Contrôle continu 1

Exercice 1. Soit $\Gamma = (\gamma, [-\pi, \pi])$ la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \frac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{pmatrix}$.

1. Etudier la parité des fonctions coordonnées de γ. En déduire les symétries de la courbe.

   On a $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$. La courbe est symétrique par rapport à Oy. On pourrait se contenter d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$et compléter par symétrie.

2. Calculer γ'.

   On a $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = \frac{\sin t \cos t(\cos t - 4)}{(2-\cos t)^2}$.

3. Donner les points critiques de γ.

   La fonction x' s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$ et y' s'annule en $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$. Γ admet donc deux point critiques en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

4. Faire un DL de γ en $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = -\frac{\pi}{2}$. En déduire la nature de ces points. Indication : On donne $y''(t) = \frac{8\sin^2(t) - \cos^4(t) + 6\cos^3(t) - 8\cos^2(t)}{(2-\cos(t))^3}$ et $y'''(t) = -\frac{24\sin^3(t) + \sin(t)(\cos^4(t) - 8\cos^3(t) + 44\cos^2(t) - 64\cos(t))}{(2-\cos(t))^4}$.

   On a pour tout h suffisament petit en module,

$$\phi\left(\tfrac{\pi}{2} + h\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} h^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} h^3 + o(|h|^3).$$

   Avec les notations du cours, on a $p = 2$ et $q = 3$ et c'est un point de rebroussement de première espèce. La tangente est l'axe des ordonnées (vecteur directeur $(-1, 1)/2$). De même, on a pour tout h suffisament petit en module,

$$\phi\left(-\tfrac{\pi}{2} + h\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} h^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} h^3 + o(|h|^3).$$

   Avec les notations du cours, on a $p = 2$ et $q = 3$ et c'est un point de rebroussement de première espèce. La tangente est l'axe des ordonnées (vecteur directeur $(1, 1)/2$).

5. Faire le tableau de variation de γ.

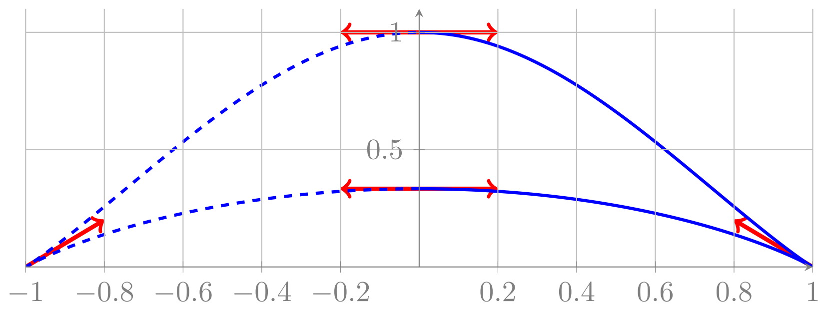
   On donne le tableau de variation sur l'intervalle $[0, \pi]$, on en déduit les variations sur $[-\pi, 0]$ avec la question 1.

t	0		$\pi/2$		π
signe de $x'(t)$		+	0	-	
variation de $x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
signe de $y'(t)$	0	-	0	+	0
variation de $y(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1/3

6. Pour quels $t \in [-\pi, \pi]$, la courbe Γ admet-elle une tangente horizontale ?

   Γ admet une tangeante horizontale en les t pour lesquels y' s'annule. En clair : $t = 0, \pi, -\pi$.

7. Tracer la courbe.



Exercice 2. (Longueur de courbes) Calculer la longueur de la courbe paramétrée suivante $\gamma(t) = ((1-t)^2e^t, 2(1-t)e^t)$, $t \in [0, 1]$.

On a $\gamma'(t) = (-2(1-t)e^t + (1-t)^2e^t, -2e^t + 2(1-t)e^t = ((t^2-1)e^t, -2te^t)$. Il vient

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|^2 &= (t^2-1)^2e^{2t} + 4t^2e^{2t} \\
&= ((t^2-1)^2 + 4t^2)e^{2t} \\
&= (t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2)e^{2t} \\
&= (t^4 + 2t^2 + 1)e^{2t} \\
&= (t^2+1)^2e^{2t}
\end{aligned}$$

La longueur de γ est donc $\int_0^1 \sqrt{(t^2+1)^2e^{2t}}dt = \int_0^1 (t^2+1)e^t dt$. Une double intégration par parties en intégrant e^t et en dérivant (t^2+1) donne $L = 2e - 3$.

Exercice 3. (Une norme sur $\mathbb{R}^2$) Soit $N(x, y) = \max\left\{\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|\right\}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

On remarque tout d'abord que $N(x, y) = \max\{\|(x, y)\|_2, |x-y|\}$.

(a) Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $N(\lambda x, \lambda y) = \max\{|\lambda|\,\|(x, y)\|_2, |\lambda|\,|x-y|\} = |\lambda| \max\{\|(x, y)\|_2, |x-y|\}$
$|\lambda|\,N(x, y)$.

(b) Séparabilité : clairement $N(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. De plus $N(x, y) = 0$ ssi $\begin{cases} \|(x, y)\|_2 = 0 \\ \text{et} \\ |x-y| \end{cases}$ ssi $x = y = 0$ (car $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$).

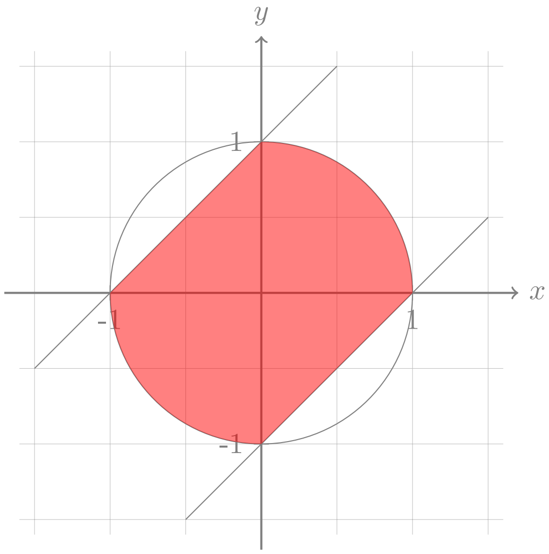
(c) Inégalité triangulaire : soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
N(x+z, y+t) &= \max\{\|(x+z, y+t)\|_2, |x+z-y-t|\} \\
&\leq \max\{\|(x, y)\|_2 + \|(z, t)\|_2, |x-y| + |z-t|\} \\
&\leq \max\{\|(x, y)\|_2, |x-y|\} + \max\{\|(z, t)\|_2 + |z-t|\} \\
&= N(x, y) + N(z, t)
\end{aligned}$$

2. Calculer la norme N des points suivants : $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

On a $N(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = N(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = N(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = N(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$. En d'autres termes, tous ces points sont sur le cercle unité de N.

3. Dessiner (en justifiant) la boule unité de N :



On a $N(x,y) \leq 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} \|(x,y)\|_2 \leq 1 \\ \text{et} \\ -1 \leq (x-y) \leq 1 \end{cases}$$

La première condition est satisfaite pour les points du plan situés dans le cercle unité. La seconde condition est satisfaite pour les points du plan situés dans la bande délimité par les droites d'équation $y = x+1$ et $y = x-1$. L'intersection de ces deux domaines est la boule unité de N.