Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}$

Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$

Exercice 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Étudier la parité de $f * g$ lorsque f et g sont des fonctions paires, et lorsque l'une est paire et l'autre impaire.
2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, exprimer $\hat{f}(-\xi)$ en fonction de $\hat{f}(\xi)$. Si f est paire, montrer que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Que se passe-t-il si f est impaire ?
3. Que deviennent les résultats précédents si f est à valeur complexe ?

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer $\hat{g}$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$.

Exercice 3. Transformée de Fourier de la Gaussienne
Pour $\sigma > 0$, on note $g_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Le but est de calculer $\hat{g}_\sigma$.

1. Montrer que $\hat{g}_\sigma$ est dérivable et exprimer $\hat{g}'_\sigma(\xi)$ en fonction de $\hat{g}_\sigma(\xi)$ *(Utiliser une IPP)*.
2. En déduire $\hat{g}_\sigma(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de $\hat{g}_1$?

Exercice 4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Calculer $\hat{f}$.
2. Justifier que $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixs}}{1+s^2} ds$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ et $\hat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. En utilisant les propriétés de dérivation, calculer la transformée de Fourier de $k(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 5. Formule de réciprocité
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g d\lambda_1$

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 6. Pour tout $a > 0$, on note $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$. Calculer $\hat{f}_a$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Exercice 7. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $s > 0$, on note f_s la fonction définie par $f_s(x) = \frac{1}{s} f(\frac{x}{s})$. Montrer que $f_s \in L^1(\mathbb{R})$ et exprimer $\hat{f}_s$ en fonction de $\hat{f}$.
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, exprimer $\widehat{\tau_y f}$ en fonction de $\hat{f}$.

Exercice 8. Extrait d'un sujet d'examen
Soit $f = \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$.
2. Calculer $f * g$ et $\widehat{f * g}$.
3. Justifier que les intégrales suivantes sont bien définies et les calculer en utilisant ce qui précède.

   (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(\pi^2 - t^2)} dt.$

Exercice 9. Extrait d'un sujet d'examen
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par $f(x) = xe^{-|x|}$ et $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

1. Calculer $\hat{f}$.
2. Justifier que $f(x) = \frac{-2i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{se^{ixs}}{(1+s^2)^2} ds$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\int_{\mathbb{R}} \frac{t \sin t}{(1+t^2)^2} dt$ et $\hat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.