TD 4 - Marche Aléatoire

Exercice 1. Soit (S_n) une marche aéatoire issue de $S_0 = 0$.

1. Calculer la loi de S_1, S_2 et S_3.

   - $S_1 = X_1$ prend les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$.
   - $S_2 = X_1 + X_2$ prend les valeurs -2 avec proba $1/4$, 0 avec proba $1/2$, 2 avec proba $1/4$.
   - $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ prend les valeurs -3 avec proba $1/8$, -1 avec proba $3/8$, 1 avec proba $3/8$, 3 avec proba $1/8$

2. Calculer la loi de $(n + S_n)/2$ pour tout n.

   Posons $Y_k = (X_k + 1)/2$. Alors on a que les v.a. Y_k sont iid de loi $B(1/2)$. Ainsi $(S_n + n)/2 = \sum_{k=1}^n (X_k + 1)/2 = \sum_{k=1}^n Y_k$ suit la loi $B(n, 1/2)$.

3. En déduire la loi de S_n pour tout n.

   $S_n = 2((S_n + n)/2) - n$ donc la loi de S_n est une loi binomiale décalée : S_n prend les valeurs $2k - n$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} 2^{-n}$.

Exercice 2. Cent personnes font la queue à un guichet de cinéma. La place coûte 5 € et 60 personnes ont un billet de 5 € tandis que les 40 autres ont des billets de 10 €. Combien faut-il prévoir de billets de 5 € en caisse pour que toutes les spectatrices et les spectateurs soient servis dans leur ordre d'arrivée avec une probabilité d'au moins 95% ?

On modélise l'argent en caisse par les chemins d'une marche aléatoire. Mais attention, ici la loi des incréments n'est pas i.i.d. : c'est un tirage sans remise dans une population de 60 $+1$ contre 40 -1. Soit donc S_n le nombre de billets de 5€ en caisse après le passage de la n-ème personne. On a $S_0 = x$ inconnue et $S_{100} = 60 - 40 + x = 20 + x$ puisque 60 personnes ont payé avec un billet de 5€ et qu'il a fallu rendre la monnaie au 40 personnes payant avec un billet de 10€.
Un tirage où toutes les spectatrices et les spectateurs sont servis correspond à un chemin de $(0, x)$ à $(100, 20 + x)$ qui ne touche pas -1. Dénombrons ces chemins. Le nombre de chemins de $(0, x)$ à $(100, 20 + x)$ qui ne touchent pas -1 est égal

- au nombre de chemins de $(0, x + 1)$ à $(100, 20 + x + 1)$ qui ne touchent pas 0, par translation verticale ;
- au nombre total de chemins de $(0, x + 1)$ à $(100, 20 + x + 1)$ moins le nombre de chemins de $(0, x + 1)$ à $(100, 20 + x + 1)$ qui passent par 0 ;
- au nombre total de chemins de $(0, x+1)$ à $(100, 20+x+1)$ moins le nombre total de chemins de $(0, x + 1)$ à $(100, -(21 + x))$ par le principe de réflexion.

La probabilité de satisfaire tout le monde est alors le nombre de chemins ci-dessus divisé par le nombre total de chemins de $(0, x)$ à $(100, 20 + x)$ puisqu'ils sont tous équiprobables (cela revient à choisir une permutation de l'ordre de passage). On obtient ainsi que cette probabilité vaut

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{100}{60} - \binom{100}{50+11+x}}{\binom{100}{60}} \\ &= 1 - \frac{60!40!100!}{100!(61 + x)!(39 - x)!} \\ &= 1 - \frac{60!}{(61 + x)!} \frac{40!}{(39 - x)!}. \end{aligned}$$

Les valeurs de p pour x entre 0 et 5 sont

x	0	1	2	3	4	5
p	0.3443	0.5875	0.7512	0.8562	0.9203	0.9578

On constate qu'à partir de $x = 5$ cette probabilité dépasse 95%.

Exercice 3. Si a et b sont deux entiers strictement positifs, montrer qu'il y a autant de chemins de 0 à $a+b$ que de chemins de même longueur de 0 à $a-b$ passant par a.

Le nombre de chemins de $(0,0)$ à $(n, a+b)$ est égal

- au nombre de chemins de $(0,-a)$ à (n,b) par translation verticale ;
- au nombre de chemins de $(0,-a)$ à $(n,-b)$ passant par 0 par le principe de réflexion, puisque a et b ont le même signe ;
- au nombre de chemins de $(0,0)$ à $(n, a-b)$ passant par a par translation verticale.

Exercice 4. Une joueuse dispose de 10 € pour jouer à une machine à sous. A chaque partie, elle met 1 € dans la machine et celle-ci rend 2 € ou rien avec équiprobabilité.

1. Modéliser la fortune de la joueuse par une marche aéatoire.

   Modélisons la fortune de la joueuse par une marche aéatoire. Soit S_n la fortune de la joueuse après le n-ème jeu. On sait que $S_0 = 10$, et pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ où X_n représente le gain du n-ème jeu. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes, de même loi donnée par

   $$\mathbb{P}(X_1 = -1+2) = \mathbb{P}(X_1 = -1+0) = \frac{1}{2}.$$

   Donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est bien une marche aléatoire simple symétrique.

   Soit N le nombre de parties jouées jusqu'à la ruine de la joueuse.

2. Quelle est la parité de N ? Quelle valeur minimale peut-il prendre ?

   Comme la richesse initiale est paire, la joueuse ne peut être ruinée qu'en un nombre pair de parties. De plus, comme elle perd au maximum 1 à chaque partie, elle ne peut pas être ruinée avant la fin de la 10-ème partie.

3. Calculer la loi de N.

   Calculons la loi de N. Pour tout $n \geqslant 5$, on a

   $$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N = 2n)\\ &= \mathbb{P}(S_0 = 10, S_1 > 0, \ldots, S_{2n-3} > 0, S_{2n-2} > 0, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0)\\ &= \mathbb{P}(S_0 = 10, S_1 > 0, \ldots, S_{2n-3} > 0, S_{2n-2} = 2, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0).\end{aligned}$$

   La probabilité cherchée est donc égale au nombre de chemins de $(0,10)$ à $(2n,0)$ ne touchant pas 0 avant $2n$, divisé par 2^{2n} qui correspond au nombre total de chemins de longueur $2n$.
   Le nombre de chemins de $(0,10)$ à $(2n,0)$ ne touchant pas 0 avant $2n$ est égal

   - au nombre de chemins de $(0,10)$ à $(2n-1,1)$ ne touchant pas 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0,10)$ à $(2n-1,1)$ moins le nombre de chemins de $(0,10)$ à $(2n-1,1)$ touchant 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0,10)$ à $(2n-1,1)$ moins le nombre total de chemins de $(0,10)$ à $(2n-1,-1)$ par le principe de réflexion.

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=2n) &= \frac{1}{2^{2n}}(\binom{2n-1}{n-5} - \binom{2n-1}{n-6}) \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!}{(n-6)!(n+4)!}(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n+5}) \\ &= \frac{10}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!}{(n-5)!(n+5)!} \\ &= \frac{5}{n2^{2n}}\binom{n+5}{2n}.\end{aligned}$$

Exercice 5. On considère deux marches aléatoires indépendantes issues de 0 et de 2 respectivement. Quelle est la probabilité que ces deux marches se retrouvent à un moment au même endroit ?

Supposons que les deux marches se retrouvent en a à la date m. En faisant la symétrie par rapport à la verticale en m pour le chemin issu de 2, on voit qu'on a autant de chance que les deux marches se croisent en (m, a) que de chances de partir de $(0, 0)$ pour arriver en $(2m, 2)$.
Réciproquement, si on a un chemin de $(0, 0)$ à $(n, 2)$, alors $n = 2m$ est nécessairement pair, et en faisant la symétrie par rapport à la verticale en m, on reconstitue deux chemins qui partent de 0 et 2 respectivement et sont au même point en m.
Donc la probabilité que les marches se retrouvent au même endroit est exactement $\mathbb{P}(T_2 < +\infty | S_0 = 0)$ la probabilité d'atteindre 2 partant de 0, qui vaut 1 d'après le cours.

Exercice 6. Deux joueurs, Julie et Thomas s'affrontent dans un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. Avant chaque lancer, les deux joueurs posent chacun 1 € sur la table ; si le tirage donne pile, Thomas empoche les 2 €, si c'est face, c'est Julie qui gagne les mises. Au début du jeu, Thomas a 10 pièces de 1 €. Il ignore la fortune x de Julie. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux participants est ruiné.

1. Modéliser la richesse de Thomas et son évolution par une marche aéatoire (S_n).

   Modélisons la richesse de Thomas et son évolution par une marche aéatoire. Soit S_n la richesse de Thomas après le n-ème jeu. On sait que $S_0 = 10$, et pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ où X_n représente le gain du n-ème jeu. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes, de même loi donnée par

   $$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

   Donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple symétrique.

2. Modéliser la richesse de Julie et son évolution par une marche aéatoire (R_n).

   Modélisons la richesse de Julie et son évolution par une marche aéatoire. Quand Thomas perd, Julie gagne, et vice-versa. Donc la richesse de Julie après le n-ème jeu vaut R_n avec $R_0 = x$ et $R_{n+1} = R_n - X_{n+1}$. Comme $-X_k$ a la même loi que X_k, c'est encore une marche aléatoire simple symétrique.

3. Calculer $R_0 + S_0$. Quelle est la relation entre R_n et S_n après n parties ?

   A l'instant initial, $S_0 + R_0 = 10 + x$. Quand Thomas perd, Julie gagne, et vice-versa, donc pour tout entier n, on a encore $R_n + S_n = 10 + x$, car il n'y a pas d'apport extérieur d'argent ni de perte extérieure d'argent.

   On suppose maintenant que la richesse de Julie est infinie, et que le jeu s'est arrêté par la ruine de Thomas après 26 lancers.

4. Décrire la partie par un chemin dont on précisera les extrémités et les spécificités.

   Une partie se terminant par la ruine de Thomas après 26 lancers correspond à un chemin de $(0, 10)$ à $(26, 0)$ qui ne touche pas 0 avant 26.

5. Combien y a-t-il de chemins quelconques ayant les mêmes extrémités ?

   Le nombre total de chemins de $(0, 10)$ à $(26, 0)$ est $\binom{26}{13-5} = \binom{26}{8} = 1\ 562\ 275$.

6. Combien y a-t-il de chemins possibles correspondant à cette partie ?

   Le nombre de chemins de $(0, 10)$ à $(26, 0)$ qui ne touchent pas 0 avant 26 est égal
   - au nombre de chemins de $(0, 10)$ à $(25, 1)$ qui ne touchent pas 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0, 10)$ à $(25, 1)$ moins le nombre de chemins de $(0, 10)$ à $(25, 1)$ qui touchent 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0, 10)$ à $(25, 1)$ moins le nombre total de chemins de $(0, 10)$ à $(25, -1)$ par le principe de réflexion.

   Ce nombre vaut donc $\binom{25}{8} - \binom{25}{7} = 600\ 875$.

   On suppose à nouveau que la durée de jeu T est inconnue

7. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 15$.

   Comme la richesse initiale de Julie est $15 > 10$, la seule possibilité est que Thomas a perdu les 10 premières parties. Ceci arrive avec probabilité $2^{-10} = 0.00098$

8. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 10$.

   Il y a deux possibilités : Thomas a perdu les 10 parties ou Julie a perdu les 10 parties. Ces deux événements étant incompatibles, la probabilité cherchées est $2 \times 2^{-10} = 2^{-9} = 0.00195$

9. Calculer $\mathbb{P}(T = 10)$ si la richesse initiale de Julie est $x = 6$.

   Il y a ici plus de possibilités. Soit Thomas a perdu les 10 parties ce qui arrive avec probabilité 2^{-10}, soit c'est Julie qui a perdu, et la partie correspond alors à un chemin de $(0, 6)$ à $(10, 0)$ qui ne touche pas 0 avant 10. Dénombrons ces chemins : Le nombre de chemins de $(0, 6)$ à $(10, 0)$ qui ne touchent pas 0 avant 10 est égal
   - au nombre de chemins de $(0, 16)$ à $(9, 1)$ qui ne touchent pas 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0, 6)$ à $(9, 1)$ moins le nombre de chemins de $(0, 6)$ à $(9, 1)$ qui touchent 0 ;
   - au nombre total de chemins de $(0, 6)$ à $(9, 1)$ moins le nombre total de chemins de $(0, 6)$ à $(9, -1)$ par le principe de réflexion.

   Ce nombre vaut donc $\binom{9}{7} - \binom{9}{8} = 27$. Donc finalement $\mathbb{P}(T = 10) = 2^{-10} + \frac{27}{2^{10}} = 28 \cdot 2^{-10} = 0.02734$.

10. Si x est impair que peut-on dire du perdant en fonction de la parité de T ?

Comme la richesse initiale de Thomas est paire, Thomas ne peut perdre qu'en un nombre pair de coups. Si la richesse de Julie est impaire, elle ne peut perdre qu'en un nombre impair de coups. Donc si T est pair, Thomas a perdu, si T est imapair, Julie a perdu.

Exercice 7. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi uniforme sur

$$\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}.$$

On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = S_{n-1} + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. On dit que (S_n) est une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$. Pour tout $n \geqslant 1$ on note X_n la première coordonnée de Z_n et Y_n sa deuxième coordonnée, et on introduit $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$.

1. Identifier les lois marginales de X_n et Y_n.

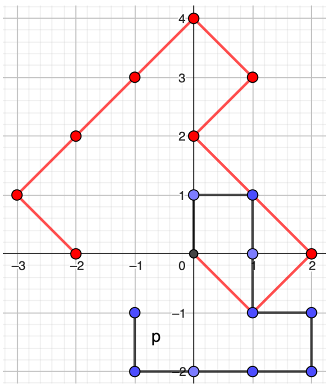
   $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/4$
   $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1/2$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/4$

2. Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

   Non car $\mathbb{P}(X_n = 0 = Y_n) = 0 \neq \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1/4$.

3. Identifier les lois de U_n et V_n.

   On a $\mathbb{P}(U_n = -1) = \mathbb{P}(U_n = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(V_n = -1) = \mathbb{P}(V_n = 1) = 1/2$. Il s'agit d'une transformation affine de (X,Y) qui correspond à une rotation de $-3\pi/2$ et une dilatation de $\sqrt{2}$.

4. Les variables U_n et V_n sont-elles indépendantes ?

   Oui car
   $\mathbb{P}(U_n = V_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 0) = 1/4 = \mathbb{P}(U_n = 1)\mathbb{P}(V_n = 1)$,
   $\mathbb{P}(U_n = V_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = -1, Y_n = 0) = 1/4 = \mathbb{P}(U_n = -1)\mathbb{P}(V_n = -1)$,
   $\mathbb{P}(U_n = 1, V_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 0, Y_n = 1) = 1/4 = \mathbb{P}(U_n = 1)\mathbb{P}(V_n = -1)$,
   $\mathbb{P}(U_n = -1, V_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0, Y_n = -1) = 1/4 = \mathbb{P}(U_n = -1)\mathbb{P}(V_n = 1)$.

5. Calculer $\mathbb{P}(S_n = (0,0))$.

$$\begin{aligned}(S_n = (0,0)) &= \Big(\sum_{k=1}^n X_k = 0, \sum_{k=1}^n Y_k = 0\Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n Y_k = 0\Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^n U_k = 0, \sum_{k=1}^n V_k = 0\Big)\end{aligned}$$

Or les suites (U_n) et (V_n) sont indépendantes, donc
$\mathbb{P}(S_n = (0,0)) = \mathbb{P}(S_n^U = 0)\mathbb{P}(S_n^V = 0)$
où (S_n^U) et (S_n^V) sont des marches aléatoires simples symétriques en dimension 1, issues de 0, avec incréments (U_k) et (V_k) respectivement. D'après le cours, cette probabilité est nulle si n est impair et
$\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0)) = \mathbb{P}(S_{2n}^U = 0)\mathbb{P}(S_{2n}^V = 0) = \left(\frac{1}{4^n} C_{2n}^n\right)^2$. En suivant un raisonnement analogue à celui du cours, on peut montrer que la marche aléatoire en dimension 2 est encore récurrente (ce qui ne sera plus vrai à partir de la dimension 3).