TD 2

Les exercices marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

2.1 Variables aléatoires

Exercice 1. On lance deux dés non pipés et on note X la moyenne des valeurs obtenues. Montrer que X est une variable aléatoire réelle discrète et donner sa loi de probabilité.

On pose $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ muni de la tribu de ses parties et de l'équi-probabilité. Alors $X(\omega_1,\omega_2) = (\omega_1+\omega_2)/2$. Pour tout $x \in \{1, 1.5, 2, \ldots, 6\}$,

$$(X = x) = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega; (\omega_1+\omega_2)/2 = x\} \in \mathcal{P}(\Omega),$$

donc X est bien une variable aléatoire. Elle a un support discret $\{1, 1.5, 2, \ldots, 6\}$, c'est donc une variable discrète.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = 1/36\\
\mathbb{P}(X = 1.5) &= \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/36\\
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}) = 3/36\\
\mathbb{P}(X = 2.5) &= \mathbb{P}(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = 4/36\\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}) = 5/36\\
\mathbb{P}(X = 3.5) &= \mathbb{P}(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}) = 6/36\\
\mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}) = 5/36\\
\mathbb{P}(X = 4.5) &= \mathbb{P}(\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}) = 4/36\\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(\{(4,6),(6,4),(5,5)\}) = 3/36\\
\mathbb{P}(X = 5.5) &= \mathbb{P}(\{(5,6),(6,5)\}) = 2/36\\
\mathbb{P}(X = 6) &= \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = 1/36
\end{aligned}$$

Exercice 2. On lance trois dés non pipés et on note Y la plus grande des valeurs obtenues. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle discrète et donner sa loi de probabilité.

On modélise l'expérience par $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$ muni de la tribu de ses parties et de l'équi-probabilité. Soit X_1, X_2 et X_3 les applications de Ω dans $\{1,2,3,4,5,6\}$ définies par $X_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \omega_i$. Ces applications sont mesurables et $Y = \max\{X_1,X_2,X_3\}$ l'est donc aussi. De plus, Y est à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$, c'est donc une variable aléatoire discrète.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(\{(1,1,1)\}) = 1/6^3\\
\mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2),(2,2,2)\}) = 7/6^3
\end{aligned}$$

On a $(Y = 3) = \{\text{un 3 et des 1 et 2}\} \cup \{\text{deux 3 et des 1 et 2}\} \cup \{(3,3,3)\}$ union disjointe. De plus, $|\{\text{un 3 et des 1 et 2}\}| = 3\times 2^2$ choix de la position du 3 puis des deux valeurs restantes ; et $|\{\text{deux 3 et des 1 et 2}\}| = \binom{3}{2} \times 2$ choix des places des deux 3 puis les autres d'où

$$\mathbb{P}(Y = 3) = (12 + 6 + 1)/6^3 = 19/216.$$

Avec le même raisonnement, on obtient

$$\mathbb{P}(Y=4) = (\binom{3}{1} \times 3^2 + \binom{3}{2} \times 3 + 1)/6^3 = 37/216$$
$$\mathbb{P}(Y=5) = (\binom{3}{1} \times 4^2 + \binom{3}{2} \times 4 + 1)/6^3 = 61/216$$
$$\mathbb{P}(Y=6) = (\binom{3}{1} \times 5^2 + \binom{3}{2} \times 5 + 1)/6^3 = 91/216.$$

On vérifie que la somme des probabilités calculées fait bien 1.
On peut aussi faire un raisonnement plus simple en disant que $(Y=n) = (\text{tous} \leq n) \setminus (\text{tous} \leq n-1)$.

Exercice 3. Une urne contient 8 boules vertes et 4 boules jaunes. On tire successivement les boules sans remise. On appelle X le rang de la première boule jaune tirée. Donner la loi de X.

On modélise l'expérience par $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ qui donne

$$\mathbb{P}(X=1) = 4/12 = 1/3.$$

Soit V_i l'événement la i-ème boule tirée est verte et J_i la i-ème boule tirée est jaune.

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(V_1 \cap J_2) = \mathbb{P}(J_2|V_1)\mathbb{P}(V_1) = 4/11 \times 8/12,$$
$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap J_3) = \mathbb{P}(J_3|(V_1 \cap V_2))\mathbb{P}(V_2|V_1)\mathbb{P}(V_1) = 4/10 \times 7/11 \times 8/12,$$

De même

$$\mathbb{P}(X=4) = 4/9 \times 6/10 \times 7/11 \times 8/12,$$
$$\mathbb{P}(X=5) = 4/8 \times 5/9 \times 4/10 \times 3/11 \times 2/12,$$
$$\mathbb{P}(X=6) = 4/7 \times 4/8 \times 5/9 \times 4/10 \times 3/11 \times 2/12,$$
$$\mathbb{P}(X=7) = 4/6 \times 3/7 \times 4/8 \times 5/9 \times 4/10 \times 3/11 \times 2/12,$$
$$\mathbb{P}(X=8) = 4/5 \times 2/6 \times 3/7 \times 4/8 \times 5/9 \times 4/10 \times 3/11 \times 2/12,$$
$$\mathbb{P}(X=9) = 4/4 \times 1/5 \times 2/6 \times 3/7 \times 4/8 \times 5/9 \times 4/10 \times 3/11 \times 2/12.$$

2.2 Exemples de variables aléatoires, lois usuelles

Exercice 4. Le nombre de tablettes vendues chaque jour dans le magasin HIGHTECH suit une loi de Poisson de paramètre 2. Calculer la probabilité que dans une journée

1. on ne vende aucune tablette,

   Soit X le nombre de tablettes vendues chaque jour. $\mathbb{P}(X=0) = \exp(-2) \simeq 0.1353$

2. on vende 2 tablettes,

   $\mathbb{P}(X=2) = \exp(-2)2^2/2! \simeq 0.2707$

3. on vende au moins une tablette,

   $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - \exp(-2) \simeq 0.8647$

4. le nombre de tablettes vendues soit compris au sens large entre 1 et 4.

   $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4) = \exp(-2)(2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3! + 2^4/4!) \simeq 0.5413.$

Exercice 5.* Approximation hypergéométrique-binomiale Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres (n, p) et (X_N) une suite de variables aléatoires de loi hypergéométrique de paramètres respectifs (n, N_1, N). Montrer que pour tout entier k, on a

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N_1/N\to p}} \mathbb{P}(X_N = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_N = k) &= \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{N_1!(N-N_1)!n!(N-n)!}{k!(N_1-k)!(n-k)!(N-N_1-n+k)!N!} \\
&= \binom{n}{k}\frac{N_1!(N-N_1)!(N-n)!}{(N_1-k)!(N-N_1-n+k)!N!}
\end{aligned}$$

N, N_1, $N_1 - k$ et $N - n$ tendent vers l'infini. De plus, $N - N_1 \sim N(1 - N_1/N) \sim N(1 - p)$ tend également vers l'infini. De plus, comme k et n sont fixés, on a

$$\begin{aligned}
\frac{N_1!}{(N_1-k)!} &= N_1 \times (N_1 - 1) \times \cdots \times (N_1 - k = 1) \sim N_1^k \\
\frac{(N-N_1)!}{(N-N_1-n+k)!} &= (N - N_1) \times \cdots \times (N - N_1 - n + k + 1) \sim (N - N_1)^{n-k} \\
\frac{(N-n)!}{N!} &= \frac{1}{N \times \cdots \times (N-n+1)} \sim N^{-n},
\end{aligned}$$

ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_N = k) &\sim \binom{n}{k} N_1^k (N - N_1)^{n-k} N^{-n} \\
&\sim \binom{n}{k} (N_1/N)^k (1 - N_1/N)^{n-k} \\
&\sim \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Lors d'un sondage portant sur un grand nombre d'individus, 1% des personnes interrogées acceptent de ne pas rester anonymes et de dévoiler leur identité. Sachant que 100 personnes ont été interrogées, calculer la probabilité que

1. ces 100 personnes souhaitent rester anonymes,

   Soit X le nombre de personnes acceptant de révéler leur identité. X suit la loi binomiale de paramètres $(100, 0.01)$.
   $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{100}{0}(0.01)^0(1 - 0.01)^{100} = 0.99^{100} \simeq 0.3660$

2. 3 personnes acceptent de révéler leur identité,

   $\mathbb{P}(X=3) = \binom{100}{3}(0.01)^3(1-0.01)^{97} \simeq 0.0610$

3. plus de 4 personnes acceptent de révéler leur identité.

   $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k}(0.01)^k(1-0.01)^{100-k} \simeq 0.0184$

Exercice 7. Parmi les fonctions suivantes,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= Cx && \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\
f_2(x) &= \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{4} && \text{si } x \geq 0 \\
f_3(x) &= \frac{2}{3}(x+1) && \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\
f_4(x) &= \frac{2x}{3} && \text{si } -1 \leq x \leq 2
\end{aligned}$$

quelles sont celles qui sont des densités de probabilité ?

Toutes ces fonctions sont continues donc mesurables.
f_1 est positive et $\int f_1 = C[x^2/2]_0^2 = 4C/2 = 2C$. Donc f_1 est une densité si et seulement si $C = 1/2$.
f_2 est positive mais son intégrale sur $\mathbb{R}_+$ est infinie (f_2 tend vers $1/4$ en $+\infty$), ce n'est pas une densité.
f_3 est positive et $\int f_3 = 2/3[x^2/2 + x]_0^1 = 2/3 \times 3/2 = 1$. Donc f_3 est une densité.
f_4 est d'intégrale 1 mais n'est pas positive, ce n'est pas une densité.

2.3 Indépendance de variables aléatoires

Exercice 8. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité respective g et h, alors on sait que la loi du couple (X,Y) est le produit des lois $g(x)dx \otimes h(y)dy = g(x)h(y)dxdy$. Le couple (X,Y) a donc pour densité $f(x,y) = g(x)h(y)$. Le but de cet exercice est de montrer que la réciproque de cette propriété est également vraie. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité $f(x,y) = g(x)h(y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\int g = \int h = 1$.

1. Calculer $\mathbb{P}((X,Y) \in A)$ pout tout événement A de la forme $A =]-\infty, s] \times]-\infty, t]$.

   On a $\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \int_A g(x)h(y)dxdy$. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a aussi

   $$\int_A g(x)h(y)dxdy = \int_{-\infty}^{s} g(x)dx \int_{-\infty}^{t} h(y)dy.$$

2. Calculer les lois marginales de X et Y.

   $$\mathbb{P}(X \leq s) = \mathbb{P}(X \leq s, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{s} g(x)dx \int_{\mathbb{R}} h(y)dy = \int_{-\infty}^{s} g(x)dx \times 1,$$

   donc a pour densité g. De même, Y a pour densité h.

3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

   Soit $\mathcal{A} = \{]-\infty, s]\times]-\infty, t], (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$ une famille de boréliens de $\mathbb{R}^2$ qui engendre tous les boréliens et est stable par intersection finie. Soit $A =]-\infty, s]\times]-\infty, t] \in \mathcal{A}$. On a $\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \int_A g(x)h(y)dxdy$. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a aussi

$$\int_A g(x)h(y)dxdy = \int_{-\infty}^{s} g(x)dx \int_{-\infty}^{t} h(y)dy = \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}'(A),$$

   où $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ sont deux lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité respective g et h, ie les lois de X et Y respectivement. On a bien l'indépendance puisque $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.
   Application à retenir : si une densité jointe s'écrit comme produit d'une fonction de x et une fonction de y, alors on a directement les densités des lois marginales et les deux coordonnées sont indépendantes.

2.4 Fonction de répartition

Exercice 9. On suppose que la durée de fonctionnement X d'une ampoule électrique suit une loi exponentielle de paramètre $1/10$ (en nombre d'années).

1. Calculer la probabilité pour que X soit de plus de 3 ans.

   $\mathbb{P}(X \geq 3) = \int_3^\infty \exp(-x/10)/10dx = [-\exp(-x/10)]_3^\infty = \exp(-3/10) \simeq 0.74$

2. On suppose que l'ampoule fonctionne depuis sept ans, calculer la probabilité qu'elle fonctionne encore dans 3 ans.

   Par la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle $\mathbb{P}(X > 10|X > 7) = \mathbb{P}(X > 3) = \exp(-3/10)$.

Exercice 10. Soit $a < b$.

1. Calculer la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

   $F(t) = 0$ pour $t \leq a$, $F(t) = 1$ pour $t \geq b$ et pour $a \leq t \leq b$, $F(t) = \frac{t-a}{b-a}$.

2. En déduire la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   Il suffit de prendre $a = 0$ et $b = 1$. $F(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $F(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et pour $0 \leq t \leq 1$, $F(t) = t$.

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $V = a + (b - a)U$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$.

   Calculons la fonction de répartition de V.
   $F_V(t) = \mathbb{P}(V \leq t) = \mathbb{P}(a + (b-a)U \leq t) = \mathbb{P}(U \leq (t-a)/(b-a)) = \frac{t-a}{b-a}\mathbb{1}_{0\leq(t-a)/(b-a)\leq 1} + \mathbb{1}_{(t-a)/(b-a)\geq 1} = \frac{t-a}{b-a}\mathbb{1}_{a\leq t\leq b} + \mathbb{1}_{t\geq b}$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre α et $Y = [X] + 1$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Identifier la loi de Y.

Y prend des valeurs entières strictement positives et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=n) &= \mathbb{P}([X]+1=n) = \mathbb{P}([X]=n-1) = \mathbb{P}(n-1 \leq X < n)\\ &= \int_{n-1}^{n} \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha n} + e^{-\alpha(n-1)} = (e^{-\alpha})^{n-1}(1-e^{-\alpha})\end{aligned}$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\alpha}$.

Exercice 12.* Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y=\exp(X)$. On dit que Y suit une loi log-normale.

1. Calculer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.

   Pour $t>0$, on a

   $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\exp(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \log(t)) = F_X(\log(t)).$$

   Pour $t \leq 0$, $F_Y(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = 0$.

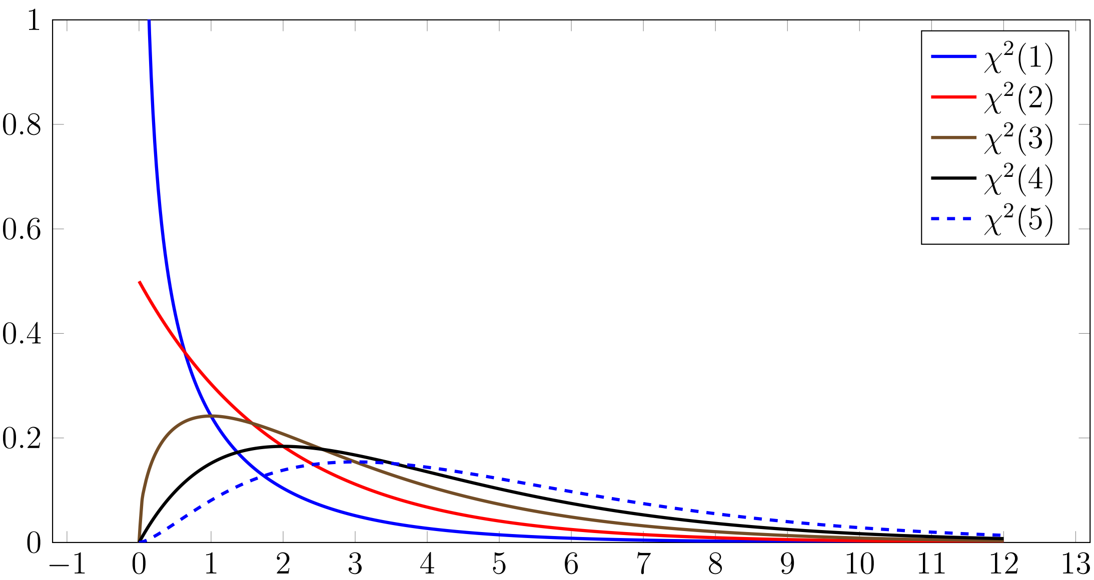
2. Montrer que Y a une densité et la calculer.

   F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $F_Y'(t)=0$ pour $t \leq 0$, et pout $t>0$

   $$F_Y'(t) = \frac{1}{t}F_X'(\log(t)) = \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\log(t)^2/2} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\log(t)^2/2}$$

   donc la densité de Y est $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\log(x)^2/2}\mathbb{1}_{x>0}$.

Exercice 13.* Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y=X^2$. On dit que Y suit une loi du chi-deux à un degré de liberté notée $\chi^2(1)$.



1. Calculer la fonction de répartition de $-X$ en fonction de celle de X.

   On fait le changement de variable $x=-x$

   $$\begin{aligned}F_{-X}(t) = \mathbb{P}(-X \leq t) = \mathbb{P}(X \geq -t) &= \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = F_X(t)\end{aligned}$$

   $-X$ suit encore une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Calculer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.

   Pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) \\ &= \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X \le -\sqrt{t}) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) - \mathbb{P}(-X \ge \sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) - (1 - F_{-X}(\sqrt{t})) = F_X(\sqrt{t}) - 1 + F_X(\sqrt{t}) = 2F_X(\sqrt{t}) - 1. \end{aligned}$$

   Pour $t \le 0$, $F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = 0$.

3. Montrer que Y a une densité et la calculer.

   F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $F_Y'(t) = 0$ pour $t \le 0$, et pout $t > 0$

$$F_Y'(t) = 2\frac{1}{2\sqrt{t}} 2F_X'(\sqrt{t})$$

   donc la densité de Y est $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x>0}$.

Exercice 14. Les mesures effectuées par un appareil de pesage sont entachées d'une imprécision aléatoire de loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$: pour un objet de poids exact p, l'appareil donne une mesure $Y = p + X$ où l'erreur X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La fonction de répartition F de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est donnée table 1.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $F(-t) = 1 - F(t)$.

   Par définition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$\begin{aligned} F(-t) &= \mathbb{P}(X \le -t) \\ &= \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

   par symétrie (ou en faisant le changement de variable $u = -x$). D'où

$$\begin{aligned} F(-t) &= \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \mathbb{P}(X > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \le t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

2. Donner la probabilité que l'erreur X soit plus grande que 1/2, que $|X|$ soit plus grande que 1/2.

   $\mathbb{P}(X > 1/2) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1/2) = 1 - 0.6915 = 0.3085$.
   $\mathbb{P}(|X| > 1/2) = \mathbb{P}(X > 1/2) + \mathbb{P}(X \le -1/2) = \mathbb{P}(X > 1/2) + 1 - \mathbb{P}(X \le 1/2) = 2 - 2\mathbb{P}(X \le 1/2) = 2 - 2 \times 0.6915 = 0.6170$

3. Trouver le nombre s tel que $\mathbb{P}(|X| \le s) = 0.99$.

   On a

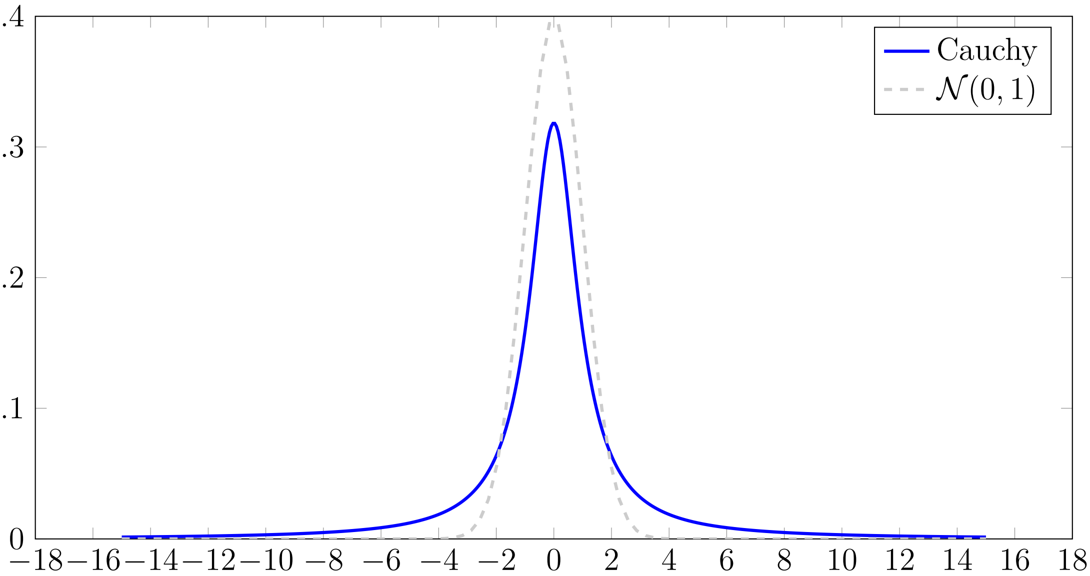
$$\mathbb{P}(|X| \le s) = \qquad \mathbb{P}(-s \le X \le s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(X \leq s) - \mathbb{P}(X \leq -s) \\
&= \mathbb{P}(X \leq s) - 1 + \mathbb{P}(X \leq s) \\
&= 2\mathbb{P}(X \leq s) - 1.
\end{aligned}
$$

On cherche donc s tel que $2\mathbb{P}(X \leq s) - 1 = 0.99 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq s) = 0.995$. D'où $s = 2.58$

2.5 Espérance

Exercice 15. On appelle loi de Cauchy la loi qui a pour densité sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.



1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.

   f est positive et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}[\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

2. Calculer sa fonction de répartition.
   $$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \frac{1}{\pi}[\arctan(x)]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\pi}(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}).$$

3. Cette loi est-elle intégrable ? Si oui, calculer son espérance.

   On a $|xf(x)| \sim |1/(\pi x)|$ qui n'est pas intégrable en $\pm\infty$. Donc la loi de Cauchy n'est pas intégrable et n'a pas d'espérance.

Exercice 16.* Soit X une variable aléatoire réelle positive de fonction de survie S.

1. Exprimer $p\int_0^\infty t^{p-1}S(t)dt$ à l'aide d'une intégrale et d'une espérance.

   On a

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}S(t)dt &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X>t)dt \\ &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{]t,+\infty[(X)}]dt. \end{aligned}$$

2. En utilisant le théorème de Fubini, en déduire que

$$p\int_0^\infty t^{p-1}S(t)dt = \mathbb{E}[X^p].$$

   On a par le théorème de Fubini Tonelli (tout est positif)

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}S(t)dt &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{]t,+\infty[(X)}]dt \\ &= p\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{1}_{]t,+\infty[(X)}dt\Big] \\ &= p\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{1}_{[0,X[(t)}dt\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^X pt^{p-1}dt\Big] \\ &= \mathbb{E}[X^p]. \end{aligned}$$

Exercice 17. Marie-Louise a 9 poules : cinq rousses, trois noires et une blanche. Quand les poules vont au champ, la première va devant, la deuxième suit la première, ... dans un ordre aléatoire. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque le première poule est rousse, et 0 sinon. Soit Y celle qui prend la valeur 1 lorsque la deuxième poule est rousse, 0 sinon.

1. Préciser les lois de X et Y. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathsf{Var}(X)$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathsf{Var}(Y)$.

   Comme X et Y ne prennent que les valeurs 0 et 1, elles suivent des loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X=1)=5/9$ pour X et par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(Y=1|X=1)\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(Y=1|X=0)\mathbb{P}(X=0) \\ &= 4/8\times 5/9 + 5/8\times(1-5/9) \\ &= 5/9. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathbb{E}[X]=5/9$, $\mathsf{Var}(X)=5/9\times(1-5/9)=20/81$,
   $\mathbb{E}[Y]=5/9$, $\mathsf{Var}(Y)=5/9\times(1-5/9)=20/81$.

2. Déterminer la loi du couple (X,Y).

   $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(Y=1|X=1)\mathbb{P}(X=1)=4/8\times 5/9=5/18$
   $\mathbb{P}(X=1,Y=0)=\mathbb{P}(Y=0|X=1)\mathbb{P}(X=1)=4/8\times 5/9=5/18$
   $\mathbb{P}(X=0,Y=1)=\mathbb{P}(Y=1|X=0)\mathbb{P}(X=0)=5/8\times 4/9=5/18$
   $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(Y=0|X=0)\mathbb{P}(X=0)=3/8\times 4/9=3/18$

3. Déterminer la loi de $Z = XY$ et calculer son espérance. A quoi correspond la variable aléatoire Z ?

   La variable aléatoire Z vaut 1 si et seulement si les deux premières poules sont rousses. $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 5/18$. Donc Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $5/18$ et $\mathbb{E}[Z] = 5/18$.

4. Calculer la covariance du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

   $\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 5/18 - 5/9 \times 5/9 = -5/162$. La covariance n'est pas nulle, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.

   On fait une intégration par parties

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda \exp(-\lambda x)dx = [-x\exp(-\lambda x]_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda x)dx = \lambda^{-1}.$$

   On utilise le calcul qu'on vient de faire

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda \exp(-\lambda x)dx = [-x^2\exp(-\lambda x]_0^\infty + 2\lambda^{-1}\int_0^\infty x\lambda\exp(-\lambda x)dx = 2\lambda^{-2}.$$

   D'où

$$\mathsf{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2\lambda^{-2} - 1\lambda^{-2} = \lambda^{-2}.$$

2. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   On utilise la caractérisation par la fonction de survie

$$\mathbb{P}(\lambda X > t) = \mathbb{P}(X > t/\lambda) = \exp(-\lambda t/\lambda) = \exp(-t),$$

   on reconnaît la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre 1.

3. Calculer l'espérance de $\exp(-tX)$ pour tout $t \geq 0$.

$$\mathbb{E}[\exp(-tX)] = \int_0^\infty \exp(-t)\lambda\exp(-\lambda x)dx = \frac{\lambda}{\lambda + t}\int_0^\infty (\lambda + t)\exp(-(\lambda + t)x)dx = \frac{\lambda}{\lambda + t},$$

   en reconnaissant la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda + t$.

   Soit Y une variable aléatoire indépendante de X de loi exponentielle de paramètre μ.

4. Donner la loi de $Z = \min\{X, Y\}$.

   On utilise la fonction de survie

$$\mathbb{P}(Z > t) = \mathbb{P}(X > t, Y > t) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = \exp(-\lambda t)\exp(-\mu t) = \exp(-(\lambda + \mu)t).$$

   On reconnaît la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

   Par indépendance, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq Y}] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{x \leq y} \lambda \exp(-\lambda x) \mu \exp(-\mu y) dx dy \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda x) \Big(\int_x^\infty \mu \exp(-\mu y) dy \Big) dx \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda x) \exp(-\mu x) dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) \exp(-(\lambda + \mu) x) dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}$$

6. Montrer que les événements $(X \leq Y)$ et $(Z > t)$ sont indépendants, $\forall t \geq 0$.

   Toujours en utilisant l'indépendance de X et Y, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq Y, Z > t) &= \mathbb{P}(X \leq Y, X > t) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{x \leq y} \mathbb{1}_{x > t} \lambda \exp(-\lambda x) \mu \exp(-\mu y) dx dy \\
&= \int_t^\infty \lambda \exp(-\lambda x) \Big(\int_x^\infty \mu \exp(-\mu y) dy \Big) dx \\
&= \int_t^\infty \lambda \exp(-\lambda x) \exp(-\mu x) dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_t^\infty (\lambda + \mu) \exp(-(\lambda + \mu) x) dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \exp(-(\lambda + \mu) t) \\
&= \mathbb{P}(X \leq Y) \mathbb{P}(Z > t),
\end{aligned}$$

   donc les événements sont bien indépendants.

2.6 Fonction caractéristique

Exercice 19. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi normale de paramètres respectifs $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.

1. Montrer que $X + Y$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

   On utilise la fonction caractéristique. On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{X+Y}(t) &= \Phi_X(t) \Phi_Y(t) \\
&= \exp(i m_1 t - \sigma_1^2 t^2 / 2) \exp(i m_2 t - \sigma_2^2 t^2 / 2) \\
&= \exp(i(m_1 + m_2) t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2 / 2)
\end{aligned}$$

   donc $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

On suppose dans la suite que X suit la loi normale centrée réduite et que $m_2 = 0$.

2. Soit $U = \mathbb{1}_{(X\geq 0)} - \mathbb{1}_{(X<0)}$. Montrer que $Z = UY$ suit encore une loi normale dont on précisera les paramètres.

Soit f une fonction test borélienne bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Z)] &= \mathbb{E}[f((\mathbb{1}_{(X\geq 0)} - \mathbb{1}_{(X<0)})Y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dxdy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(-y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}) dy \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}) dy
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y \leftarrow -y$. Donc Z suit une loi normale de paramètres $(0, \sigma_2^2)$.

3. Calculer la loi $Y + Z$. Est-ce une loi normale ? Pourquoi ?

Soit f une fonction test borélienne bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y+Z)] &= \mathbb{E}[f(Y + (\mathbb{1}_{(X\geq 0)} - \mathbb{1}_{(X<0)})Y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(2y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dxdy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(0) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dxdy \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(u/2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}) du + \frac{1}{2} f(0).
\end{aligned}$$

Donc $Y + Z$ suit une loi qui est un mélange d'une densité et d'une masse de Dirac en 0. Ce n'est pas une loi normale car Y et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 20. Le but de cet exercice est de montrer que la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres (n, p)

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = (1-p)e^{it0} + pe^{it1} = 1 - p + pe^{it}.$$

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Binomiale de paramètres (n, p).

$$\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

3. Montrer que la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres (n, p).

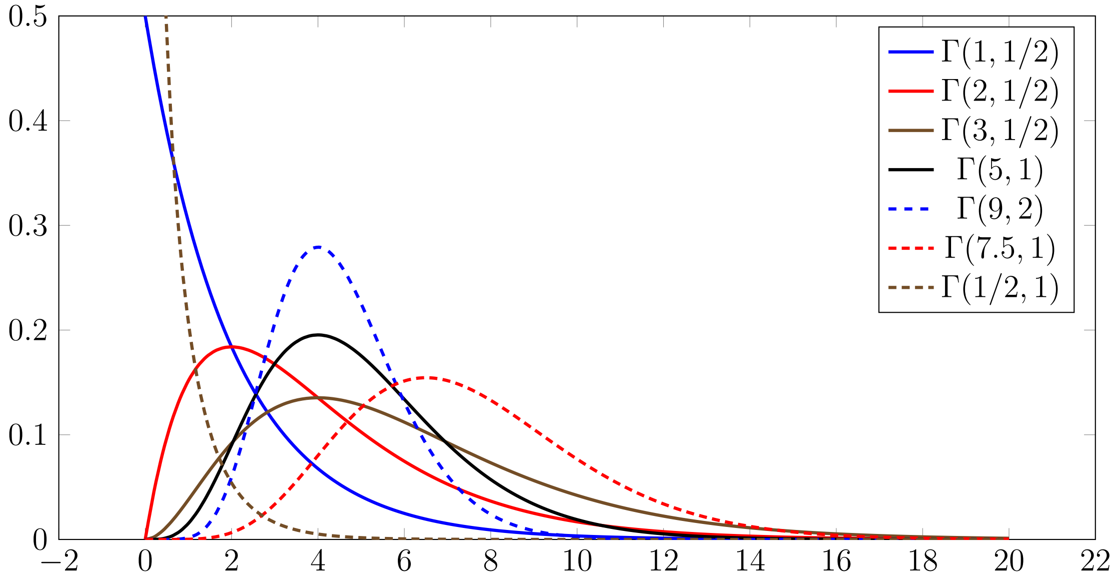
   On utilise les fonctions caractéristiques, et le fait que les X_i sont de même loi

$$\begin{aligned}\Phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) &= \Phi_{X_1}(t)\cdots\Phi_{X_n}(t)\\ &= (\Phi_{X_1}(t))^n\\ &= (1-p+p\exp(it))^n\end{aligned}$$

   qui est bien la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 21.* La loi Gamma de paramètres $\Gamma(n, \lambda)$ ($n \geq 1$, $\lambda > 0$) a pour densité

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{x\geq 0}.$$



1. A quoi correspond cette loi pour $n = 1$?

   On reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $X + Y$ suit une loi Gamma de paramètres $(2, \lambda)$.

   Pour tout fonction φ borélienne bornée, on a, en posant le changement de variable ($x = x, u = x + y$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X+Y)] &= \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x+y)\lambda\exp(-\lambda x)\lambda\exp(-\lambda y)dxdy\\ &= \int_0^\infty\int_x^\infty \varphi(u)\lambda^2\exp(-\lambda u)dudx\\ &= \int_0^\infty \varphi(u)\lambda^2\exp(-\lambda u)\int_0^u dxdu\\ &= \int_0^\infty \varphi(u)\lambda^2 u\exp(-\lambda u)du,\end{aligned}$$

   on reconnaît la densité de la loi Gamma $(2, \lambda)$.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y suit une loi Gamma de paramètres (n, λ). Calculer la loi de $X + Y$.

   Pour tout fonction φ borélienne bornée, on a, en posant le changement de variable $(u = x+y, y = y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(X+Y)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x+y)\lambda\exp(-\lambda x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}\exp(-\lambda y)dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_y^\infty \varphi(u)\exp(-\lambda u)\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}y^{n-1}dudy \\
&= \int_0^\infty \varphi(u)\exp(-\lambda u)\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^u y^{n-1}dydu \\
&= \int_0^\infty \varphi(u)\exp(-\lambda u)\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\frac{u^n}{n}du \\
&= \int_0^\infty \varphi(u)\exp(-\lambda u)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}u^n du
\end{aligned}$$

   on reconnaît la densité de la loi Gamma $(n+1, \lambda)$.

4. En déduire la loi d'une somme de n loi exponentielles indépendantes de même paramètre λ, ainsi que l'espérance et la variance de la loi Gamma de paramètres (n, λ).

   Par récurrence sur n, on montre avec ce qui précède que la loi Gamma de paramètres (n, λ) est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ de loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi, si X suit la loi Gamma de paramètres (n, λ), on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n/\lambda$$

   par linéarité de l'espérance,

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathsf{Var}(X_1) + \cdots + \mathsf{Var}(X_n) = n/\lambda^2,$$

   par indépendance.

5. Calculer la fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre λ.

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^\infty \lambda e^{itx}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{it-\lambda}[e^{(it-\lambda)x}]_0^\infty = \frac{-\lambda}{it-\lambda} = \frac{1}{1-it/\lambda}.$$

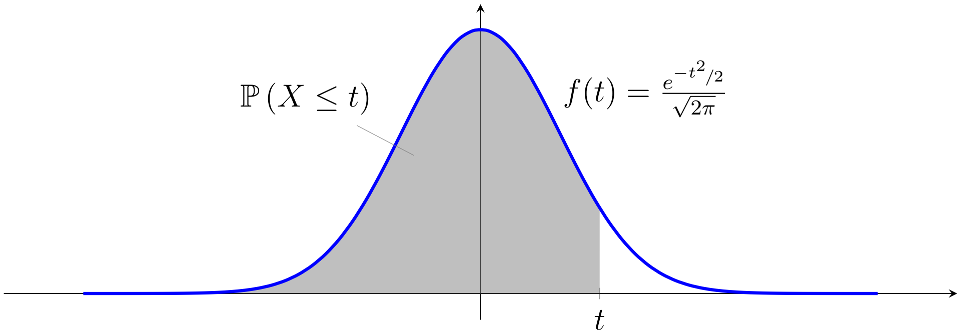
6. En déduire la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres (n, λ).

$$\Phi_X(t) = \Phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \Phi_{X_1}(t)\cdots\Phi_{X_n}(t) = (1-it/\lambda)^{-n}$$

   par indépendance.

Fonction de répartition $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad F(-t) = 1 - F(t).$$



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

TABLE 1 – Table de la loi Normale centrée réduite