Intégration pour quelques mesures particulières

Intégration et mesure produit

Exercice 1. L'aire sous la courbe
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Montrer que V est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$, et calculer $\lambda_2(V)$.

Exercice 2. On considère, sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, la mesure de Lebesgue λ_1 et la mesure $\mu = \delta_1 + \sqrt{2}\delta_2$. On note $\rho = \lambda_1 \otimes \mu$, mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$. Déterminer $\rho(D)$ dans les cas suivants :

1. $D = [-a, a]^2$, où $a > 0$.
2. D est le disque euclidien fermé de rayon 2 et de centre $(0, 0)$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\displaystyle\int_D f(x, y) d\lambda_2(x, y)$.

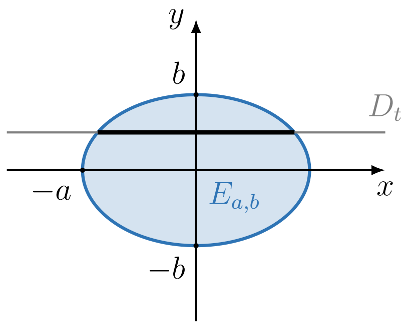
1. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ et $f(x, y) = xy$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x\}$ et $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 y}$.

Exercice 4. Volume d'un ellipsoïde
Dans ce qui suit, λ_2 et λ_3 désignent les mesures de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le domaine elliptique d'axes a et b est $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$.

   Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $D_t \subset \mathbb{R}^2$ la droite d'équation $y = t$. Déterminer la longueur $\ell(t)$ du segment $E_{\cdot,t} = E \cap D_t$.

   En déduire $\lambda_2(E)$ en fonction de a et b.



2. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $P_t \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $z = t$.

   Montrer que $F \cap P_t$ est un domaine elliptique et déterminer ses axes. En déduire $\lambda_3(F)$.

En probabilité

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire positive sur Ω et x, p des réels strictement positifs. Montrer l'**inégalité de Markov** : $\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$
2. En déduire l'**inégalité de Chernov** : pour toute variable aléatoire X sur Ω et tout réel $\lambda > 0$ on a $\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant e^{-\lambda x}\mathbb{E}(e^{\lambda X})$.

Intégrales à paramètre

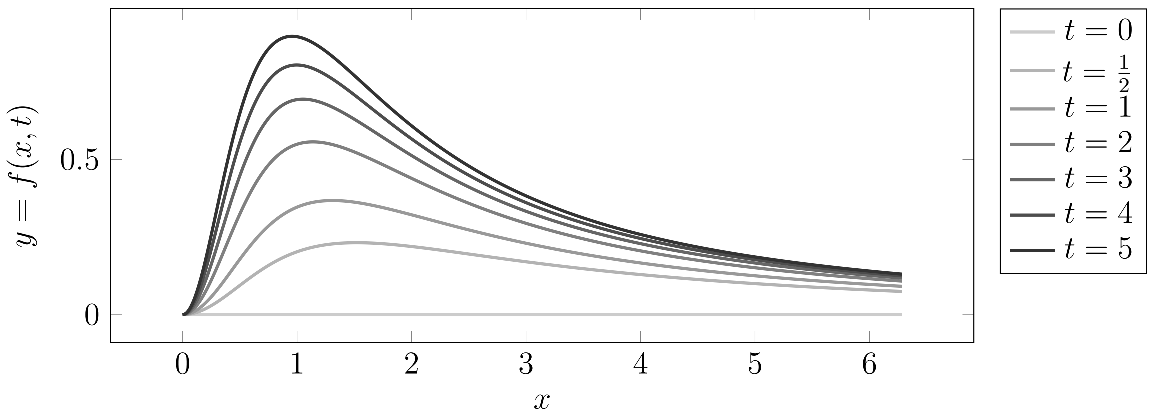
Exercice 6. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{nk^2+k+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n$.

On pourra regarder la vidéo https://www.youtube.com/watch?v=851U557j6HE sur les intégrales de Borwein.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin x\, e^{-xy}$.

1. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, mais que, pour tout $T > 0$, f est intégrable sur $[0,T] \times [0,+\infty[$.
2. En utilisant le théorème de Fubini, calculer l'intégrale (au sens de Riemann) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 8. On considère $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1, et on note $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,t) = \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2}$.



Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on note $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t) d\lambda_1(x)$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (*on pourra commencer par montrer la continuité sur* $]0,a[$*, où* $a > 0$).
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer F' comme une intégrale dépendant d'un paramètre.
3. Calculer $F'(x)$ pour tout $t > 0$ (pour $t \neq 1$ fixé, on pourra décomposer la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{t^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}$ en éléments simples). En déduire $F(t)$ pour tout t.

Exercice 9. On considère $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, et $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que la fonction $y \mapsto F(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\int_{\mathbb{R}_+^*} F(x,y) d\lambda_1(y) = 2f(x)$. (*On pourra déterminer deux fonctions* $a(x)$ *et* $b(x)$ *telles que* $F(x,y) = \frac{a(x)}{1+y} + \frac{b(x)}{1+x^2y}$)

2. Montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbb{R}_+^*$ et que $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$. On note $I = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)d\lambda_1(x)$.
   Justifier que $J = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} F(x,y)d\lambda_2(x,y)$ est bien définie. En calculant J de deux façons différentes, montrer que $I = \frac{\pi^2}{4}$.
3. Montrer que $I = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$. En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 10. Soit $X = [1, +\infty[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = ne^{-nx}$ est simplement convergente sur X. On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
2. Justifier que f est borélienne sur X et calculer $\int_X f d\lambda_1$.

Exercice 11. On considère $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1. Pour tout $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{n}{t^2+n^2}$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont mesurables et calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1)_{n\in\mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.

Exercice 12.

1. Montrer que $(1+\frac{x}{n})^n \leqslant e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geqslant -n$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^p dx = p!$.
3. Soit $b > 1$, calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} d\lambda_1(x)$.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, calculer $\int_D f(x,y)d\lambda_2(x,y)$.

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\right\}$ et $f(x,y) = x^2+y^2$.
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant x \leqslant 2, \text{ et } 0 \leqslant xy \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ et $f(x,y) = \cos(xy)$.

Exercice 14. Extrait d'un sujet d'examen
On considère $[0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1, et on note $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{[0,1]} f(x,t)d\lambda_1(t)$.

1. Montrer que F est bien définie. Calculer $F(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer sa dérivée.
3. On note $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \left(\int_0^x e^{-s^2} ds\right)^2$.
   (a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F'(x) + G'(x) = 0$.
   (b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} d\lambda_1(s)$.

Exercice 15. Extrait d'un contrôle continu
Soit μ une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x)$$

La fonction ϕ s'appelle la **transformée de Fourier** de la mesure μ. Par ailleurs, on note $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$K(y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} K(n(a-x)) d\mu(x).$$

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat}\phi(t)dt$. En déduire que, si ϕ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la mesure μ est diffuse (c'est à dire que $\forall a \in \mathbb{R} \quad \mu(\{a\}) = 0$).

Exercice 1 : on note $V(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$ l'épigraphe de f.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

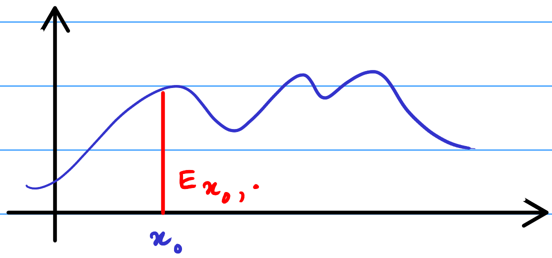
$(x, y) \longmapsto f(x) - y$

qui est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mesurable comme somme de deux applications mesurables. On a alors

$$V(f) = \underbrace{F^{-1}([0,+\infty[)}_{\substack{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \\ \text{car } F \text{ mesurable}}} \cap \underbrace{(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}_{\substack{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \\ \text{produit cartesien d'ouverts}}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

On applique le théorème de Fubini-Tonelli :

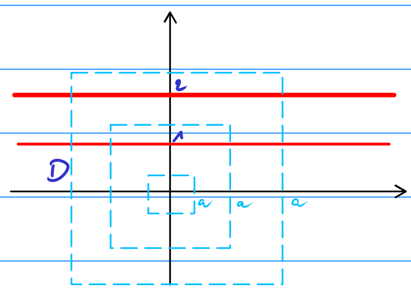
- $E_{x,\cdot} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in E\}$ sections verticales qui sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$



$$\lambda_2(V(f)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_{x,\cdot})\, d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1([0, f(x)])\, d\lambda_1(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda_1(x)$$

Exercice 2 : $\rho = \lambda_1 \otimes \mu$ où $\mu = \delta_1 + \sqrt{2}\,\delta_2$



1) Soit $D = [-a, a]^2$

* Si $a < 1$: $\rho([-a,a]) = \underbrace{\lambda_1([-a,a])}_{=2a} \cdot \underbrace{\mu([-a,a])}_{=0} = 0$

* Si $1 \leq a < 2$:

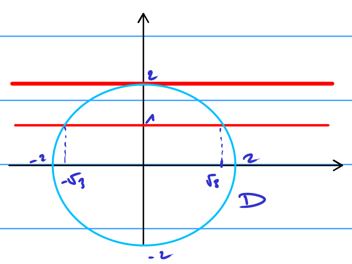
$$\rho([-a,a]) = \underbrace{\lambda_1([-a,a])}_{=2a} \cdot \underbrace{\mu([-a,a])}_{=1} = 2a$$

* Si $2 \leq$:

$$\rho([-a,a]) = \underbrace{\lambda_1([-a,a])}_{=2a} \cdot \underbrace{\mu([-a,a])}_{=1+\sqrt{2}}$$

$$= 2(1+\sqrt{2})a$$

2) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \}$ et $D_{\cdot,y} = \{ x \in X \mid (x,y) \in D \}$



$x^2+y^2=4 \iff y = \pm\sqrt{4-x^2}$

et si $y=1$ $x = \pm\sqrt{3}$

$$\rho(D) \overset{\text{Th 4.4.5}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(D_{\cdot,y})\, d\mu(y)$$

$$= \lambda_1(D_{\cdot,1}) \times 1 + \lambda_2(D_{\cdot,2}) \times \sqrt{2}$$

$$= \lambda_1([-\sqrt{3},\sqrt{3}]) + \lambda_2(\{0\})\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

Exercice 6 : μ mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

1) Soit $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{n}{nx^2+x+1}$$

• On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2} \quad \forall x>0$

• $n x^2 \leq nx^2+x+1 \Rightarrow f_n(x) = \frac{n}{nx^2+x+1} \leq \frac{n}{nx^2} = \frac{1}{x^2} = f(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{nk^2+k+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu$

$$\overset{\text{cv dominée}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque : Si on somme sur $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n}{nk^2+k+1} \geq \underbrace{n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty}$$

2) On note $f_n(x) = \frac{\sin x}{x^2} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n^2]}(x) \quad x \geq 1$

• On a $\lim\limits_n |f_n(x)| \leq \lim\limits_n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n = 0$ suite géométrique.

• On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n = \lim\limits_n \int f_n \, d\mu$

$$\overset{\text{cv dominée}}{=} \int 1 \, d\mu = 0$$

Exercice 4 : $E_{a,b} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$ $\quad a, b > 0$

en $y = t$ on a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1 \iff b^2x^2 + a^2t^2 = a^2b^2$

$$x^2 = (a^2b^2 - a^2t^2)\frac{1}{b^2}$$

et $\ell(t) = \frac{2}{b}\sqrt{a^2b^2 - a^2t^2} = 2a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}$

* $\mu(E_{a,b}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_{a,b} \cap D_t)\, d\lambda_1(t)$

prop 4.2.1

$$= \int_{\mathbb{R}} \ell(t)\, \mathbb{1}_{[-b,b]}(t)\, d\lambda_1(t) = 2a \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}\, dt$$

$\frac{t}{b} = \sin\theta$

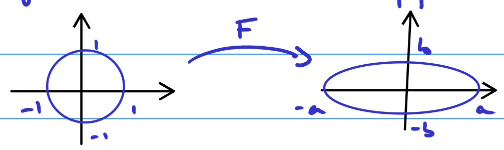
$$= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = ab \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

remarque : $\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)$

$$= ab\left(\sin(\pi) - \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi ab$$

* on peut aussi utiliser la formule de changement de variable affine :

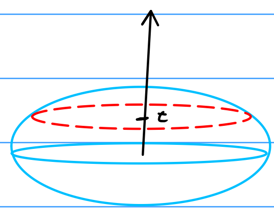
$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$



Si on accepte que $\lambda_2(E_{1,1}) = \pi$, on a

$$\lambda_2(E_{a,b}) = \lambda_2(F(E_{1,1})) = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right| \lambda_2(E_{1,1})$$
$$= ab\pi$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}$



on a $F \cap D_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{c^2 - t^2}{c^2} \\ z = t \end{cases} \right\}$

$$= \left\{ \text{——} \mid \frac{x^2}{a^2(c^2-t^2)/c^2} + \frac{y^2}{b^2(c^2-t^2)/c^2} \le 1 \right\}$$

$$F \cap D_t = E_{\frac{a\sqrt{c^2-t^2}}{c}, \frac{b\sqrt{c^2-t^2}}{c}} \times \{t\}$$

Et

* $\lambda_3(F) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2\left(E_{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-t^2}, \frac{b}{c}\sqrt{c^2-t^2}}\right) \mathbb{1}_{[-c,c]}(t)\, d\lambda_1(t)$

$$= \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{c^2}(c^2-t^2) \quad \mathbb{1}_{[-c,c]}(t)\, d\lambda_1(t)$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^{c} (c^2-t^2)\, dt$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2} \left[c^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_{-c}^{c}$$

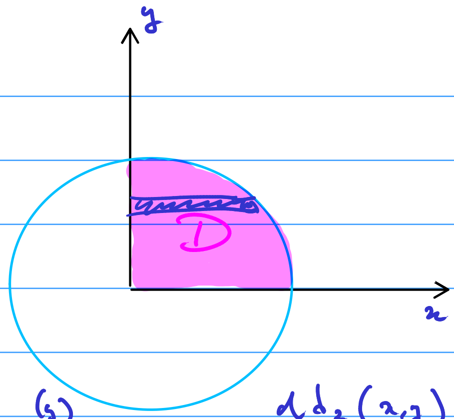
$$= \pi \frac{ab}{c^2} \left(c^3 - \frac{c^3}{3} + c^3 - \frac{c^3}{3} \right) = \pi abc \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc$$

* même remarque : $\lambda_3(B_2) = \frac{4}{3}\pi \rightsquigarrow \lambda_3(F) = abc\, \lambda_3(B_2)$

boule unité de $\mathbb{R}^3$

$$= \frac{4}{3}\pi abc.$$

Exercice 3 :



1) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1 \right\}$

Fubini-Tonelli

$$\int_D xy \, d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \, \mathbb{1}_{[0,\sqrt{1-y^2}]}(x) \, \mathbb{1}_{[0,1[}(y) \, d\lambda_2(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y \, \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{1}_{[0,\sqrt{1-y^2}]}(x) \, d\lambda_1(x) \right)}_{\text{dépend de } y} d\lambda_1(y)$$

remarque : $f(x,y) \geq 0$

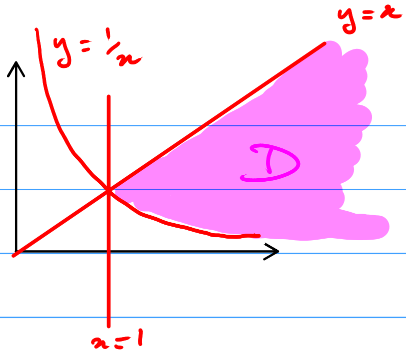
$$= \int_0^1 y \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y (1-y^2) \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}.$$

2) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x \}$



et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est positive

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{1}_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dfrac{1}{x^2 y}$

* L'ensemble D se réécrit : $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 , \ y \geq 1 , \ x \geq y \}$

$\cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, \ 0 < y < 1, \ x \geq \frac{1}{y} \}$

$= D_1 \cup D_2$

$$\int_D \frac{1}{x^2 y} \, d\lambda_2 (x,y) = \int_{D_1} \frac{1}{x^2 y} \, d\lambda_2 (x,y) + \int_{D_2} \frac{1}{x^2 y} \, d\lambda_2 (x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y) \, \mathbb{1}_{[y,+\infty[}(x)}{x^2 y} \, d\lambda_2 (x,y)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbb{1}_{]0,1[}(y) \, \mathbb{1}_{[1/y,+\infty[}(x)}{x^2 y} \, d\lambda_2 (x,y)$$

Fubini Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)}{y} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{[y,+\infty[}(x)}{x^2} \, d\lambda_1 (x) \right) d\lambda_1 (y)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}{y} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{[1/y,+\infty[}(x)}{x^2} \, d\lambda_1 (x) \right) d\lambda_1 (y)$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} \left(\int_y^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx \right) dy + \int_0^1 \frac{1}{y} \left(\int_y^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx \right) dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=y}^{+\infty} dy + \int_0^1 \frac{1}{y} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=y}^{+\infty} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} \, dy + \int_0^1 dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{+\infty} + 1 = 2$$

* on peut aussi pousser le calcul directement :

$$\int_D \frac{1}{x^2 y}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{x},x]}(y)\, \frac{1}{x^2 y}\, d\lambda_2(x,y)$$

Fubini-Tonelli

$$= \int \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, \frac{1}{x^2}\left(\int \mathbb{1}_{[\frac{1}{x},x]}(y)\frac{1}{y}\, d\lambda_1(y)\right) d\lambda_1(x)$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\int_{1/x}^{x} \frac{dy}{y}\right) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left[\ln y\right]_{y=1/x}^{x} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\ln x - \ln 1/x}{x^2}\, dx$$

$$= 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = 2\left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]_{x=1}^{+\infty} \stackrel{\cdot}{=} 2$$

Exercice 8 : $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}$

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t) \, d\lambda_1(t)$$

1) intégrale à paramètre, on utilise le th de continuité sous le $\int$.

a>0

1) $\forall x \in [0,a[$ $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (cf critère de Bertrand)

2) $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ (quotient de fction continue)

3) $\left| \dfrac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2} \right| \leq \left| \dfrac{\ln(1+at^2)}{1+t^2} \right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$

et F est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,a[$ $\forall a \in \mathbb{R}^+_*$. on en déduit que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$

2) Th de dérivation sous le signe somme.

1) idem qu'en 1) mais avec $t \in [b,+\infty[$ $b>0$

2) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}$ est dérivable et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}\right) = \frac{t^2}{(1+xt^2)(1+t^2)}$$

3) $\dfrac{t^2}{|(1+xt^2)(1+t^2)|} \leq \dfrac{t^2}{(1+bt^2)(1+t^2)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$

Et F est dérivable sur $[b,+\infty[$ $\forall b>0$. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. on a

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(1+xt^2)(1+t^2)} \, d\lambda(t) \qquad \forall x>0.$$

on montre, de même que $x \mapsto F'(x)$ est $\mathcal{C}^0$...

3) $\dfrac{t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)} = \dfrac{a}{(1+t^2)} + \dfrac{b}{(1+xt^2)}$

$$= \frac{a + axt^2 + b + bt^2}{(1+t^2)(1+xt^2)} = \frac{a+b+t^2(ax+b)}{(1+t^2)(1+xt^2)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ ax+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ a(x-1)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/(x-1) \\ b = 1/(1-x) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(1+t^2)} - \frac{1}{(x-1)(1+xt^2)}$$

et $$F'(x) = \frac{1}{(x-1)} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+t^2)} d\lambda_1(t) - \frac{1}{(x-1)} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+xt^2} d\lambda_1(t)$$

$$= \frac{1}{(x-1)} \left(\left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}\, t)\right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(x-1)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}$$

Primitivons : $\forall c \neq 0, 1$

$$\pi \int_c^x \frac{1}{(\sqrt{s}+1)} \frac{ds}{2\sqrt{s}} \overset{\sqrt{s}=t}{=} \pi \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{t+1} dt = \pi \left[\ln(t+1) \right]_{t=\sqrt{c}}^{\sqrt{x}} = \pi \ln(\sqrt{x}+1) + cte$$

Exercice 5 :

$$F : \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^+_* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$$

$$f : \mathbb{R}^+_* \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$$

1) $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \dfrac{a(x)}{1+y} + \dfrac{b(x)}{1+x^2y}$

$$= \frac{a(x) + a(x)x^2y + b(x) + b(x)y}{(1+y)(1+x^2y)}$$

donc $\begin{cases} a+b=1 \\ a(x)x^2 + b(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(x)(1-x^2) = 1 \\ b(x) = -a(x)x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a(x) = 1/1-x^2 \\ b(x) = -x^2/1-x^2 \end{cases}$

et

$$F(x,y) = \frac{1}{(1-x^2)(1+y)} - \frac{x^2}{(1+x^2y)(1-x^2)}$$

qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $F(x,y) = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$

- on considère $F_t(x,y) = \mathbb{1}_{]0,t[}(y)\, F(x,y)$. on applique cv monotone: $(F(x,y) \geq 0)$

$$\int_{\mathbb{R}^*_+} F(x,y)\, d\lambda(y) = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+_*} \mathbb{1}_{]0,t[}(y)\, F(x,y)\, d\lambda(y)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\int_0^t \frac{1}{1+y}\,dy - \int_0^t \frac{x^2}{1+x^2y}\,dy\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\left[\ln(1+y)\right]_0^t - \left[\ln(1+x^2y)\right]_0^t\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{1-x^2} \ln\left(\frac{1+x^2t}{1+t}\right) = 2\,\frac{\ln x}{x^2-1}$$

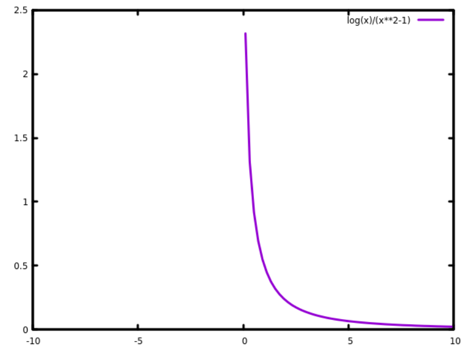
2) - Montrer que f se prolonge par continuité en $x=1$

rappel: $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + \dots$

et $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln\left(1 + (x-1)\right)}{x^2 - 1} = \frac{(x-1) + o(|x-1|)}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{1}{x-1} + o(1) \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{2}$$

on peut donc prolonger f par la valeur $\frac{1}{2}$ en $x = 1$.



• Intégrabilité de f :

* En $x \to +\infty$: critère de Bertrand $\beta = -1 \quad \alpha = 2$
* En $x \to 0$ $f(x) \sim_0 \ln(x)$ et intégrable par Bertrand $\beta = -1 \quad \alpha = 0$.

• on pose $I = \int_{\mathbb{R}_*^+} f(x)\, d\lambda_1(x)$ et $J = \int_{(\mathbb{R}_*^+)^2} F(x,y)\, d\lambda_2(x,y)$

J est bien définie par Fubini - Tonelli ($F \geq 0$)

$$J = \int_{(\mathbb{R}_*^+)^2} F(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}_*^+} \left(\int_{\mathbb{R}_*^+} F(x,y)\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x)$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}_*^+} f(x)\, d\lambda_1(x) \quad < +\infty$$

$$= 2 \quad I$$

et $J = \int_{\mathbb{R}_*^+} \left(\int_{\mathbb{R}_*^+} F(x,y)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 y + 1}\, dx \quad dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} \left[\text{Arctan}(x\sqrt{y}) \frac{1}{\sqrt{y}} \right]_{x=0}^{+\infty} dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{y = s^2}{=} \frac{\pi}{2} \int 2 \frac{1}{1+s^2}\, ds = \pi \left[\text{Arctan}(s) \right]_{s=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

3) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx$ $\qquad s = \frac{1}{x} \qquad ds = \frac{dx}{-x^2}$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx + \int_0^1 \frac{-\ln s}{\frac{1-s^2}{s^2}} \frac{ds}{s^2} \qquad dx = -\frac{ds}{s^2}$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx$$

rappel : $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$

Donc $I = 2\int_0^1 \ln x \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\, dx = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2k} \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad u' \ 1/x$

$v' = x^{2k} \qquad v = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$$\overset{IPP}{=} 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2k}}{2k+1}\, dx$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right]_0^1$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

ce qui donne $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

• Posons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ on a

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \iff S = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 7 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin x \, e^{-xy}$

1) * Montrons que $\forall T > 0$, f est intégrable sur $[0,T] \times [0,+\infty[\; = D$

on remarque que sur D, $|f|$ est positive et on peut appliquer Fubini-Tonelli :

$$\int_{[0,T]\times[0,+\infty[} |e^{-xy} \sin(x)| \, d\lambda_2(x,y) \overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^T \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} |\sin(x)| \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^T |\sin(x)| \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^T |\sin(x)| \left[\frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^{+\infty} dx = \int_0^T \frac{|\sin x|}{x} \, dx < +\infty$$

où le RHS est une fonction $\mathcal{C}^0$ sur le compact $[0,T]$ et donc bornée.

* Supposons que $(x,y) \mapsto e^{-xy} \sin x$ est intégrable sur $(\mathbb{R}_+)^2$. Alors par Fubini-Tonelli

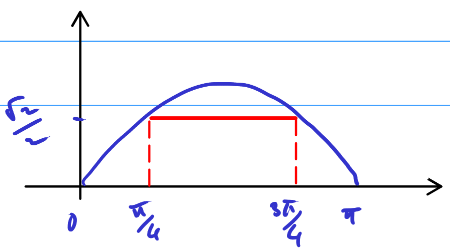
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^2} |e^{-xy} \sin x| \, d\lambda_2(x,y)}_{<+\infty} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dy \, |\sin x| \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \, dx$$

or $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable. En effet

méthode ①
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x + k\pi)|}{x + k\pi} \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{x + k\pi} \, dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{(k+1)\pi} \, dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{\pi} \, \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}}_{\text{divergent.}}$$

méthode ② Minorons $\sin(x)$ sur $[0,\pi]$ par $\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbb{1}_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}(\cdot)$



$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} \, dx \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathbb{1}_{[\pi/4, 3\pi/4]}(x)}{\pi(k+1)} \frac{\sqrt{2}}{2} \, dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \right) \quad \text{diverge aussi...}$$

2) on utilise le fait que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$. Ainsi :

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^T \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy \right) \sin(x)\, dx$$

$$= \int_0^T \int_0^{+\infty} \sin(x)\, e^{-xy} dy\, dx$$

or d'après la question 1) $(x,y) \longmapsto \sin(x)\, e^{-xy}\, \mathbb{1}_{[0,T]}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$ est intégrable

on peut donc appliquer Fubini et on a

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^T e^{-xy} \sin x\, dx \right)}_{= I_T(y)} dy$$

on a $I = \int_0^T e^{-xy} \sin x\, dx = \left[-e^{-xy} \cos x \right]_{x=0}^T - y \int_0^T e^{-xy} \cos x\, dx$

ipp $\begin{cases} u = e^{-xy} & u' = -y e^{-xy} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$

$$= \left[-e^{-xy} \cos x \right]_{x=0}^T - y \left(\left[e^{-xy} \sin x \right]_{x=0}^T + y \underbrace{\int_0^T e^{-xy} \sin x\, dx}_{I_T(y)} \right)$$

ipp $\begin{cases} u = e^{-xy} & u' = -y e^{-xy} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{cases}$

$$I_T(y) = \left(-e^{-Ty} \cos T + 1 \right) - y \left(e^{-Ty} \sin T + y I_T(y) \right)$$

$$(1 + y^2) I_T(y) = 1 - e^{-Ty} (y \sin T + \cos T)$$

$$I_T(y) = \frac{1 - e^{-Ty} (y \sin T + \cos T)}{1 + y^2}$$

on cherche à calculer $\lim\limits_{T \to +\infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim\limits_{T \to +\infty} \int_0^{+\infty} I_T(y) \, d\lambda(y)$

Comme $T \to +\infty$, on peut supposer que $T \geq 1$ et on a

- $I_T(y) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$
- $|I_T(y)| \leq \frac{1 + e^{-y}(y+1)}{1+y^2} \leq \frac{3}{1+y^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$

on peut appliquer cv dominée et

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{T \to +\infty} I_T(y) \, d\lambda_1(y)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \, dy = \left[\operatorname{Arctan} t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

on dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ est semi-cv.

Exercice 15 : μ mesure finie sur $\mathbb{R}$

1) $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \, d\mu(x)$

Intégrale à paramètre :

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto |e^{-itx}| \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-itx}$ est continue (polynôme trigo)

3) on a $e^{-itx} \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Donc $\phi(.)$ est $\mathcal{C}^0$ et est bien bornée car :

$$|\phi(t)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \, d\mu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty$$

2) $$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t) \, dt = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \, d\mu(x) \, dt$$

$$= \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t) \, e^{it(a-x)} \, d\mu(x) \, d\lambda_1(t)$$

car $|e^{-itx}| \leq 1$ intégrable pour $\mathbb{1}_{[-n,n]} \lambda_1 \otimes \mu$ — Fubini

$$= \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t) \, e^{it(a-x)} \, d\lambda_1(t) \, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \int_{-n}^{n} e^{it(a-x)} \, dt \, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{e^{it(a-x)}}{i(a-x)} \right]_{t=-n}^{n} d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{in(a-x)} - e^{-in(a-x)}}{2i(a-x)n} \, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(n(a-x))}{(a-x)n} \, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} K((a-x)n) \, d\mu(x)$$

3) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} K(n(a-x))\, d\mu(x)$

on applique cv dominée :

- $K(n(a-x)) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}$

En effet $\left| \frac{\sin(n(a-x))}{n(a-x)} \right| \leq \frac{1}{n(a-x)} \longrightarrow 0$ si $x \neq 0$

Autrement dit $K(n(x-a)) \longrightarrow \mathbb{1}_{\{a\}}$ simplement.

- de plus $K(n(a-x)) \leq \frac{n(a-x)}{n(a-x)} \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\sin x \leq x$

Ce qui donne

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{a\}}\, d\mu = \mu(\{a\})$$

Par ailleurs, si ϕ est $\mathcal{L}^1(\lambda)$

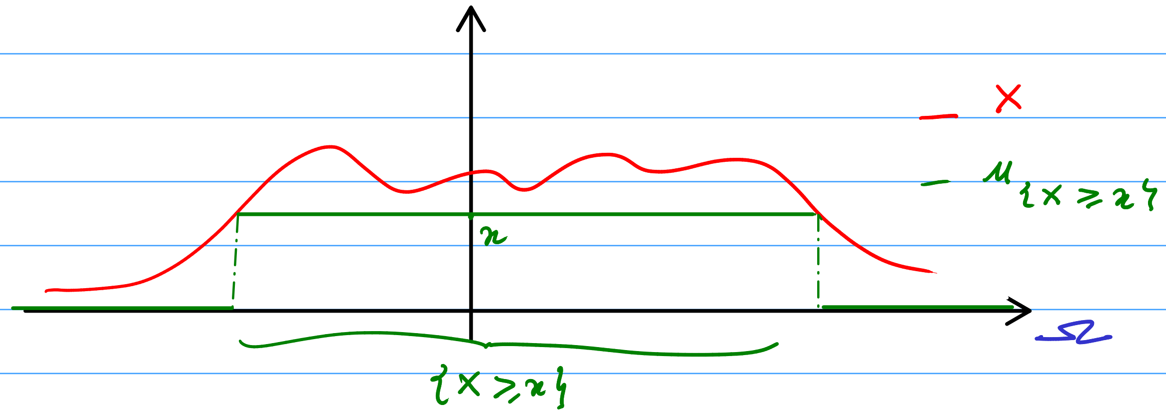
$$\left| \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} |\phi(t)|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|\, dt}_{= M \text{ car } \phi \in \mathcal{L}^1(\lambda)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Autrement dit $\mu(\{a\}) = 0$.

Exercice 5 : Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une v.a positive

1)



Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on a toujours et pour tout $\omega \in \Omega$

$$x \, 1_{\{X \geq x\}}(\omega) \leq X(\omega)$$

monotonie

$$\Rightarrow \int_\Omega x \, 1_{\{X \geq x\}}(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_\Omega X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

$$\Rightarrow x \, \mathbb{P}(\{X \geq x\}) \leq \mathbb{E}(X)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{X \geq x\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

2) On remarque que dans la question précédente si $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une application $\nearrow$

$$\{X \geq x\} \subset \{\varphi(X) \geq \varphi(x)\} \qquad (*)$$

On pose $Z = \varphi(X)$ et $a = \varphi(x) \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a} \qquad \text{Markov}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\varphi(X) \geq \varphi(x)) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(x)}$$

(*)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(a)}$$

reste à appliquer avec $\varphi(x) = x^p$ ou $\varphi(x) = e^{\lambda x}$

Markov Chernoff