Théorie générale de l'intégration

Intégrale par rapport à une mesure

Exercice 1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Si $f = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{A}$, alors $\int_X f d\mu = a\mu(A) + b\mu(B)$.
2. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable et $\mu\big(f^{-1}(\{+\infty\})\big) = 0$, alors $\int_X f d\mu < +\infty$.
3. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On a $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-pp.

Exercice 2. Mesures à densité Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on note

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \varphi d\mu.$$

La fonction φ est appelée **fonction densité**.

1. Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$.
2. Donner des examples de mesure à densité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda_1)$ et $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \chi)$.
3. On souhaite déterminer quelle est l'intégrale d'une fonction pour la mesure ν.
   (a) Pour toute fonction mesurable positive $f : X \to [0, +\infty]$, montrer qu'on a $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$. *On commencera par le montrer pour les fonctions étagées positives.*
   (b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1(X, \nu)$ si et seulement si $f\varphi \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Lorsque c'est le cas, montrer que $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$.

Théorèmes limites

Exercice 3. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On note $A = f^{-1}([0, 1[)$, $B = f^{-1}(\{1\})$ et $C = f^{-1}(]1, +\infty[)$

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{B \cup C} f^n d\mu$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_A f^n d\mu$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{\mathbb{1}_A}{1 - f} \in \mathscr{L}^1(X)$.
3. On suppose que $f \in \mathscr{L}^1(X)$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{A \cup B} f^n d\mu$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda_1(x)$.

Exercice 5. Soit f une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda_1)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{[x, +\infty[} f d\lambda_1 = 0$.

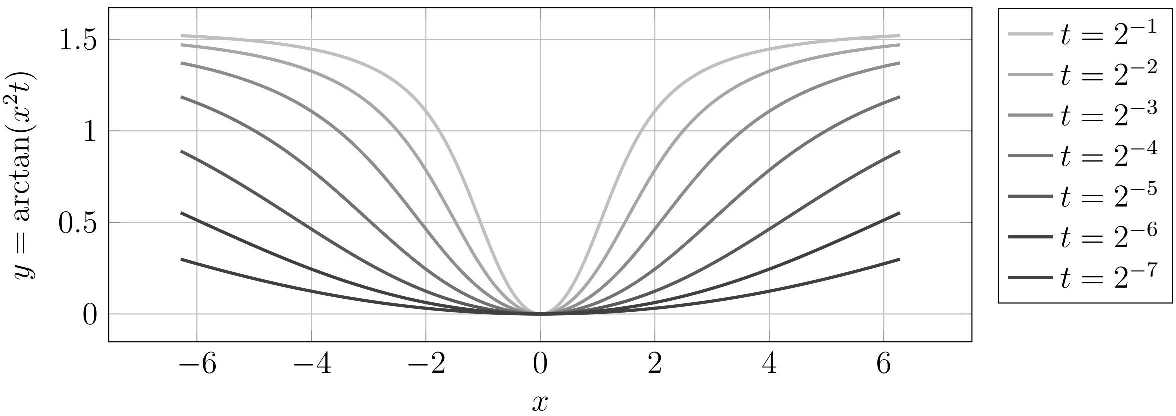
2. On suppose que f est décroissante. En déduire que f est positive et montrer qu'il existe une constante C telle que $f(x) \leqslant \frac{C}{x}$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement f positive.

Exercice 6. On considère $[-1,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1. Pour tout $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$.

1. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite de la suite $\left(\int_{[-1,1]} f_n d\lambda_1\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.
2. Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} \varphi f_n d\lambda_1 = \varphi(0)$.

Intégrales à paramètres

Exercice 7. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $t \geqslant 0$ on note $F(t) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(x^2 t) d\mu(x)$.



1. Montrer que F est bien définie et déterminer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer F' sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre. *Indication : montrer que F est dérivable sur tout intervalle de la forme $]a,+\infty[$ avec $0 < a$.*
4. Donner une condition suffisante pour que la fonction F soit dérivable en 0. Que vaut alors $F'(0)$?

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{x\to+\infty} \int_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon[} f d\lambda_1 = 0$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to+\infty} \int_{[ax,bx]} f d\lambda_1$?

Exercice 9. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. On suppose que $0 \leqslant f \leqslant 1$ et que $\int_X f d\mu = \int_X f^2 d\mu$. Montrer qu'il existe une partie mesurable $A \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ pour μ presque tout $x \in X$.

Exercice 10. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que f est décroissante, montrer que f est positive et que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. *Indication : utiliser la première question de l'exercice 5.*

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un fonction Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_h(x) = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[x,x+h]} d\lambda_1$.

1. Montrer que la fonction ϕ_h ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \phi_h(x) = 0$.

Exercice 12. Extrait d'un sujet d'examen Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $t \geqslant 0$ on note $F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2 t} d\mu(x)$.

1. Montrer que F est bien définie et déterminer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer F' sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre. *Indication : montrer que F est dérivable sur tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ avec $0 < a$.*
4. Donner une condition suffisante pour que la fonction F soit dérivable en 0. Que vaut alors $F'(0)$?

Exercice I : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

1) $f = a \mathbb{1}_A + b \mathbb{1}_B$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{A}$

$$\int_X f \, d\mu = a \, \mu(A) + b \, \mu(B)$$

FAUX en général : $X = \mathbb{R}$ et $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$

VRAI si $a, b \geq 0$ cf intégrale des fonctions étagées positives

2) FAUX $f : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ mesurable et $\mu\left(f^{-1}(\{+\infty\})\right) = 0$

si $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda_1$ $\quad f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ $\quad \int_{\mathbb{R}} f = +\infty$.

3) FAUX $f : X \to \mathbb{R}$ peut prendre des valeurs ≥ 0 et ≤ 0 ...

si $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda_1$ $\quad f = \mathbb{1}_{[-1,0]} - \mathbb{1}_{[0,1]}$

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mu([-1,0]) - \mu([0,1]) = 1 - 1 = 0$$

Exercice II : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \varphi \, d\mu$$

1) on montre que ν est une mesure :

$$\times \quad \nu(\emptyset) = \int_X \mathbb{1}_\emptyset \varphi \, d\mu = \int_X 0.\varphi \, d\mu = 0$$

↖ fonction nulle.

* Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ suite de parties de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjointes :

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \int_X \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i} \varphi \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_i} \varphi \, d\mu$$

corollaire 3.2.2

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_X \mathbb{1}_{A_i} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i)$$

Et ν est bien une mesure.

2) Prendre des exemples de mesures de proba :

sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \chi)$: la mesure de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

$$\varphi(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

la bernoulli de paramètre p

$$\varphi(n) = p \, \mathbb{1}_{\{1\}}(n) + (1-p) \, \mathbb{1}_{\{0\}}$$

sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. La mesure gaussienne $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La mesure uniforme sur $[a,b]$

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

3) Soit $f : X \to [0,+\infty]$ une application mesurable

* Si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée.

$$\int_X f \, d\nu = \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \nu(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \varphi \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \varphi \, d\mu = \int_X f \varphi \, d\mu$$

* Si f mesurable positive, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de fonctions étagées telle que $f_n \to f$ pp.

$$\int_X f \, d\nu = \int_X \lim_n f_n \, d\nu \underset{\text{cv monotone}}{=} \lim_n \int_X f_n \, d\nu \underset{\text{ci-dessus}}{=} \lim_n \int f_n \varphi \, d\mu$$

$$\overset{\text{cv monotone}}{=} \int \lim_n f_n \varphi \, d\mu = \int f \varphi \, d\mu .$$

b) $f : X \to \mathbb{R}$

Si $f\varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ ssi $\int_X |f\varphi| \, d\mu < +\infty$

ssi $\int_X |f| \varphi \, d\mu < +\infty$ car $\varphi \geq 0$

ssi $\int_X |f| \, d\nu < +\infty$

ssi $f \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$

Exercice 3 : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable

$A = f^{-1}([0,1[)$ $\quad B = f^{-1}(\{1\})$ $\quad C = f^{-1}(]1,+\infty[)$

1) On a $\displaystyle\int_{B\cup C} f^n \, d\mu = \underbrace{\int_B f^n \, d\mu}_{①} + \underbrace{\int_C f^n \, d\mu}_{②}$

$① = \displaystyle\int_B 1 \, d\mu = \mu(B)$

② . Si $\mu(C) = 0$ alors $② = 0$

Si $\mu(C) > 0$. On pose $g_n = \mathbb{1}_C f^n$ qui est une suite croissante de fonctions mesurables, positives . De plus $g_n \longrightarrow +\infty$

" fonction infinie "

on a $\displaystyle\int_C f^n \, d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\therefore \displaystyle\lim_n \int_{B\cup C} f^n \, d\mu = \begin{cases} \mu(B) & \text{si } \mu(C) = 0 \\ +\infty & \text{si } \mu(C) > 0 \end{cases}$

2) Idée : série géométrique !

Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A f^n \, d\mu$ cv $\underset{\text{cv monotone}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} f^n \, d\mu < +\infty$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_A \frac{1}{1-f} \, d\mu < +\infty$

remarque : $\displaystyle\int_A f = \int_X \underbrace{\mathbb{1}_A f}_{\text{abus de notation...}}$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_X \frac{\mathbb{1}_A}{|1-f|} \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow \frac{\mathbb{1}_A}{|1-f|} \in \mathcal{L}^1(X)$

3) $f \in \mathcal{L}^1(X)$

$$\int_{A \cup B} f^n \, d\mu = \underbrace{\int_A f^n \, d\mu}_{(*)} + \underbrace{\int_B f^n \, d\mu}_{= \mu(B) \text{ cf question 1}}$$

par (*) . $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{1}_A f^n| \leq f \in \mathcal{L}^1(X)$ par définition de A.

. $\mathbb{1}_A f^n \longrightarrow 0$ pp.

D'après le th de convergence dominée : $\lim_n \int_A f^n \, d\mu = 0$

et $\int_{A \cup B} f^n \, d\mu = \mu(B)$.

Exercice 4 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable.

On a déjà vu la suite de fonction $\cos^n(\pi\,\cdot)$ au TD 1. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a

$$\cos^n(\pi x) \longrightarrow 0$$

Autrement dit, $\cos^n(\pi x) \to 0$ pp.

Ainsi, • $f(\cdot) \cos^n(\pi\,\cdot) \longrightarrow 0$ pp

• $|f(\cdot) \cos^n(\pi\,\cdot)| \leq |f(\cdot)|$ avec $f \in \mathcal{L}^1(X)$

$\Rightarrow$ Th de cv dominée $\lim\limits_{n \to \infty} \int f(x) \cos^n(\pi x)\, d\lambda_1(x) = \int 0\, d\lambda_1 = 0$.

Exercice 5 : f intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda_1)$

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite telle que $\lim_n x_n = +\infty$. On considère

$$\lim_n \int_{x_n}^{+\infty} f \, d\lambda_1 = \lim_n \int \mathbb{1}_{[x_n, +\infty[} f \, d\lambda_1 = \int 0 \, d\lambda_1 = 0 \quad (*)$$

- avec $|\mathbb{1}_{[x_n,+\infty[} f| \leq f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$
- $|\mathbb{1}_{[x_n,+\infty[} f \to 0$ qd $n \to +\infty$

$\Big\}$ Th de cv dominée

par suite, comme $(*)$ est vraie pour toute suite (x_n) on a $\int_{[x,\infty[} f \, d\lambda_1 \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

2) On suppose f décroissante. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $-\eta = f(x_0) < 0$

dans ce cas on a $f(x) < -\eta \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$

$$\Rightarrow |f(x)| > \eta$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} |f| \, d\lambda_1 > \int_{x_0}^{+\infty} \eta \, d\lambda_1 = +\infty$$

et $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

On a donc $f \geq 0$. Dans ce cas

$$\int_0^x f \, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^+} f \, \mathbb{1}_{[0,x]} \, d\lambda_1 \geq f(x) \int_0^x d\lambda_1$$
$$\geq x f(x)$$

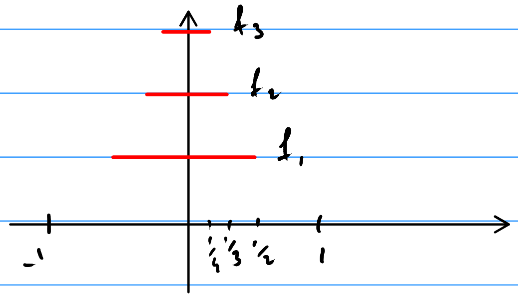
Ainsi $f(x) \leq \dfrac{\int_0^x f \, d\lambda_1}{x}$

3) On suppose $f \geq 0$. Prendre $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n^2}]}$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| \, d\lambda_1 \underset{\text{cv monotone}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n^2}]} \, d\lambda_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ n'est pas définie. $\left(\overline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) \neq \underline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) \right)$

Exercice 6 : $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda_1)$ et $f_n = n \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$



• Soit $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$

$f_n(x) = n \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(x)$

Si $n \in \mathbb{N}$ satisfait $|x| > \frac{1}{2n} \iff n > E\left(\frac{1}{2|x|}\right)$

alors $f_n(x) = 0$

• en $x = 0$ $f_n(0) = n$

En résumé $\lim_n f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$.

Maintenant, $\int_{[-1,1]} f_n \, d\lambda_1 = \int_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]} n \, d\lambda_1 = \frac{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi on a $\lim \int f_n \neq \int \lim f_n$. Ce n'est pas contradictoire avec

• th cv monotone : la suite f_n n'est pas $\nearrow$

$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = (1, 2, 3, 0, 0 \dots)$

• th cv dominée : on a pas de majorant intégrable uniforme en n ...

2) $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue (elle est donc intégrable car $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ $\forall x \in [-1,1]$.)

$$\int_{[-1,1]} \varphi f_n \, d\lambda_1 = n \int_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]} (\varphi(t) - \varphi(0)) + \varphi(0) \, d\lambda_1(t)$$

$$= \underbrace{n \int_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]} (\varphi(t) - \varphi(0))}_{(*)} + \varphi(0)$$

$$(*) \leq \underbrace{\sup_{t \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]} |\varphi(t) - \varphi(0)|}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \quad \text{car } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^0.$$

et $\lim_{n \to +\infty} \int \varphi f_n \, d\lambda_1 = \varphi(0)$.

Exercice 7 : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. on note $\forall t \geq 0$ $F(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Arctan}(x^2 t)\, d\mu(x)$

remarque : μ est une mesure finie. les ctes sont intégrables !

1) Soit $t \geq 0$ $|\mathrm{Arctan}(x^2 t)| \leq \frac{\pi}{2}$

$$|F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{Arctan}(x^2 t)|\, d\mu(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} d\mu = \frac{\pi}{2}\, \mu(\mathbb{R}) < +\infty$$

et F est bien définie. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle tq $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Arctan}(x^2 t_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

. $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $|\mathrm{Arctan}(x^2 t_n)| \leq \frac{\pi}{2}$ qui est intégrable.

$\Rightarrow$ th cv dominée : $\lim\limits_{n \to +\infty} F(t_n) = \frac{\pi}{2}\, \mu(\mathbb{R}^*)$.

2) La fonction F est définie comme une intégrale à paramètre

. À $t \geq 0$ fixé $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x^2 t)$ est bien intégrable

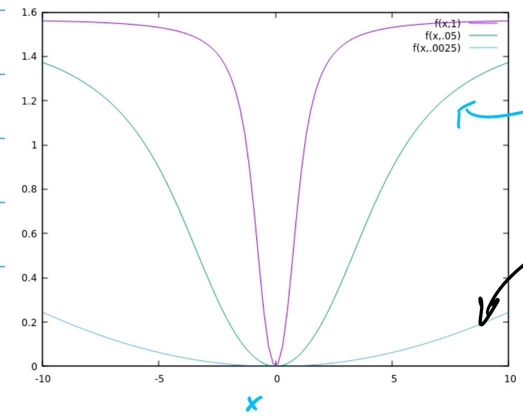
. À $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto \mathrm{Arctan}(x^2 t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$

. on a la majoration $\mathrm{Arctan}(x^2 t) \leq \frac{\pi}{2}$ (cte intégrable)

L'application F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à voir la continuité en $t = 0$

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Arctan}(x^2 t)\, d\mu(x) \underset{\text{cv dominée}}{=} \int \lim_{t \to 0} \mathrm{Arctan}(x^2 t)\, d\mu(x)$$

$$= 0 = F(0)$$



Arctan $(0{,}05\, x^2)$

Arctan $(0{,}0025\, x^2)$

3) Même remarque. Soit $a>0$

. À $t \geq 0$ fixé $x \mapsto \text{Arctan}(x^2 t)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$

. À $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto \text{Arctan}(x^2 t)$ est bien dérivable sur $]a, +\infty[$

. on a la majoration pour $t \in]a, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \text{Arctan}(x^2 t) \right| = \left| \frac{x^2}{1 + x^4 a^2} \right| \leq M$$

μ-intégrable

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4 a^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4 a^2} = 0$

et $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^4 a^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc majorée par un $M>0$.

$$F'(t) \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4 t^2} \, d\mu(x) \qquad \forall t \in]a, +\infty[.$$

Comme $(*)$ est vérifiée $\forall a > 0$ on a $(*)$ vérifiée sur $\mathbb{R}_*^+$

4) Si $\int x^2 \, d\mu(x) < +\infty$ alors on peut poser $F'(0) = \lim\limits_{t \to 0} F'(t)$ car F est $\mathcal{C}^1$.