

## TD 1

Les exercices marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

### Loi de probabilité

**Exercice 1.** Soit  $\Omega = [-1, 2]$  muni de sa tribu des boréliens  $\mathcal{B}([-1, 2])$  et de la probabilité  $\mathbb{P}$  définie par

$$\mathbb{P}(A) = \lambda(A)/3,$$

pour tout  $A$  dans  $\mathcal{B}([-1, 2])$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que  $\mathbb{P}$  est bien une loi de probabilité sur  $\Omega$ .

$\mathbb{P}$  est  $\sigma$ -additive car la mesure de Lebesgue l'est et  $\mathbb{P}(\Omega) = \lambda(\Omega)/3 = 3/3 = 1$ . Donc  $\mathbb{P}$  est bien une probabilité sur  $\Omega$ .

2. On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle  $[-1, 2]$ . Quelle est la probabilité qu'il soit négatif ou nul ? nul ? strictement supérieur à 0.5 ?

$$\mathbb{P}([-1, 0]) = \lambda([-1, 0])/3 = 1/3, \mathbb{P}(\{0\}) = \lambda(\{0\})/3 = 0, \mathbb{P}(]0.5, 2]) = \lambda(]0.5, 2])/3 = 1.5/3 = 0.5.$$

**Exercice 2.** Soit  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de lois de probabilité sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

1. Montrer que  $a\mathbb{P}_1 + b\mathbb{P}_2$  est encore une loi de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  si  $0 \leq a = 1 - b \leq 1$  (on a donc une combinaison convexe).

On sait qu'une somme de mesures reste une mesure. Pour ne prendre que des valeurs positives, on doit avoir  $a, b \geq 0$ . C'est donc une probabilité si elle est de masse 1 donc si  $a + b = 1$ , d'où le résultat.

2. Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{P}_n$  est une loi de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  si  $0 \leq a_n \leq 1$  pour tout  $n$  et  $\sum a_n = 1$ .

Une somme de mesures est une mesure. Elle est positive si tous les  $a_n$  sont positifs. Sa masse totale est  $\sum a_n$  donc doit valoir 1 pour être une probabilité.

**Exercice 3.** On se place sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Soit  $\mathbb{P}_1$  la loi de probabilité définie par  $\mathbb{P}_1 = \delta_0$  et  $\mathbb{P}_2$  la mesure ayant pour densité  $f(x) = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x) \exp(-x)$ .

1. Montrer que  $\mathbb{P}_2$  est une loi de probabilité.

Il suffit de calculer l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de la densité (au passage elle est bien mesurable et positive). On a  $\int f(x) = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = -0 + 1 = 1$

2. En déduire que  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2)/2$  est une loi de probabilité. Cette loi n'est ni discrète ni à densité.

Il suffit d'appliquer le point 1 de l'exercice 2 : on a une combinaison convexe de deux lois, c'est donc une loi de probabilité.

3. Calculer  $\mathbb{P}([a, b])$  pour  $0 < a < b < +\infty$ .

$$\mathbb{P}([a, b]) = (\mathbb{P}_1([a, b]) + \mathbb{P}_2([a, b]))/2 = \mathbb{P}_2([a, b])/2 = \int_a^b e^{-x} dx = (e^{-a} - e^{-b})/2.$$

4. Calculer  $\mathbb{P}([0, b])$  pour  $0 < b < +\infty$

$$\mathbb{P}([0, b]) = (\mathbb{P}_1([0, b]) + \mathbb{P}_2([0, b]))/2 = (1 + \mathbb{P}_2([0, b]))/2 = (1 + 1 - e^{-b})/2 = 1 - e^{-b}/2.$$

5. Calculer  $\int_{\mathbb{R}} (x + 1)d\mathbb{P}(x)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (x + 1)d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (x + 1)d\mathbb{P}_1(x) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (x + 1)d\mathbb{P}_2(x) \\ &= \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x + 1)e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}([-(x + 1)e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Soit  $\mu$  la mesure de  $\mathcal{P}(\{0, 1\})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\mu(\{1\}) = p$  et  $\mu(\{0\}) = 1 - p$  avec  $0 \leq p \leq 1$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Que modélise-t-elle? Cette loi s'appelle la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

$\mu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$  est bien une loi de probabilité d'après l'exercice 2 puisque  $p + 1 - p = 1$ . Elle modélise une expérience à deux issues favorable (1) et défavorable (0).

2. Donner l'expression de  $\int h d\mu$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée ou positive.

$$\int h d\mu = (1 - p)h(0) + ph(1).$$

3. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction identité  $h(x) = x$ .

$h$  est bien positive/bornée sur  $\{0, 1\}$  donc l'intégrale existe et  $\int h d\mu = (1 - p)0 + p1 = p$ .

4. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction carré  $h(x) = x^2$ .

$h$  est bien positive/bornée sur  $\{0, 1\}$  donc l'intégrale existe et  $\int h d\mu = (1 - p)0^2 + p1^2 = p$ .

**Exercice 5.\*** Soit  $\mu$  la mesure de  $\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\mu(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$  pour  $0 \leq k \leq n$ , avec  $n \geq 1$  et  $0 \leq p \leq 1$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Que modélise-t-elle? Cette loi s'appelle la loi Binomiale de paramètres  $(n, p)$ .

La mesure

$$\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k} \delta_k$$

est bien une loi de proba d'après l'exercice 2 puisque  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k} = (p + 1 - p)^n = 1$  par la formule du binôme de Newton. Elle modélise le nombre de succès sur  $n$  répétitions indépendantes d'une expérience à deux issues.

2. Donner l'expression de  $\int h d\mu$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée ou positive.

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k} h(k).$$

3. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction identité  $h(x) = x$ .

La fonction  $h$  est bien positive/bornée sur  $\{0, \dots, n\}$  donc l'intégrale existe et

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k.$$

Pour la calculer, posons

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k} = (x+1-p)^n.$$

On a donc

$$g'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-p)^{n-k} = n(x+1-p)^{n-1}$$

et

$$xg'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-p)^{n-k} = nx(x+1-p)^{n-1}.$$

Donc

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = pg'(p) = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

4. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction carré  $h(x) = x^2$ .

La fonction  $h$  est bien positive/bornée sur  $\{0, \dots, n\}$  donc l'intégrale existe et

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k^2.$$

Pour la calculer, on dérive une fois de plus  $g$

$$(xg'(x))' = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 x^{k-1} (1-p)^{n-k} = n(x+1-p)^{n-1} + n(n-1)x(x+1-p)^{n-2}.$$

Donc

$$x(xg'(x))' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-p)^{n-k} = nx(x+1-p)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+1-p)^{n-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int h d\mu &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k^2 = p(pg'(p))' \\ &= np(p+1-p)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = np + n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

**Exercice 6.\*** Soit  $\mu$  la mesure de  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\mu(\{k\}) = (1-p)^{k-1}p$  pour  $k \geq 1$ , avec  $0 < p < 1$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Que modélise-t-elle ? Cette loi s'appelle la loi géométrique de paramètre  $p$ .

$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \delta_k$  est bien une loi de proba d'après l'exercice 2 puisque  $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p/(1 - 1 + p) = 1$ . Il s'agit de la loi du premier succès pour une expérience à deux issues.

2. Donner l'expression de  $\int h d\mu$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée ou positive.

$$\int h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p h(k).$$

3. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction identité  $h(x) = x$ .

$h$  est bien positive/bornée sur  $\mathbb{N}^*$  donc l'intégrale existe et

$$\int h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p k.$$

Pour la calculer, posons  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$  pour  $0 < x < 1$ . C'est une série entière de rayon de convergence 1 donc on peut la dériver terme à terme et  $g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1/(1-x)^2$ .

Donc

$$\int h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p k = p g'(1-p) = p/(1 - 1 + p)^2 = 1/p.$$

4. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction carré  $h(x) = x^2$ .

$h$  est bien positive/bornée sur  $\mathbb{N}^*$  donc l'intégrale existe et

$$\int h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p k^2.$$

Pour la calculer, on dérive une fois de plus  $g : (xg'(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = 1/(1-x)^2 + 2x/(1-x)^3$ .

Donc

$$\int h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p k^2 = p((1-p)g'(1-p))' = p/p^2 + 2p(1-p)/p^3 = (2-p)/p^2.$$

**Exercice 7.** Soit  $\mu$  la mesure de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\mu(\{k\}) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$  pour  $k \geq 0$ , avec  $a > 0$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Que modélise-t-elle ? Cette loi s'appelle la loi de Poisson de paramètre  $a$ .

La mesure  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} \delta_k$  est bien une loi de proba d'après l'exercice 2 puisque  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^a = 1$ . C'est une approximation du nombre de tirages gagnants sur  $n$  expériences à deux issues lorsque  $n$  tend vers l'infini et la proba de gagner tend vers 0 à vitesse  $a/n$ , cf dernier exercice.

2. Donner l'expression de  $\int h d\mu$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée ou positive.

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} h(k).$$

3. Calculer  $\int h d\mu$  si elle existe pour la fonction identité  $h(x) = x$ .

La fonction  $h$  est bien positive/bornée sur  $\mathbb{N}$  donc l'intégrale existe et

$$\int h d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} k.$$

Pour la calculer, posons

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

C'est une série entière de rayon de convergence infini donc on peut la dériver terme à terme et  $g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = e^x$ . Donc  $xg'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^k}{k!} = xe^x$ . Ainsi

$$\int hd\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} k = e^{-a} ag'(a) = e^{-a} ae^a = a.$$

4. Calculer  $\int hd\mu$  si elle existe pour la fonction carré  $h(x) = x^2$ .

La fonction  $h$  est bien positive/bornée sur  $\mathbb{N}$  donc l'intégrale existe et

$$\int hd\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} k^2.$$

Pour la calculer, on dérive une nouvelle fois  $g$ ,

$$(xg'(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{x^{k-1}}{k!} = (x+1)e^x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int hd\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} k^2 \\ &= e^{-a} a(ag'(a))' = e^{-a} a(a+1)e^a = a(a+1). \end{aligned}$$

**Exercice 8.** Soit  $\mu = f.\lambda$  où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)a \exp(-ax)$  avec  $a > 0$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Il s'agit de la loi Exponentielle de paramètre  $a$ .

La fonction  $f$  est mesurable, positive et  $\int f(x)dx = \int_0^{\infty} ae^{-ax}dx = a/a = 1$ .

2. Donner l'expression de  $\int hd\mu$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée ou positive.

$$\int hd\mu = \int h(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} h(x)ae^{-ax}dx.$$

3. Calculer  $\int hd\mu$  si elle existe pour la fonction identité  $h(x) = x$ .

La fonction  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$  donc l'intégrale est bien définie et par IPP

$$\begin{aligned} \int hd\mu &= \int_0^{\infty} xae^{-ax}dx \\ &= [-xe^{-ax}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax}dx = 0 + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} ae^{-ax}dx = 1/a. \end{aligned}$$

4. Calculer  $\int hd\mu$  si elle existe pour la fonction carré  $h(x) = x^2$ .

La fonction  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$  donc l'intégrale est bien définie et par IPP à nouveau

$$\begin{aligned} \int hd\mu &= \int_0^{\infty} x^2ae^{-ax}dx \\ &= [-x^2e^{-ax}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xae^{-ax}dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} 2xae^{-ax}dx = 0 + 2/a^2 \end{aligned}$$

d'après le calcul précédent.

**Exercice 9.** On rappelle qu'une suite de lois  $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

- converge simplement vers une loi  $\mathbb{P}$  si pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}_n(A)$  converge vers  $\mathbb{P}(A)$ ,
- converge faiblement vers une loi  $\mathbb{P}$  si pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $\int f d\mathbb{P}_n$  converge vers  $\int f d\mathbb{P}$ .

On pose  $\mathbb{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k/n}$  et  $\mathbb{P} = \mathbb{1}_{[0,1]} \lambda$  où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas simplement vers  $\mathbb{P}$ .

$\mathbb{P}_n(\mathbb{Q}) = 1$  car tous les  $\frac{k}{n}$  sont des rationnels, et  $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = 0$ , donc  $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q}) \not\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{Q})$  et  $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas simplement vers  $\mathbb{P}$ .

2. Montrer que  $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$  converge faiblement vers  $\mathbb{P}$ .

Soit  $f$  une fonction continue bornée. Alors

$$\int f d\mathbb{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \int f d\mathbb{P}$$

car c'est une somme de Riemann.

**Exercice 10.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  et  $(f_n)_{n \geq 1}$  des fonctions mesurables positives sur  $(E, \mathcal{A})$  telles que

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \mu - \text{p.p.}, \quad \forall n \geq 1, \quad \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu = 1.$$

1. Pour tout  $n \geq 1$ , montrer que  $0 \leq \max\{f - f_n, 0\} \leq f$  puis que

$$\int_{\Omega} \max\{f - f_n, 0\} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par définition,  $\max\{f - f_n, 0\} \geq 0$  et comme les  $f_n$  sont positives,  $f - f_n \leq f$ . Par convergence dominée, on a donc  $\int_{\Omega} \max\{f - f_n, 0\} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

2. En utilisant le fait que, pour  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|u| = 2 \max\{u, 0\} - u$ , montrer que

$$\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 2 \int_{\Omega} \max\{f - f_n, 0\} d\mu - \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 - 1 = 0$$

3. On note  $\mathbb{P}_n = f_n \cdot \mu$  et  $\mathbb{P} = f \cdot \mu$  les mesures de densité respective  $f_n$  et  $f$  par rapport à  $\mu$ . Montrer que

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} |\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On dit que  $(\mathbb{P}_n)$  converge uniformément vers  $\mathbb{P}$ .

$$|\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| = \left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f_n - f| d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu. \text{ Donc } \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

4. Application : convergence uniforme de la loi Binomiale vers la loi de Poisson. Soit  $p_n$  une suite de réels de  $[0, 1]$  telle que  $np_n$  converge vers un réel  $a > 0$ . Montrer que la loi Binomiale de paramètres  $(n, p_n)$  converge uniformément vers la loi de Poisson de paramètre  $a$ .

On prend  $E = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ . Alors la loi Binomiale de paramètres  $(n, p_n)$  a pour densité  $f_n(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \mathbb{1}_{\{k \leq n\}}$  par rapport à  $\mu$  et la loi de Poisson de paramètre  $a$  a pour densité  $f(k) = e^{-a} a^k / k!$  par rapport à  $\mu$ . Il suffit donc de montrer que  $f_n(k) \rightarrow f(k)$  pour tout entier  $k$ . La densité  $f_n$  se réécrit

$$f_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

Or  $(1 - p_n)^{n-k} = \exp((n-k) \log(1 - p_n))$  est équivalent à  $\exp(-a)$  quand  $n$  tend vers l'infini. Comme  $k$  est fixé, on a aussi

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \sim n^k,$$

d'où

$$f_n(k) \sim \exp(-a) \frac{\lambda^k}{k!} = f(k).$$

**Exercice 11.\*** Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois 6 en lançant 4 dés usuels, ou bien d'obtenir au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois 2 dés usuels ?

Calculons les deux probabilités :

1. Dans le premier cas, on a  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$  muni de la tribu de ses parties et de l'équi-probabilité, et  $A =$  "au moins une fois 6". On a  $A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}^4$ , donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - 5^4/6^4 = 1 - 625/1296 = 671/1296 \simeq 0.5177.$$

Dans le deuxième cas, on a  $\Omega = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2)^{24}$  muni de la tribu de ses parties et de l'équi-probabilité, et  $A =$  "au moins une fois double 6". On a  $A^c = \{(i, j), i \neq 6 \text{ ou } j \neq 6\}^{24}$ , donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - (36 - 1)^{24}/36^{24} = 1 - (35/36)^{24} \simeq 0.4914.$$

C'est donc la première possibilité la plus probable (de peu!).

## Formule de Bayes

**Exercice 12.** Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Parmi les malades, l'épidémie touche 1 personne vaccinée pour 5 non vaccinées. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur 10 parmi les personnes vaccinées.

1. Quelle est la probabilité de tomber malade ?

On introduit les événements suivants

- $V$  : "l'individu est vacciné",
- $M$  : "l'individu est malade".

On cherche  $\mathbb{P}(M)$ . L'énoncé donne  $\mathbb{P}(V) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(V|M) = 1/6$ ,  $\mathbb{P}(V^c|M) = 5/6$ ,  $\mathbb{P}(M|V) = 1/10$ . La définition des probabilités conditionnelles donne

$$\mathbb{P}(M \cap V) = \mathbb{P}(M|V)\mathbb{P}(V) = 1/10 \times 1/3 = 1/30.$$

Ensuite, toujours par la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(V|M)} = 6/30 = 1/5.$$

2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

On cherche  $\mathbb{P}(M|V^c)$ . On a  $M = (M \cap V) \cup (M \cap V^c)$  et l'union est disjointe. Donc  $\mathbb{P}(M \cap V^c) = \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(M \cap V) = 6/30 - 1/30 = 5/30 = 1/6$ . Donc

$$\mathbb{P}(M|V^c) = \frac{\mathbb{P}(M \cap V^c)}{\mathbb{P}(V^c)} = \frac{\mathbb{P}(M \cap V^c)}{1 - \mathbb{P}(V)} = 3/(6 \times 2) = 1/4.$$

3. Le vaccin est-il efficace ?

La probabilité d'être malade quand on est vacciné est  $1/10 = 0.1$ , celle d'être malade quand on n'est pas vacciné est  $0.25 > 0.1$ . La deuxième probabilité est significativement plus grande que la première, on peut donc conclure à l'efficacité du vaccin.

**Exercice 13.** Vous êtes directrice de cabinet au ministère de la santé. Une maladie grave est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0.1%. Décidez-vous de généraliser le test de dépistage à l'ensemble de la population ?

On introduit les événements suivants

- $T$  : "le test est positif",
- $M$  : "l'individu est malade".

D'après l'énoncé, on a  $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$ ,  $\mathbb{P}(T|M) = 0.99$ ,  $\mathbb{P}(T|M^c) = 0.001$ . Le test a un intérêt préventif si  $\mathbb{P}(M|T)$  et  $\mathbb{P}(M^c|T^c)$  sont élevées. On peut calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négatif

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M^c|T^c) &= \frac{\mathbb{P}(T^c|M^c)\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}(T^c|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^c|M^c)\mathbb{P}(M^c)} \\ &= \frac{0.999(1 - 10^{-4})}{0.999(1 - 10^{-4}) + 0.01 \times 10^{-4}} \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

donc ce résultat est plutôt encourageant. Cependant, par la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M|T) &= \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|M^c)\mathbb{P}(M^c)} \\ &= \frac{0.99 \times 10^{-4}}{0.99 \times 10^{-4} + 0.001 \times (1 - 10^{-4})} \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

Donc si le test est positif, la personne est malade avec probabilité moins de 10%, il ne faut pas généraliser le dépistage avec ce test.

## Indépendance d'événements et de tribus

**Exercice 14.** Une machine comporte deux composants. La probabilité pour que le premier soit en panne est 0.1. La probabilité pour que le deuxième soit en panne est 0.15. La probabilité pour qu'au moins un des deux soit en panne est 0,25. Les pannes des deux composants sont-elles indépendantes ?

$A$  : le composant 1 est en panne,  $B$  : le composant 2 est en panne.

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.1 \times 0.15 = 0.015$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.1 + 0.15 - 0,25 = 0 \neq 0.25 \text{ donc elles ne sont pas indépendantes.}$$

**Exercice 15.** Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52 et par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. Les événements "*naissance d'une fille*" et "*luxation congénitale de la hanche*" sont-ils indépendants ?

Soit  $F$  l'événement "*naissance d'une fille*" et  $L$  "*luxation congénitale de la hanche*". D'après l'énoncé,  $\mathbb{P}(F) = 1 - 0.52 = 0.48$ . Par le formule des probabilités totales pour le système complet d'événements  $(F, F^c)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L) &= \mathbb{P}(L|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(L|F^c)\mathbb{P}(F^c) \\ &= 0.02 \times 0.48 + 0.01 \times 0.52 = 0.0148. \end{aligned}$$

Enfin, par la définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(L \cap F) = \mathbb{P}(L|F)\mathbb{P}(F) = 0.02 \times 0.48 = 0.0096.$$

On a alors  $\mathbb{P}(L)\mathbb{P}(F) = 0.0148 \times 0.48 = 0.007104 \neq \mathbb{P}(L \cap F)$ . Les événements  $L$  et  $F$  ne sont donc pas indépendants.

2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Par la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F|L) &= \frac{\mathbb{P}(L|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(L)} \\ &= 0.02 \times 0.48 / 0.0148 \\ &= 0.65. \end{aligned}$$

**Exercice 16.\*** Vous attendez une amie de Sydney, qui voyage jusqu'à Montpellier avec changement d'avion à Singapour et Paris. La probabilité d'accident mortel sur un vol est estimée à  $p$  pour chaque vol, avec indépendance entre les 3 vols. Votre amie n'arrivant pas, quelle est la probabilité que l'accident mortel ait eu lieu

### 1. au premier vol ?

Soit  $A_i$  l'événement "l'accident a lieu au vol  $i$ ". On cherche  $\mathbb{P}(A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ . On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^3 (A_1 \cap A_i))}{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^3 A_i)}\end{aligned}$$

On utilise la formule de Poincaré et l'indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^3 (A_1 \cap A_i)) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_1 \cap A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathbb{P}(A_1 \cap A_i \cap A_j) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= (p + 2p^2) - (2p^2 + p^3) + p^3 \\ &= p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^3 (A_i)) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 3p - 3p^2 + p^3\end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{P}(A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1/(3 - 3p + p^2)$ .

Si  $p$  est très petit, cette quantité est proche de  $1/3$ .

### 2. au deuxième vol ?

Dans ce cas, l'accident n'a pas eu lieu au premier vol, on cherche donc  $\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^3 (A_1^c \cap A_2 \cap A_i))}{3p - 3p^2 + p^3} \\ &= \frac{\mathbb{P}((A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3))}{3p - 3p^2 + p^3} \\ &= \frac{p(1-p) + p^2(1-p) - p^2(1-p)}{3p - 3p^2 + p^3} \\ &= \frac{p(1-p)}{3p - 3p^2 + p^3}\end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1|A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (1-p)/(3 - 3p + p^2)$ .

Si  $p$  est très petit, cette quantité est encore proche de  $1/3$ .

### 3. au troisième vol ?

Dans ce cas, l'accident n'a pas eu lieu au premier vol, ni au second on cherche donc  $\mathbb{P}(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)|A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)|A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c)}{3p - 3p^2 + p^3}\end{aligned}$$

$$= \frac{p(1-p)^2}{3p - 3p^2 + p^3}$$

Donc  $\mathbb{P}(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) | A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (1-p)^2 / (3 - 3p + p^2)$ .

Si  $p$  est très petit, cette quantité est encore proche de  $1/3$ . On vérifie que les trois probabilités somment bien à 1.