Les espaces L^p et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Espaces L^p

Exercice 1. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, montrer qu'on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 2. Inclusions entre espaces L^p

1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$.
2. On considère $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $\ell^p \subset \ell^q$.
3. On considère $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$. Donner un exemple de fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^q(\mathbb{R})$, et un exemple de fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$ telle que $g \notin L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ_1.

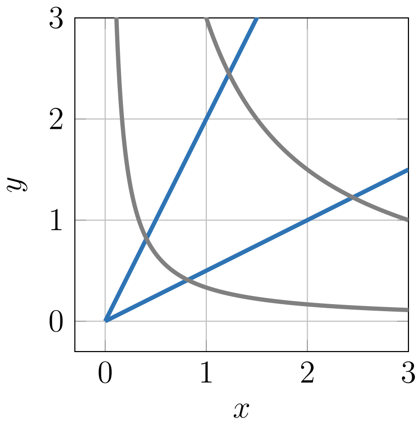
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = e^{-n|x|}$. Montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_p$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n(x) = \frac{1}{(n+|x|)^2}$. Montrer que $g_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|g_n\|_p$.
3. On considère les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ces deux normes sont équivalentes sur E s'il existe $0 < a < b$ tels que $a\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant b\|f\|_1$ pour tout $f \in E$. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes sur E.

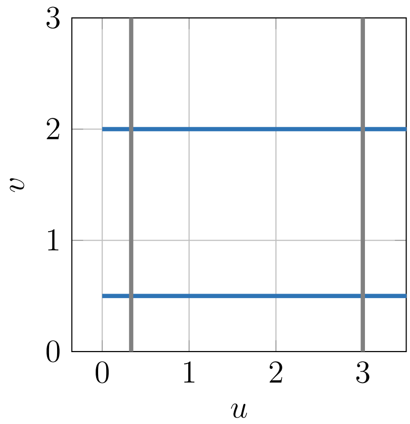
Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 4.

1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Calculer $\displaystyle\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$.
2. Soit $B \subset \mathbb{R}^3$ la boule unité, et $a > 1$. Calculer $\displaystyle\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} dxdydz$

Exercice 5. Soient $a, b > 1$ et D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le point $(1, 1)$ et délimité par les droites d'équation $y = ax$ et $y = \frac{x}{a}$, et par les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.





Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$. Montrer que $(x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in]\frac{1}{b}, b[\times]\frac{1}{a}, a[$ et calculer $\lambda_2(D)$ en faisant un changement de variables.

Exercice 6. La fonction Bêta d'Euler

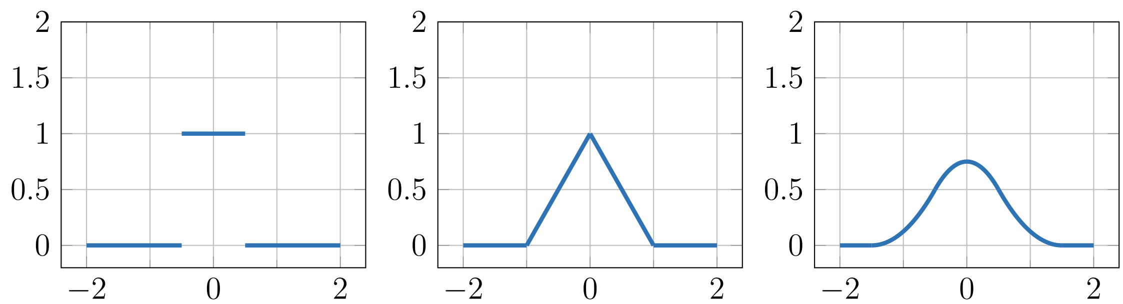
On considère la fonction $B : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

1. Montrer que la fonction B est bien définie et que $B(x,y) = B(y,x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$.
2. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ et $F : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(u,v) = (uv, u(1-v))$.
   (a) Montrer que F est un difféomorphisme de U sur $V = (\mathbb{R}_+^*)^2$.
   (b) Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, soit $I(x,y) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}dsdt$. Calculer $I(x,y)$ en utilisant le changement de variable $(s,t) = F(u,v)$ et en déduire que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
3. Calculer $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$ et $\Gamma(\frac{2n+1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convolution

Exercice 7. Soit $f = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

1. Calculer $f * f$ et $f * f * f$.



$$\text{On donne } f*f*f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2 & \text{si } -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -x^2 + \frac{6}{8} & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. On note $f^{*n} = f^{*n-1} * f$ avec $f^{*1} = f$ et $n \geqslant 2$. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $f^{*n} \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\|f^{*n}\|_1 = 1$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f^{*n} est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$.

Exercice 8. Soient $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $h = f * g$.

1. Montrer que $h(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $x, u \in \mathbb{R}^n$ on a $h(x+u) - h(x) = (\tau_{-u}f - f) * g$ et en déduire que h est continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soient A, B deux boréliens de $\mathbb{R}^n$ de mesures non nulles et finies. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B d\lambda_n$ et en déduire que $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est une fonction continue non nulle.

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 9. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des nombres réels deux à deux distincts, et soit $\mu = \delta_{a_1} + \cdots + \delta_{a_n}$, mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $f = g$ $\mu-$p.p. ?
2. Montrer que pour tout $p, q \in [0, +\infty]$ on a $L^p(\mathbb{R}, \mu) = L^q(\mathbb{R}, \mu)$.
3. Montrer que $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ est un espace vectoriel de dimension finie et en donner une base.

Exercice 10. Inégalité d'interpolation
Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $p < r < q$.

1. Montrer qu'il existe un unique $a \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q}$.
2. Pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$, montrer que $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^a \|f\|_q^{1-a}$. Que dit cette inégalité sur les espaces $L^p(X)$, $L^q(X)$ et $L^r(X)$?

Exercice 11. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré pour lequel les parties de mesures non nulles ont une mesure uniformément minorée : $0 < \alpha = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathscr{A} \text{ et } \mu(A) > 0\}$.

1. Donner un exemple d'espace mesuré ayant cette propriété.
2. Soit $p \in [0, +\infty[$, et soit $f \in L^p(X)$.
   (a) Soit $c < \|f\|_\infty$. Montrer qu'il existe une partie mesurable E telle que $\mu(E) > 0$ et $|f(x)| \geqslant C$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\displaystyle\int_X |f|^p d\mu \geqslant C^p \alpha$.
   (b) Montrer que $\|f\|_\infty \leqslant \alpha^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$.
3. Soient $p, q \in [0, +\infty[$ tels que $p < q$. En utilisant ce qui précède, montrer que $\|f\|_q \leqslant \alpha^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$
4. Que disent ces inégalités sur les inclusions entre espaces $L^p(X)$ et $L^q(X)$?

Exercice 12.

1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$. Calculer $\displaystyle\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$.
2. Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < a \text{ et } x^2 + y^2 < a^2\}$. Calculer $\displaystyle\int_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz$.

Exercice 13. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x \text{ et } x < y^2 < 2x\}$. Calculer $\displaystyle\int_D \frac{y}{x} dxdy$ en utilisant le changement de variables $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$.

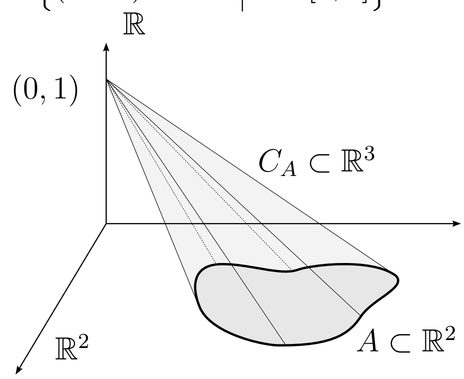
Exercice 14. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ deux fonctions paires. Montrer que $f * g$ est paire. Que peut-on dire si f et g sont impaires ? Si l'une est paire et l'autre impaire ?

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, bornées et de dérivées bornées. On suppose de plus que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est une fonction de classe C^2.

Exercice 16. Extrait d'un sujet d'examen
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_3. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$ on note $[u, v]$ le segment d'extrémités u et v défini par $[u, v] = \Big\{(1 - t)u + tv \;\Big|\; t \in [0, 1]\Big\}$.

Dans la suite on identifie $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, on pourra donc noter (x, s) les points de $\mathbb{R}^3$, avec $x \in \mathbb{R}^2$ et $s \in \mathbb{R}$.

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, le cône C_A de sommet $(0, 1) \in \mathbb{R}^3$ et de base A est l'union des segments de $\mathbb{R}^3$ joignant $(0, 1)$ à un point de $A \times \{0\}$: $C_A = \bigcup_{x \in A} \Big[(0, 1), (x, 0)\Big]$.



1. Montrer que C_A est un borélien de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, déterminer $(C_A)_{\cdot,s} = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; (x, s) \in C_A\Big\}$. En déduire $\lambda_2((C_A)_{\cdot,s})$.
3. Calculer $\lambda_3(C_A)$ en fonction de $\lambda_2(A)$.
4. Soit $h > 0$. On note $C_{A,h}$ le cône de sommet $(0, h) \in \mathbb{R}^3$ et de base A : $C_{A,h}$ est l'union des segments de $\mathbb{R}^3$ joignant $(0, h)$ à un point de $A \times \{0\}$. Que vaut $\lambda_3(C_{A,h})$?
5. En identifiant $\mathbb{R}^{n+1}$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, généraliser ce qui précèdes aux cônes de $\mathbb{R}^{n+1}$ de sommet $(0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et de base $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 17. Extrait d'un sujet d'examen
On rappelle que la fonction bêta d'Euler est définie par $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt$ et vérifie

$$B(x, y) = B(y, x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

Pour $a, b > 0$, on note $I_{a,b} = \displaystyle\int_D |x|^{a-1} |y|^{b-1} dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

1. En utilisant des coordonnées polaires, exprimer $I_{a,b}$ à l'aide de la fonction Γ.
2. Même question pour $J_{a,b,c} = \displaystyle\int_B |x|^{a-1} |y|^{b-1} |z|^{c-1} dxdydz$, où B est la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1 : Une variante de l'inégalité de Hölder :

rappel : si $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ alors $fg \in \mathcal{L}^1$

remarque : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ $\quad p, q, r \geqslant 1$ implique $r \in [1, +\infty[$ et

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{p} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow p, q \geqslant r \Rightarrow \frac{p}{r}, \frac{p}{q} \geqslant 1$$

Poser $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$ on a :

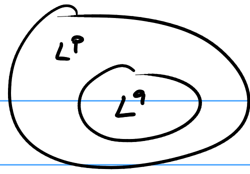
$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$. Et on peut appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions $f_1 = f^r$ et $g_1 = g^r$

$$\int_X |fg|^r d\mu = \int_X |f_1 g_1| \, d\mu \leq \left(\int_X |f_1|^{p'} d\mu\right)^{1/p'} \left(\int_X |g_1|^{q'} d\mu\right)^{1/q'}$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{r/p}}_{< +\infty} \underbrace{\left(\int_X |g|^q\right)^{r/q}}_{< +\infty}$$

et $fg \in \mathcal{L}^r(X)$

Exercice 2. m.v.a L^2 et L^1...



$p<q$

1) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$. Et $1 \leq p < q \leq +\infty$

C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder : Soit $f \in L^q$

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p 1 \leq \left(\int_X \left(|f|^p\right)^{q/p} \right)^{p/q} \left(\underbrace{\int_X 1^{r'} d\mu}_{=\mu(X)} \right)^{1/r'}$$

$r = \frac{q}{p}$ et $r' = \left(1 - \frac{p}{q}\right)^{-1}$

et
$$\int_X |f|^p d\mu \leq \left(\int_X |f|^q \right)^{p/q} \left(\mu(X)\right)^{1/r'} < +\infty$$

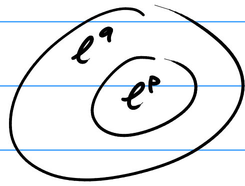
et $f \in L^p(\mu)$.

remarque : l'inclusion est stricte. si $X = [0,1]$, on a $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est dans L^p ssi $p\alpha < 1$

Il suffit de prendre $\alpha > 0$ tq $p < \frac{1}{\alpha} < q$ et on a $f \in L^p$ et $f \notin L^q$.

2) Dans $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, on a
$$\sum_{n\geq 0} |u_n|^p < +\infty$$
ce qui implique que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ on a $|u_n| \leq 1$

Soit $q > p$ (avec $p, q \in [1, +\infty]$), $\forall n > N$:
$$|u_n|^q = |u_n|^p \underbrace{|u_n|^{q-p}}_{\leq 1} \leq |u_n|^p$$



$p<q$

et
$$\sum_{n\geq 0} |u_n|^q = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^q + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|^q}_{\leq \|u\|_p < +\infty} < +\infty.$$

Ainsi $u \in \ell^q$.

remarque : l'inclusion est toujours stricte : si $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \in \ell^p$ ssi $p\alpha > 1$

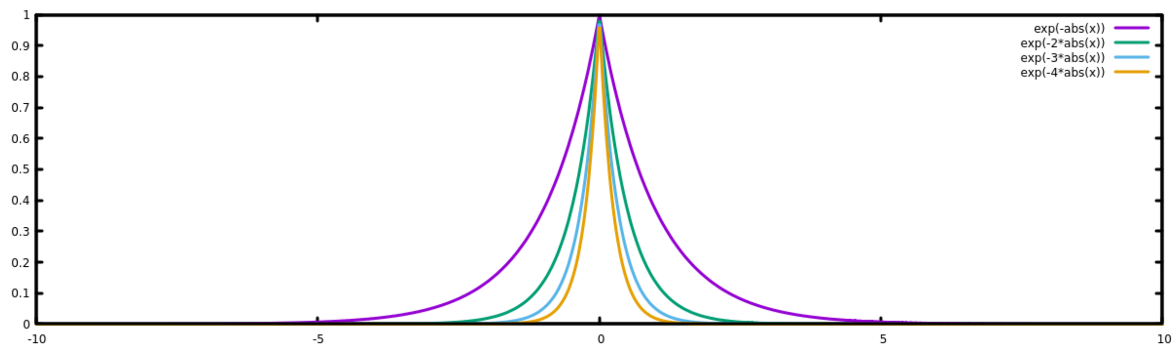
Si on a $\alpha > 1$ tq $p < \frac{1}{\alpha} < q$ on a

$(u_n) \in \ell^q \setminus \ell^p$ ...

3)

Exercice 3 :

1) $f_n(x) = e^{-n|x|}$, on a



• si $0 < p < +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-n|x|}\right)^p d\lambda_1(x) < +\infty \quad \text{par critère de Bertrand.}$$

$$\|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} e^{-pn|x|} d\lambda_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pn|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-pnx} dx$$

$$= 2\left[\frac{e^{-pnx}}{-pn}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{2}{pn}$$

• si $p = +\infty$ $\quad e^{-n|x|} \leq 1$ et $f_n \in L^\infty$ avec $\|f_n\|_\infty \leq 1$

Montrons que $\|f_n\|_\infty = 1$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

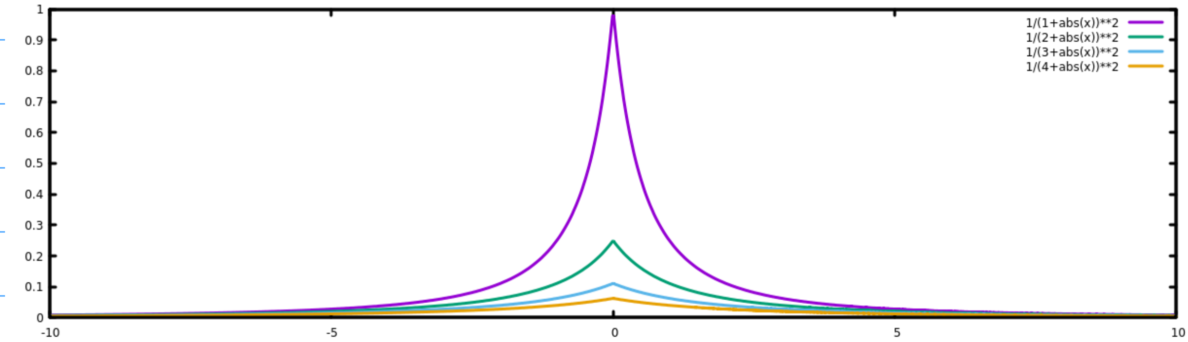
$e^{-n|x|} \geq 1 - \varepsilon$

<u>ssi</u> $\quad |x| \leq \dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{-n} = \eta$

Ainsi $f_n(x) \geq 1 - \varepsilon$ sur $[-\eta, \eta]$ et $\|f\|_\infty \geq 1 - \varepsilon$

comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\|f\|_\infty \geq 1$

2) $f_n(x) = \frac{1}{(n+|x|)^2}$



• si $\frac{1}{2} < p < +\infty$ $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda_1 < +\infty$ par critère de Bertrand

$$\|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(n+|x|)^2} \, d\lambda_1(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \, dx = 2\left[-(n+x)^{-1}\right]_{x=0}^{+\infty}$$

$$= 2/n .$$

• si $p=1$ on a $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. on montre que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$. Soit $\frac{1}{n^2} > \varepsilon > 0$

$$f_n(x) \geq \frac{1}{n^2} - \varepsilon \iff \frac{1}{n+|x|} \geq \sqrt{\frac{1}{n^2} - \varepsilon}$$

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \varepsilon}} - n = \overbrace{\frac{n}{\sqrt{1 - n^2\varepsilon}} - n}^{>0} = \eta$$

et $f_n(x) \geq \frac{1}{n^2} - \varepsilon$ sur $[-\eta, \eta]$ qui donne $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{n^2} - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ ...

3) on cherche une suite de fonction de $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Posons

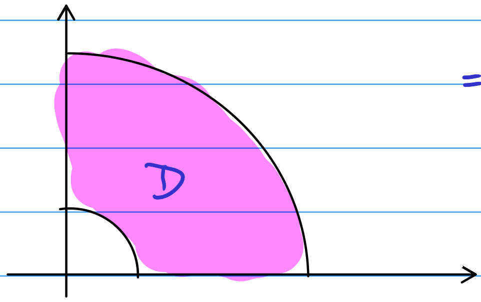
$$f_n(x) = 1\!\!1_{[0,1]}(x)\,(n+1)\,x^n$$

on a $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_2 = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

il ne peut donc pas exister de $b > 0$ tq $\|f_n\|_2 \leq c\,\|f_n\|_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 4

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$



$= \{(r,\theta) \mid 1 < r < 2 \text{ et } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$

$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_1^2 r\, dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(4-1)\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{3}{4}.$$

2) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\} = \{(r,\theta,\varphi) \mid r \in]0,1[\}$

rappel : $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[\xrightarrow{G} \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

$(r,\ \theta,\ \varphi) \longmapsto (r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)$

$$\det(\mathrm{Jac}(G)) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r^2\cos\varphi\left(-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$- r^2\sin\varphi\left(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$= r^2\left(-\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi\right) \qquad = -r^2\sin\varphi$$

$$\int_B \frac{1}{x^2+y^2+(z-a)^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}\, d\varphi$$

on applique un 2nd changement de variable : $t = r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi$

$dt = 2ar\sin\varphi\, d\varphi$

$a > r$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 \int_{(a-r)^2}^{(a+r)^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2ar}\, dr$$

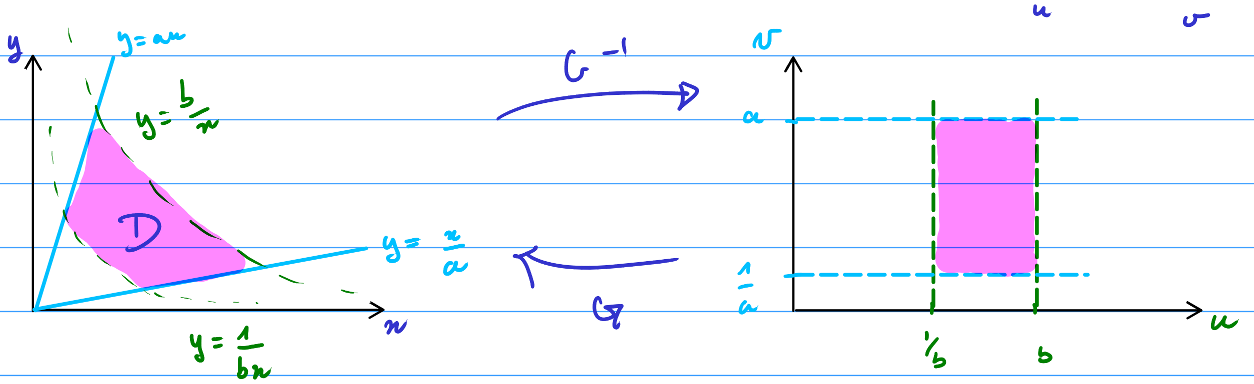
$$= 2\frac{\pi}{a} \int_0^1 r \left[\sqrt{t}\right]_{(a-r)^2}^{(a+r)^2} dr$$

$$= 2\frac{\pi}{a} \int_0^1 r\left(\cancel{a} + r - (\cancel{a} - r)\right) dr$$

$$= \frac{4\pi}{a} \int_0^1 r^2\, dr = \frac{4\pi}{a}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\frac{\pi}{a}.$$

Exercice 5 : $a, b > 1$

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{G^{-1}} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$
$$(x, y) \longmapsto \Big(\underbrace{xy}_{u}, \underbrace{\tfrac{x}{y}}_{v}\Big)$$



1) $(x,y) \in D$ ssi $c \in [\frac{1}{a}, a]$, $d \in [\frac{1}{b}, b]$ tq $\begin{cases} y = cx \\ y = \frac{d}{x} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} v = \frac{x}{y} = \frac{x}{cx} = \frac{1}{c} \in [\frac{1}{a}, a] \\ u = xy = x \cdot \frac{d}{x} = d \in [\frac{1}{b}, b] \end{cases}$

2) le changement de variable réciproque est
$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{G} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$
$$(u, v) \longmapsto \Big(\underbrace{\sqrt{uv}}_{x}, \underbrace{\sqrt{\tfrac{u}{v}}}_{y}\Big)$$

$$\mathrm{Jac}_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{Jac}_G(u,v)) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{2v}$$

$$\int_D d\lambda_2 = \int_{[\frac{1}{b}, b] \times [\frac{1}{a}, a]} |\det(\mathrm{Jac}(G))| \, d\lambda_2$$
$$= \int_{\frac{1}{b}}^{b} \int_{1/a}^{a} \frac{1}{2v} \, dv \, du = \left(b - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{2} \Big[\ln(v)\Big]_{v=1/a}^{a}$$
$$= \left(b - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{2} \left(\ln a - \ln \frac{1}{a}\right) = \left(b - \frac{1}{b}\right) \ln a$$

Exercice 6 : $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

1) $|h(x)| = |g * f|(x) = \left|\int_{\mathbb{R}} g(x-t)\, f(t)\, d\lambda_1(t)\right|$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^q d\lambda_1(t)\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p d\lambda_1(t)\right)^{1/p}$$

$$\overset{\tau = x-t}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q(\tau)\, d\lambda_1(\tau)\right)^{1/q}}_{<+\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p(t)\, d\lambda_1(t)\right)^{1/p}}_{<+\infty}$$

le RHS ne dépend pas de x et $h \in \mathcal{L}^\infty$.

2) $h(x+u) - h(x) = f*g(x+u) - f*g(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x+u-t)\, g(t)\, d\lambda_1(t) - f*g(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \tau_u f(x-t)\, g(t)\, d\lambda_1(t) - \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, d\lambda_1(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\tau_{-u} f - f)(x-t)\, g(t)\, d\lambda_1(t)$$

$$= (\tau_{-u} f - f) * g\, (x)$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$ "petit".

$$|h(x+u) - h(x)| \leq \underbrace{\|\tau_{-u} f - f\|_p}_{\xrightarrow[u \to 0]{} 0} \|g\|_q \quad \text{cf Prop 5.3.3}$$

Autrement dit $\lim_{u \to 0} h(x+u) = h(x)$ et h est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

3) $\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_A * 1\!\!1_B \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_A(x-u)\, 1\!\!1_B(u)\, d\lambda_n(u)\right) d\lambda_n(x)$

$$\overset{F.T}{=} \int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_B(u) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_A(x-u)\, d\lambda(x)}_{=\lambda_n(A)} d\lambda_n(u)$$

$= \lambda_n(A) \ \lambda_n(B) > 0$ car A, B mesures non nulles
et finies.

Ainsi $\mu_A * \mu_B$ est $\neq 0$ car d'intégrale > 0.
est C^0 par la question 2)

Exercice 7 : Fonction Beta d'Euler.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \overset{B}{\longmapsto} & B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \end{array}$$

1) B est bien définie : $f : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$

$x > 0 \Rightarrow x-1 > -1$ et $f(t) \underset{t=0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable au voisinage de 0
$1-x < 1$

$y > 0 \Rightarrow y-1 > -1$ et $f(t) \underset{t=1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{y-1}}$ intégrable ——— 1
$1-y < 1$

donc B est bien définie.

$$* \; B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1}\,d\tau$$

$\tau = 1-t$

$d\tau = -dt$ $= \int_0^1 \tau^{y-1}(1-\tau)^{x-1}\,d\tau = B(y,x)$

$$* \; B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2}(\theta)\,(1-\sin^2(\theta))^{y-1}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$t = \sin^2\theta \iff dt = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\,d\theta$$

2) $U = \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ et $F : U \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2 = V$
$(u,v) \longmapsto (uv, u(1-v))$

a) 1ère méthode : F est $\mathcal{C}^1$ car définie par des polynômes.
on peut calculer F^{-1} explicitement : $X, Y \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} X = uv \\ Y = u - uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = uv \\ Y = u - X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{X}{X+Y} \\ u = X+Y \end{cases} \quad (*)$$

$$F^{-1} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow U$$
$$(X, Y) \longmapsto \left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)$$

est aussi $\mathcal{C}^1$ (quotient de polynômes)

2ème méthode : th d'inversion globale • F est injective par $(*)$ et

• $\det(\mathrm{Jac}_F(u,v)) = \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = -uv - u + uv = -u$
$\neq 0$

Alors F est un $\mathcal{C}^1$ difféo.

b) $I(x,y) = \int_V s^{x-1} t^{y-1} e^{-s-t} \, d\lambda_2(s,t)$

$(s,t) = F(u,v)$

$$= \int_U (uv)^{x-1} u^{y-1} (1-v)^{y-1} e^{-u} \, |-u| \, d\lambda_2(u,v)$$

$$\overset{F.T}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} u^{x+y-1} e^{-u} \, d\lambda_1(u) \int_{]0,1[} v^{x-1} (1-v)^{y-1} \, d\lambda_1(v)$$

$$= \Gamma(x+y) \quad B(x,y)$$

$$I(x,y) = \int_V (s^{x-1} e^{-s}) (t^{y-1} e^{-t}) \, d\lambda_2(s,t)$$

$$= \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} \, ds \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} \, dt = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

3) • $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^0(\theta)\cos^0(\theta)}_{=1}\, d\theta = \pi$

Donc $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi = \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(1/2)^2}{1}$

$$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

• $B(\frac{2m+1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(2n+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(2n+1/2)\sqrt{\pi}}{m!}$

Reste à calculer

$$B(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2}) = 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(\theta)\, d\theta}_{= W_{2m}}$$ "intégrales de Wallis"

$$W_m = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\sin^{n-2}(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\sin^{n-2}(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(\theta)\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^{n-2}(\theta)\, d\theta$$

$$= W_{m-2} - \left[\frac{\sin^{m-1}(\theta)}{m-1}\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{m-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= W_{m-2} + \frac{1}{n+1} W_n$$

$\begin{cases} v' = \cos\theta \sin^{n-2}\theta \\ u = \cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} v = \frac{\sin^{n-1}(\theta)}{n-1} \\ u' = -\sin\theta \end{cases}$

et $\begin{cases} W_n = \frac{n-1}{n} W_{m-2} \\ W_0 = \pi/2\ ;\ W_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} W_0$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(2n)!}{(m!)^2\, 2^{2n}}$$

Ainsi

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ \frac{(2n)!}{n!\ 2^{2n}}$$