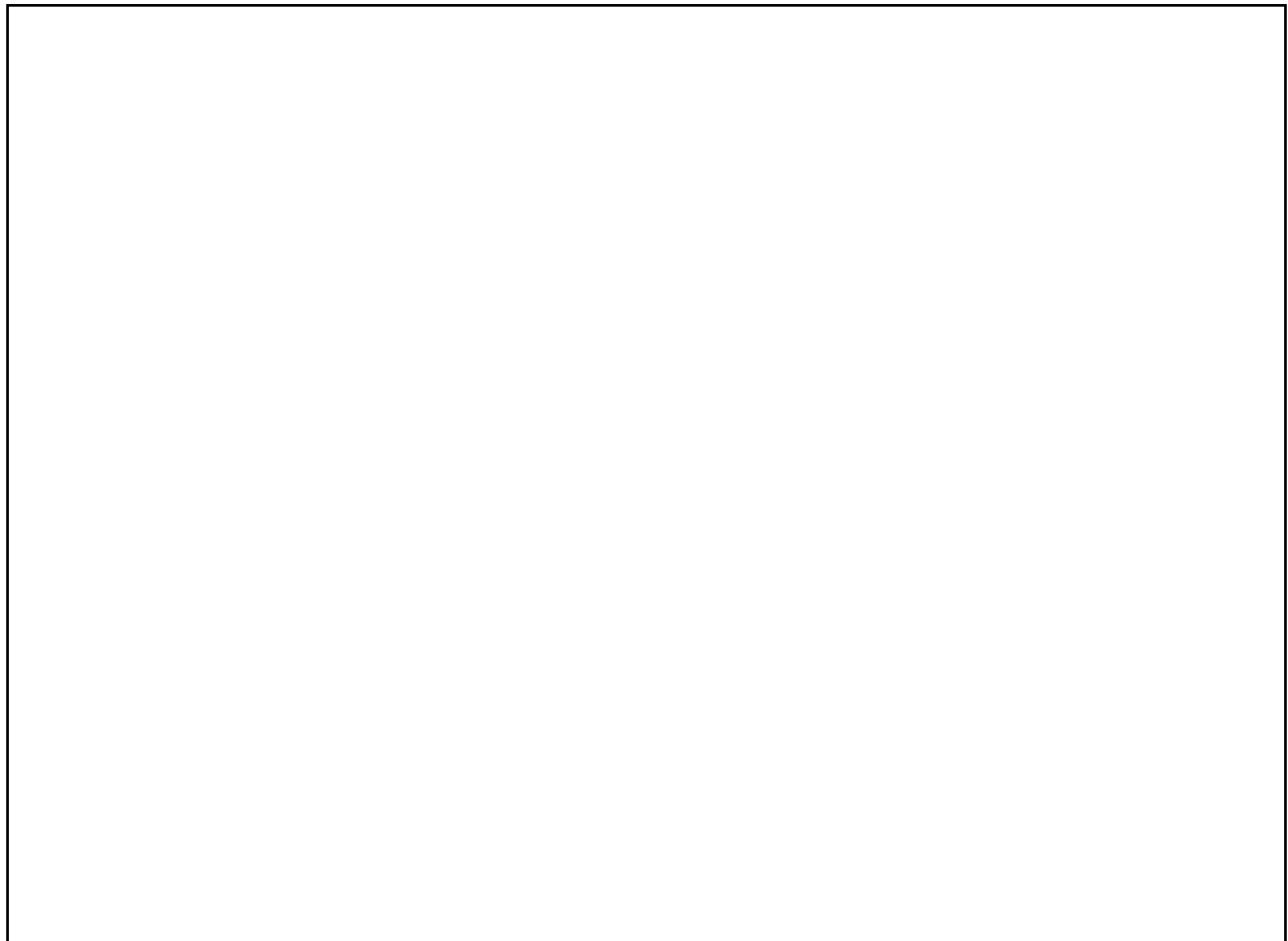
Définition 8.3.3. On suppose que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | u(x, y) \leq z \leq v(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}\}$ où \mathcal{D} est une partie simple de \mathbb{R}^2 et $u, v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. L'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur Δ est

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Définition 8.3.4. Le **volume** de Δ est noté $\text{Vol}(\Delta)$ et est défini par

$$\text{Vol}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} (v(x, y) - u(x, y)) dx dy$$

Exemple 8.3.1. Calculer le volume du simplexe $T_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 | x + y + z \leq 1\}$.



8.3.3 Formule de sommation par tranches

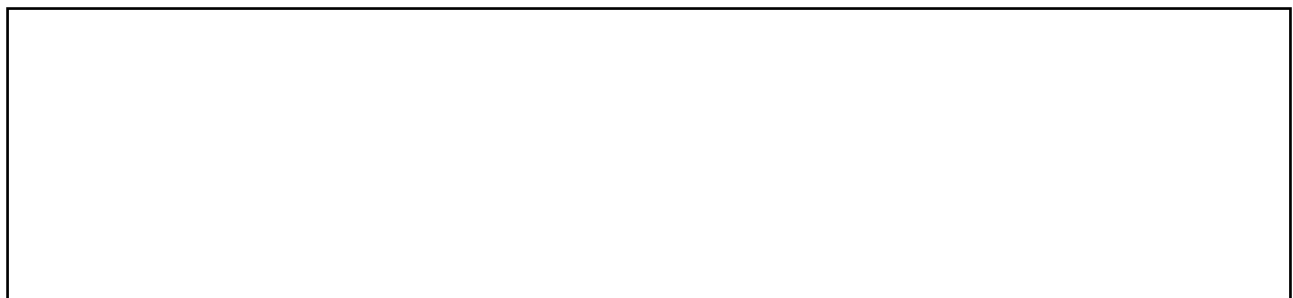
Définition 8.3.5. On suppose que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_z, a \leq z \leq b\}$ où \mathcal{D}_z est une partie simple de \mathbb{R}^2 pour tout $z \in [a, b]$. L'intégrale de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue est

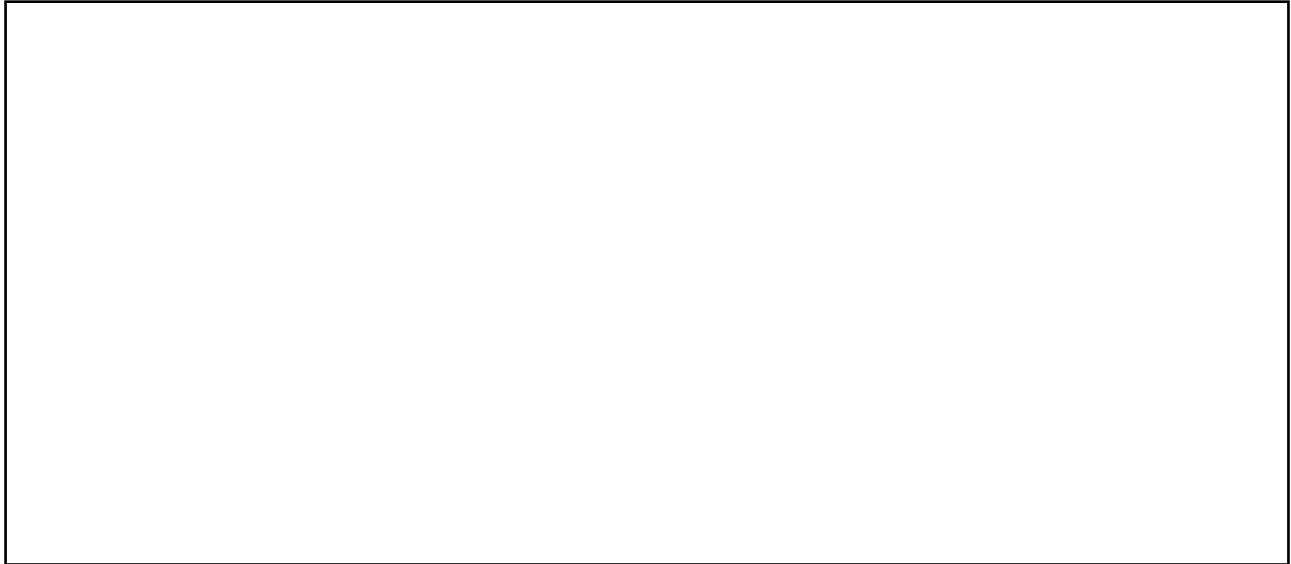
$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\mathcal{D}_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Définition 8.3.6. Le volume de Δ est noté $\text{Vol}(\Delta)$ et est défini par

$$\text{Vol}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz = \int_a^b \text{Aire}(\mathcal{D}_z) dz.$$

Exemple 8.3.2. Montrer que le volume de la boule unité de \mathbb{R}^3 vaut $\frac{4\pi}{3}$





Définition 8.3.7. Soit A une partie simple de \mathbb{R}^3 . On appelle centre de gravité de A , le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\text{Vol } A} \left(\iiint_A x dx dy dz, \iiint_A y dx dy dz, \iiint_A z dx dy dz \right).$$

8.4 Formule de changement de variables

Proposition 8.4.1. Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts bornés de \mathbb{R}^n et $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme tel que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Alors pour toute fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ continue :

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u_1, \dots, u_n)) |\det J_\varphi(u)| du_1 \cdots du_n.$$

où $\det J_\varphi$ est le déterminant de la matrice jacobienne de φ .

Démonstration. Admis. □

La formule précédente généralise la formule de changement de variables dans les intégrales simples :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

8.4.1 Cas des intégrales doubles

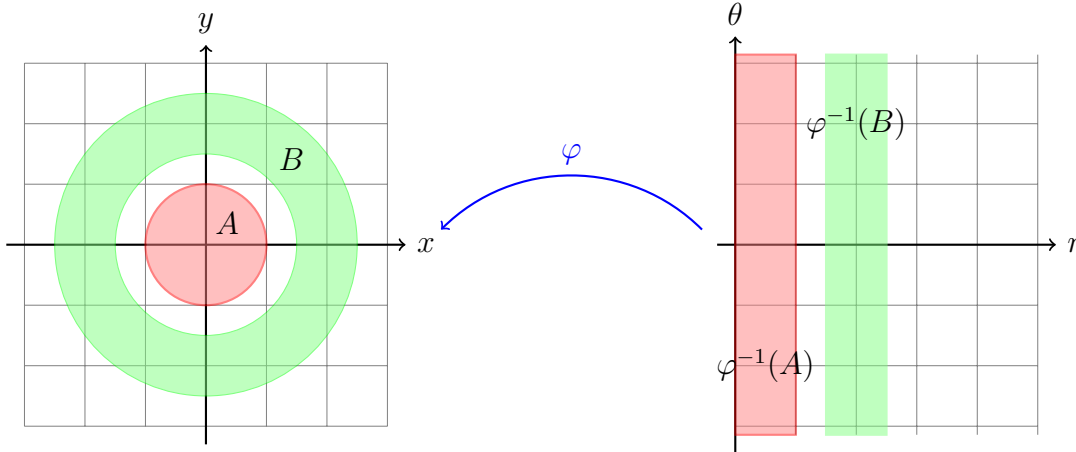
Dans le cas où $n = 2$ on a $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2) = x_1, \varphi_2(u_1, u_2) = x_2)$ et

$$\iint_{\varphi(\mathcal{U})} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{U}} f(\varphi(u_1, u_2)) |\det J_\varphi(u_1, u_2)| du_1 du_2,$$

où $\det J_\varphi(\cdot) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$.

Exemple 8.4.1. Changement de coordonnées polaires : $\varphi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[: \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ défini par $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a alors $\det J_\varphi(r, \theta) = r$ et la formule du changement de variable s'écrit :

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



L'aire du rectangle rouge $\varphi^{-1}(A)$ et du rectangle vert $\varphi^{-1}(B)$ dans le plan (r, θ) sont égales. Pour retrouver les aires des couronnes A et B correspondantes dans le plan (x, y) il faut multiplier par un facteur correctif $|\det J_\varphi(r, \theta)| = r$:

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(A)} r dr d\theta = \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

$$\text{Aire}(B) = \iint_B dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(B)} r dr d\theta = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2(2\pi) = 4\pi$$

Exemple 8.4.2. Changement de coordonnées affines.



8.4.2 Cas des intégrales triples

Dans le cas où $n = 3$ on a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\varphi(u_1, u_2, u_3) = (\varphi_1(u_1, u_2, u_3) = x_1, \varphi_2(u_1, u_2, u_3) = x_2, \varphi_3(u_1, u_2, u_3) = x_3)$ et

$$\iiint_{\varphi(U)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_U f(\varphi(u_1, u_2, u_3)) |\det J_\varphi(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3,$$

$$\text{où } \det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}.$$

Exemple 8.4.3. Changement de coordonnées cylindriques.



Exemple 8.4.4. Changement de coordonnées sphériques.



8.5 Circulation d'un champ de vecteurs

8.5.1 Définitions et propriétés

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Définition 8.5.1 (Intégrale d'une fonction le long d'une courbe). Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . On considère $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que $\phi([a, b]) \subset \mathcal{U}$. L'intégrale de f le long de la courbe $\Gamma = ([a, b], \phi)$ est

$$\int_{\Gamma} f d\phi = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Définition 8.5.2. Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . On considère le champ de vecteurs $V : \mathcal{U} \rightarrow E$ continue sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que $\phi([a, b]) \subset \mathcal{U}$. On appelle **circulation** du champ de vecteurs V le long de Γ le réel :

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle dt.$$

Notation : Si $E = \mathbb{R}^2$ on pose $V = (V_1, V_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ définie sur $[a, b]$, alors

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi_1'(t)dt + \int_a^b V_2(\phi(t))\phi_2'(t)dt = \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy.$$

Remarque 22. Les fonctions ϕ et ϕ' sont continues sur $[a, b]$ et V est continu sur $\mathcal{U} \supset \phi([a, b])$. Ainsi, $t \mapsto \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle$ est continue et l'intégrale est bien définie.

Proposition 8.5.1 (Relation de Chasles). Avec les notations de la définition précédente. Pour $c \in [a, b]$ on note :

$$\Gamma_{a,c} = ([a, c], \phi), \quad \Gamma_{c,b} = ([c, b], \phi), \quad \Gamma_{a,b} = ([a, b], \phi)$$

Alors,

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \langle V, d\phi \rangle = \int_{\Gamma_{a,c}} \langle V, d\phi \rangle + \int_{\Gamma_{c,b}} \langle V, d\phi \rangle$$

Cette formule se généralise à un nombre fini de point de $]a, b[$. On étend alors la définition de l'intégrale curviligne aux arcs continues de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Si $\Gamma = ([a, b], \phi)$ est \mathcal{C}^1 par morceau pour la subdivision $a = a_0 < \dots < a_m = b$ alors on pose

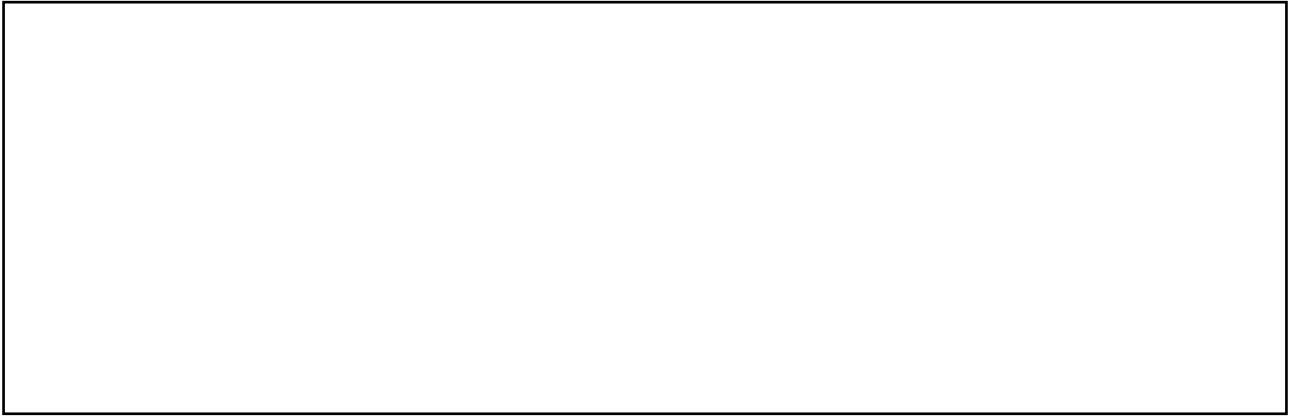
$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Gamma_{a_i, a_{i+1}}} \langle V, d\phi \rangle.$$

Proposition 8.5.2 (Changement de paramétrage). Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . Étant donné le \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ considérons la courbe Γ' définie par la paramétrisation $([c, d], \psi = \phi \circ \theta)$. Alors,

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \varepsilon \int_{\Gamma'} \langle V, d\psi \rangle$$

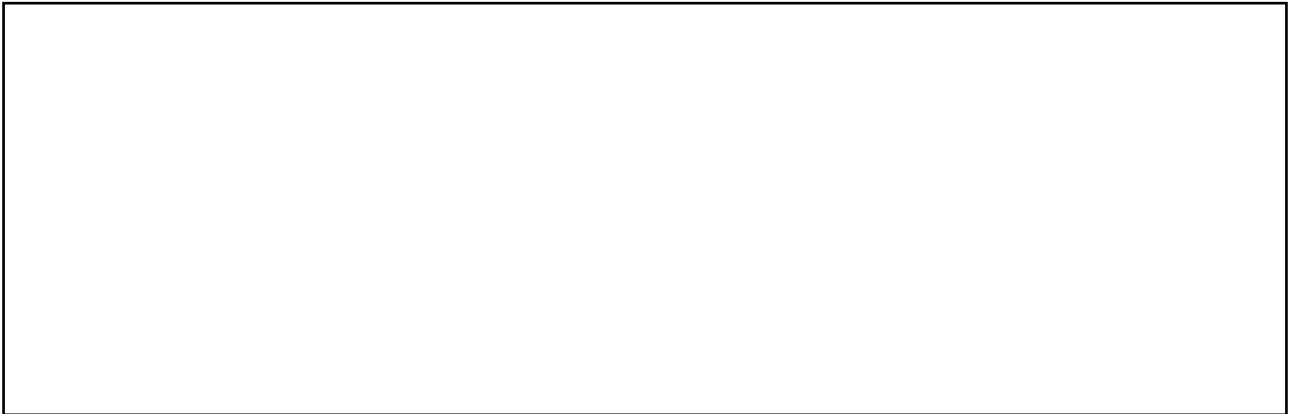
où $\varepsilon = \text{sign}(\theta') = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \text{ est croissant} \\ -1 & \text{si } \theta \text{ est décroissant} \end{cases}$.

—
Démonstration.



□

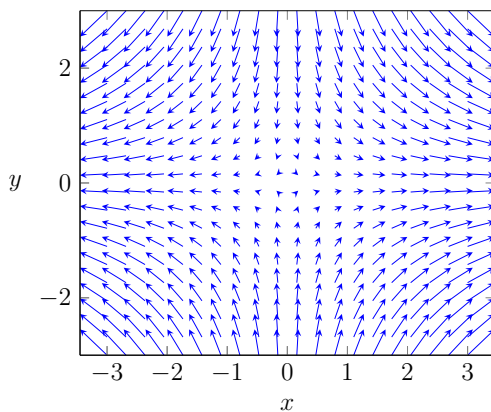
Exemple 8.5.1. Soit $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $V(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$. Calculer la circulation de V le long du segment reliant $(0, 0, 0)$ à $(1, 2, 3)$.



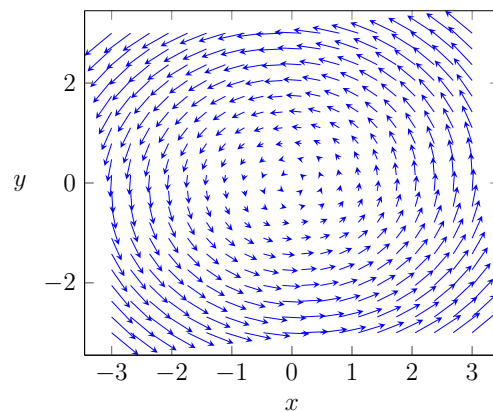
8.5.2 Champs de Gradient

Définition 8.5.3. $V : E \rightarrow E$ est un champ de gradient s'il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $V = \nabla f$.

Exemple 8.5.2. Voici deux exemples de champs de vecteurs :



$V(x, y) = (x, -y)$ (champ de gradient)

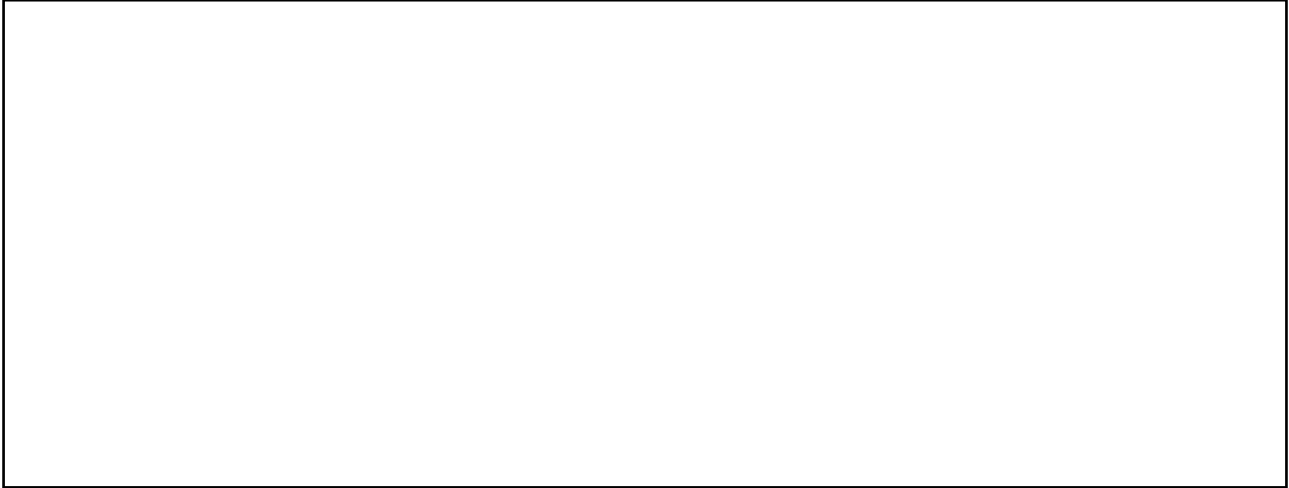


$V(x, y) = (-y, x)$

Théorème 8.5.1. On suppose que V est un champ de gradient continue. Alors pour tout courbe paramétrée $\Gamma = (I, \phi)$ d'origine A et d'extrémité B incluse dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = f(B) - f(A).$$

Démonstration.



□

Définition 8.5.4. Un ouvert \mathcal{U} est dit **étoilé** si il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $\omega \in \mathcal{U}$ on a $[a, \omega] \in \mathcal{U}$.



Théorème 8.5.2 (Poincaré, cas $n = 2$). Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur défini sur \mathcal{U} et de classe \mathcal{C}^1 . Si \mathcal{U} est un ouvert étoilé alors $V = (V_1, V_2)$ est un champ de gradient si et seulement si $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}$.

Démonstration. Admis.

□

8.5.3 Formule de Green-Riemann (cas $n = 2$)

On considère \mathbb{R}^2 muni de la base canonique (i, j) .

Théorème 8.5.3. Soit Δ une partie de \mathbb{R}^2 dont le bord est le support d'une courbe paramétrée $\partial\Delta$ fermée, orientée positivement et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit $V = (V_1, V_2)$ un champ

de vecteur de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant Δ . On a alors,

$$\int_{\partial\Delta} \langle V, d\phi \rangle = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 23. Orientation positive de $\partial\Delta$: le point $\phi(t)$ qui parcourt le bord de Δ se déplace pour t croissant “en laissant le domaine Δ à gauche”.



Notation : le théorème de Green-Riemann est le plus souvent énoncé en introduisant la notion de forme différentielle. La notation utilisée dans ce cas est $\int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi'_1(t) + V_2(\phi(t))\phi'_2(t) dt = \int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle$.

Proposition 8.5.3 (Calcul d'aire planes). Avec les notations différentielle on a

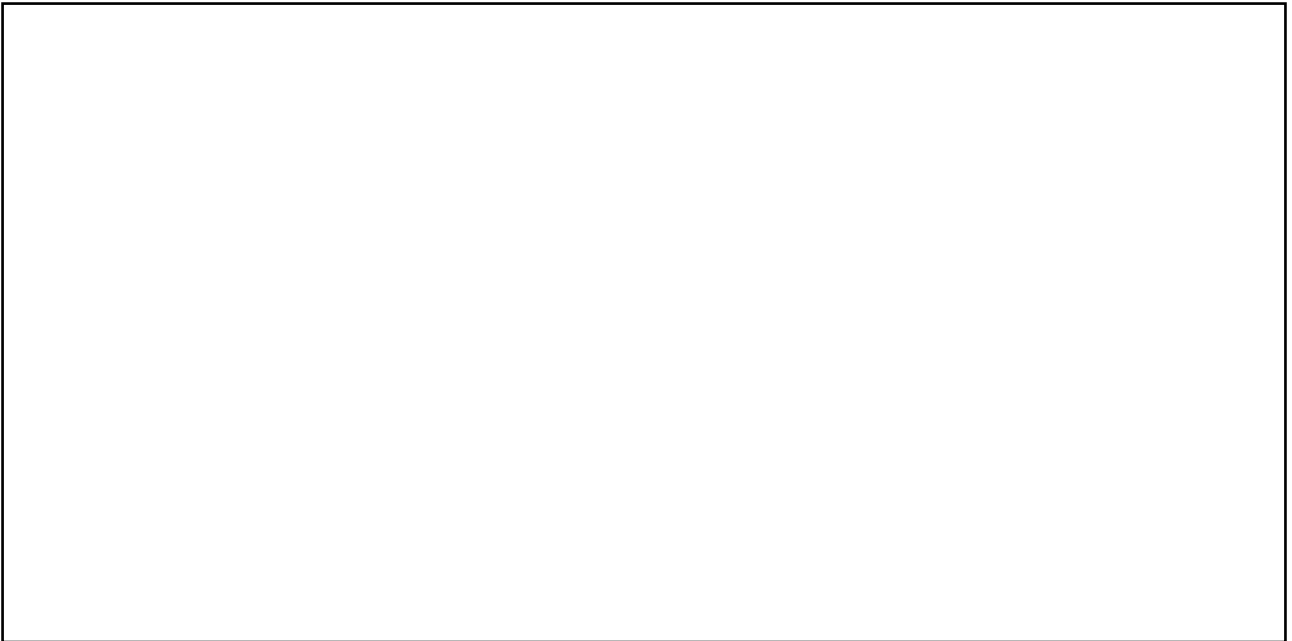
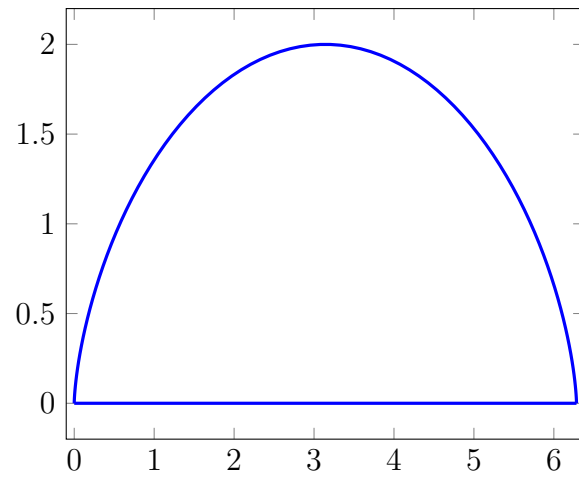
$$\text{Aire}(\Delta) = \int_{\partial\Delta} x dy = - \int_{\partial\Delta} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Delta} x dy - y dx.$$

Démonstration.



□

Exemple 8.5.3. Calcul de l'aire de la partie du plan Δ délimitée par l'axe Ox et l'arc paramétré $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$



Bibliographie

- [1] F. Liret and D. Martinais. *Cours de mathématiques. Analyse 2ème année. Cours et exercices avec solutions*. Collection : Sciences Sup, Dunod, 2004 - 2ème édition.