Université Montpellier 2 — Année 2014-2015

HLMA 410

Correction du contrôle continu 1

Exercice 1. (Question de cours) Rappeler la définition d'un produit scalaire puis la définition d'espace euclidien.

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive. Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

Exercice 2. (Une norme sur $\mathbb{R}^2$) Soit $N(x,y) = \max\left\{\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|\right\}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

   On remarque tout d'abord que $N(x,y) = \max\{\|(x,y)\|_2, |x-y|\}$.

   (a) Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $N(\lambda x, \lambda y) = \max\{|\lambda|\,\|(x,y)\|_2, |\lambda|\,|x-y|\} = |\lambda| \max\{\|(x,y)\|_2, |x-y|\} = |\lambda|\, N(x,y)$.

   (b) Séparabilité : clairement $N(x,y) \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. De plus $N(x,y) = 0$ ssi $\begin{cases} \|(x,y)\|_2 = 0 \\ \text{et} \\ |x-y| \end{cases}$ ssi $x = y = 0$ (car $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$).

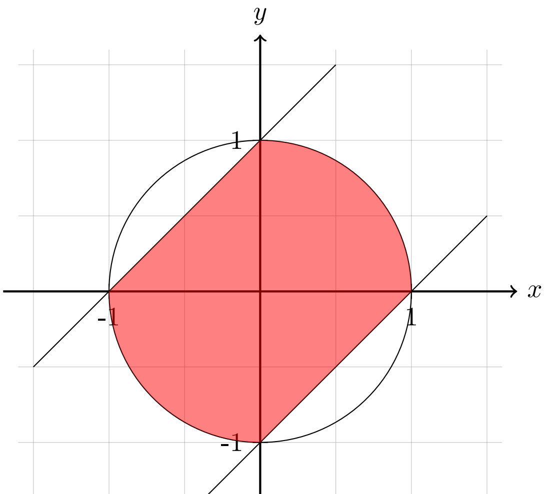
   (c) Inégalité triangulaire : soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} N(x+z, y+t) &= \max\{\|(x+z, y+t)\|_2, |x+z-y-t|\} \\ &\leq \max\{\|(x,y)\|_2 + \|(z,t)\|_2, |x-y| + |z-t|\} \\ &\leq \max\{\|(x,y)\|_2, |x-y|\} + \max\{\|(z,t)\|_2 + |z-t|\} \\ &= N(x,y) + N(z,t) \end{aligned}$$

2. Calculer la norme N des points suivants : $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

   On a $N(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = N(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = N(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = N(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$. En d'autres termes, tous ces points sont sur le cercle unité de N.

3. Dessiner (en justifiant) la boule unité de N :



On a $N(x,y) \leq 1$ ssi $\begin{cases} \|(x,y)\|_2 \leq 1 \\ \text{et} \\ -1 \leq (x-y) \leq 1 \end{cases}$

La première condition est satisfaite pour les points du plan situés dans le cercle unité. La seconde condition est satisfaite pour les points du plan situés dans la bande délimité par les droites d'équation $y = x+1$ et $y = x-1$. L'intersection de ces deux domaines est la boule unité de N.

Exercice 3. (Géométrie vectorielle) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère canonique (O, i, j, k), on considère les points $A = (6,2,4)$, $B = (2,1,1)$ et $C = (\alpha, 3, 7)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles :
   (a) les points A, B et C sont alignés.

   A, B et C sont alignés ssi $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 0$ ssi $\|(0, 12 - 3(\alpha - 6), -4 + \alpha - 6)\| = 0$ ssi $\alpha = 10$.

   (b) le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est unitaire.

   Pas de solution car $\|\overrightarrow{OC}\|^2 = 1$ ssi $\alpha^2 + 9 + 49 = 1$. Cette dernière équation n'a pas de solution α réelle.

2. Déterminer une base orthonormale dont le premier vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.

   Prendre :
   (a) $e_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = (6, 2, 4)/\sqrt{56}$.
   (b) $v = (-2, 6, 0)$ et $e_2 = \frac{v}{\|v\|} = (-2, 6, 0)/\sqrt{40}$.
   (c) $e_3 = e_1 \wedge e_2 = (-24, -8, 40)/\sqrt{40 \times 56}$.

3. Quelle est la distance entre le point de coordonnées $(6, 3, 7)$ et la droite contenant les points A et B.

   La distance entre le point $M = (6, 3, 7)$ est donnée par $\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|(0,-12,4)\|}{\sqrt{16+1+9}} = \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{26}}$.

Exercice 4. (Une fonction de plusieurs variables) Soit la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{1 + \frac{x}{y}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Ce domaine est-il ouvert ? est-il fermé ?

   La fonction est définie pour $\begin{cases} y \neq 0 \\ \text{et } 1 + \frac{x}{y} \geq 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y \neq 0 \\ \text{et} \\ (x \geq -y \text{ et } y \geq 0) \text{ ou } (x \leq -y \text{ et } y \leq 0) \end{cases}$

   Ainsi l'ensemble $\mathcal{D}$:
   (a) n'est pas fermé car la suite $(0, 1/n)$ qui est dans $\mathcal{D}$ converge vers $(0, 0) \notin \mathcal{D}$...
   (b) n'est pas ouvert car le point $(1, -1)$ n'est pas un point intérieur à $\mathcal{D}$.

2. Déterminer les ensembles de niveau de f.

   L'image de f est $\mathbb{R}^+$. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on a : $L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y(\lambda^2 - 1) = x\} \cap \mathcal{D}$ qui est la droite (sans l'origine !) de coefficient directeur $1/(\lambda^2 - 1)$.

3. Représenter le domaine $\mathcal{D}$ et les ensembles de niveau $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.