Contrôle continu 2

Durée 1h10. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $u = (2, 1)$ et D la droite vectorielle dirigee par u (*i.e.* $D = \mathbb{R}u$). Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

1. Calculer $d_1(x)$ la distance de x a D en fonction de x_1 et x_2.

   On applique la formule du cours en remarquant que la droite passe par l'origine O du repère. On obtient
   $$d_1(x) = \frac{\det(x,u)}{\|u\|} = \frac{|x_1 - 2x_2|}{\sqrt{5}}.$$

2. Calculer $d_2(x) = \langle x, u\rangle$ en fonction de x_1 et x_2.

   On applique la définition du cours :
   $$d_2(x) = 2x_1 + x_2.$$

3. Montrer que $N(x) = \sqrt{5}|d_1(x)| + |d_2(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

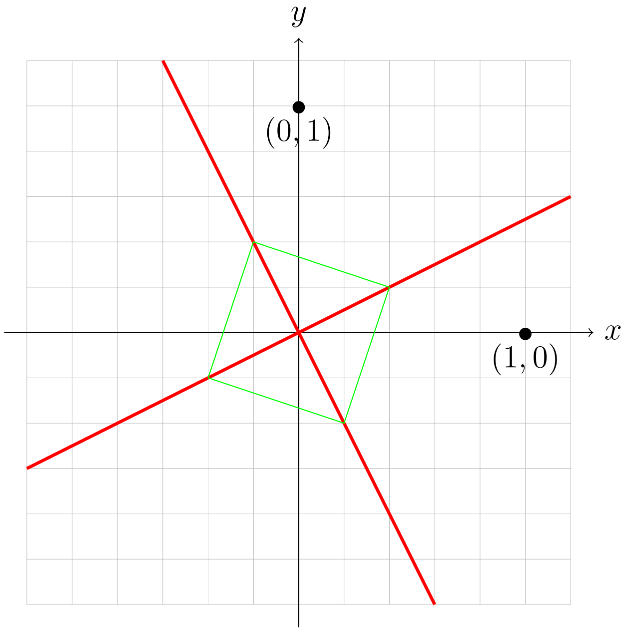
   Il est clair que $N : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$. On envisage donc les trois points caractéristiques d'une norme :
   Séparation : $N(x_1, x_2)$ étant la somme de deux termes positifs, si $N(x_1, x_2) = 0$ on a $d_1(x) = d_2(x) = 0$. En particulier, on obtient $x_1 - 2x_2 = 0$ et $2x_1 + x_2 = 0$. En ajoutant 2 fois la deuxième équation à la première, on obtient $x_1 = 0$ et donc $x_2 = 0$. Si $N(x_1, x_2) = 0$ on a donc $x = 0$.
   Homogénéité : Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} N(\lambda x) &= |\lambda x_1 - 2\lambda x_2| + |2\lambda x_1 + \lambda x_2| \\ &= |\lambda| \left(|x_1 - 2x_2| + |2x_1 + x_2|\right) \\ &= |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

   Inégalité triangulaire : Pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on remarque que, en appliquant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} N(x + y) &= |(x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)| \\ &\leq |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |2x_1 + x_2| + |2y_1 + y_2| \\ &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

4. Dessiner la boule unité pour la norme N.

   On note que l'expression de N dépend du signe de $x_1 - 2x_2$ et de $2x_1 + x_2$. Ceci correspond au découpage de $\mathbb{R}^2$ en les quatre quarts de plan délimité par les deux droites D et $D^\perp := \{2x_1 + x_2 = 0\}$.
   Si $x_1 - 2x_2 > 0$, et $2x_1 + x_2 > 0$, $N(x) < 1$ équivaut à
   $$x_1 - 2x_2 + 2x_1 + x_2 < 1 \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 < 1.$$

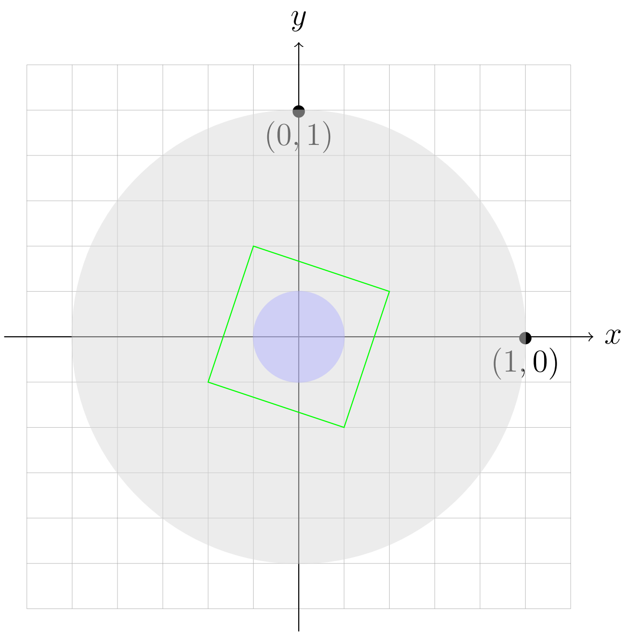
Ceci correspond au triangle délimité par les trois droites $D, D^{\perp}$ et la droite d'équation $3x_1 - x_2 = 1$ ou au triangle dont les sommets sont l'origine, $(2/5, 1/5)$ et $(1/5, -2/5)$. Par symétrie, la boule unité pour N est donc le quadrilatère dont les sommets sont les points de coordonnées $(-2/5, -1/5), (1/5, -2/5), (2/5, 1/5), (-1/5, 2/5)$.



5. Montrer que N est $\|\|_2$ sont équivalentes.

   La boule unité pour la norme N contient la boule euclidienne de rayon $1/5$ et est contenue dans la boule euclidienne de rayon 1 (voir l'illustration ci-dessous, la boule euclidienne de rayon $1/5$ est en bleu et la boule euclidienne de rayon 1 en gris). Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en considérant que $x/N(x)$ se trouve sur le bord de la boule unité pour N, on obtient que :

$$1/5 \leq \|x/N(x)\|_2 \leq 1 \quad \text{et donc} \quad \frac{N(x)}{5} \leq \|x\|_2 \leq N(x).$$



Exercice 2. Soit la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, \phi)$ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?

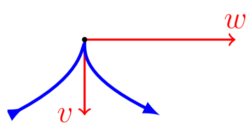
   On a $x(-t) = -t - \tanh(-t) = -(t - \tanh(t)) = -x(t)$ et $y(-t) = 1/\cosh(-t) = 1/cosh(t) = y(t)$. Ainsi, on remarque que le support de la courbe Γ admet une symétrie axiale par rapport à l'axe Oy.

2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2(1 - 2\sinh^2 t)/\cosh^4 t \\ (5\tanh t - 6\tanh^3 t)/\cosh t \end{pmatrix}$) et déterminer si Γ à un/des point(s) stationnaire(s).

   On a $\phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 - 1/\cosh^2 t \\ -\sinh t/\cosh^2 t \end{pmatrix}$ et On a $\phi''(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh t/\cosh^3 t \\ (2\sinh^2 t - \cosh^2 t)/\cosh^3 t \end{pmatrix}$ L'unique point stationnaire ($\phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) est en $t = 0$.

3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\phi(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).

   On a $\phi''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, avec les notations du cours : on a $p = 2$ et $q = 3$. C'est donc un point de rebroussement de 1ère espèce admettant une tangente verticale :



4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position relative).

   On a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. La courbe Γ admet dont une asymptote horizontale en $t = +\infty$. De plus, on a $y(t) > 0$ et Γ est située au dessus de son asymptote.

5. Compléter le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		∞
signe de $x'(t)$		+	0	+	
variation de $x(t)$		$\nearrow$		$\nearrow$	
signe de $y'(t)$		+	0	-	
variation de $y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

6. Sur le graphique suivant, tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.