Théorie générale de la mesure

Espaces mesurables, Applications mesurables

Exercice 1. Tribu engendrée par les singletons Soit X un ensemble. On considère la collection de parties de X suivante :

$$\mathscr{D} = \{A \subset X \mid A \text{ dénombrable, ou } A^c \text{ dénombrable}\} \subset \mathscr{P}(X).$$

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une tribu sur X.
2. On note $\mathscr{C} = \Big\{\{x\} \mid x \in X\Big\} \subset \mathscr{P}(X)$ la classe des singletons (*i.e.* des parties à un seul élément). Comparer $\mathscr{D}$ et $\sigma(\mathscr{C})$.
3. Sur $\mathbb{N}$, quelle est la tribu engendrée par les singletons ?

Noter que dans l'exercice suivant, l'ensemble X n'est pas nécessairement borélien…

Exercice 2. Tribu induite Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, on note

$$\mathscr{A}_X = \Big\{X \cap B \;\Big|\; B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\Big\}$$

1. Montrer que $\mathscr{A}_X$ est une tribu sur X. On l'appelle la tribu induite ou tribu trace sur X par $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.
   Remarque : si $A \subset X$, attention à ne pas confondre son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ (noté A^c) et son complémentaire dans X qu'on notera $X \setminus A$.
2. On note $\mathscr{O}_X = \Big\{X \cap U \;\Big|\; U \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}\Big\}$ la classe des ouverts induits de X, et $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{O}_X)$ la tribu borélienne de X. Montrer que $\mathscr{A}_X = \mathscr{B}(X)$.
   Indication : on pourra s'intéresser à l'injection $i : X \to \mathbb{R}^n$ définie par $i(x) = x$.

Exercice 3. Tribus engendrées par les partitions finies Soit $(X, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Déterminer les fonctions de $X \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables lorsque

1. $\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$.
2. $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$
3. $\mathscr{F} = \Big\{\bigcup_{i \in I} A_i \;\Big|\; I \subset \{1, \dots, n\}\Big\}$ avec $(A_1, \dots, A_n)$ une partition finie de X. (On montrera que $\mathscr{F}$ est une tribu et on se contentera d'un critère suffisant de mesurabilité).

On a vu en cours que la mesurabilité est compatible avec les opérations usuelles, les passages à la limite, *etc.*…

Exercice 4. Monter que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont boréliennes :

1. $g(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (\cos(xe^n))$,
2. $h(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} \arctan\Big(f(x^n) + n^3 x^7\Big)$
3. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \cos(x) & \text{sinon} \end{cases}$

La mesurabilité est aussi compatible avec la troncature, l'extension ou la décomposition en forme polaire.

Exercice 5. Troncature Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurables. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f_a : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leqslant a \\ a & \text{si } f(x) > a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

est mesurable.

Exercice 6.

1. On suppose que $X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonctions borélienne. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne.
2. Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ borélienne. Montrer que $|h|$ est borélienne et qu'il existe $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ borélienne telle que $|\alpha(x)| = 1$ et $h(x) = |h(x)|\alpha(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est croissante, montrer que f est borélienne.
2. Si f est dérivable, montrer que f' est borélienne.

Mesures

Exercice 8. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on considère λ la mesure de Lebesgue, $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$ et $\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\delta_k$. Pour chacune de ces mesures, calculer les mesures des ensembles suivants :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [n, n+1+\frac{1}{n^2}]$, $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$;
2. $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$

Exercice 9. Mesure image Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ des espaces mesurables et $F : X \to Y$ une application mesurable. Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, on note $F_*\mu : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ la mesure image de μ par F.

1. Pour $a \in X$, déterminer $F_*\delta_a$.
2. On dit qu'une application $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ préserve la mesure χ si $G_*\chi = \chi$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}$. À quelle condition l'application G préserve-t-elle la mesure δ_a ?
   (b) À quelle condition l'application G préserve-t-elle la mesure de comptage ?

Exercice 10. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = 1$.

1. Montrer que $\mu(\bigcap_{\in\mathbb{N}} A_n) = 1$. Interpréter en passant au complémentaire.
2. Le résultat est-il encore vrai si on a $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 11. Lois conditionnelles Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour toute évènement $A \in \mathscr{F}$ de probabilité non nulle, on considère l'application $\mathbb{P}(.|A) : \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(.|A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Pour tous évènements $A, B \in \mathscr{F}$ de probabilités non nulles, exprimer $\mathbb{P}(A|B)$ en fonction de $\mathbb{P}(B|A)$, et en déduire la formule de Bayes.

Exercice 12. Fonctions de répartition Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$.

1. Exprimer F_X à l'aide de la loi $\mathbb{P}_X$ de X. Que peut-on dire de la monotonie de F_X ? Déterminer $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t)$
2. Montrer F_X est continue à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a)$.
3. Montrer que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R} \;\; \mathbb{P}(X = a) = 0$.

La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Réciproquement, cela permet de la caractériser.

Exercice 13. Invariance par translation de la mesure de Lebesgue Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$.

1. Montrer que $A + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on note $\mu(A) = \lambda_1(A + a)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application μ ainsi définie est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
3. Déduire de ce qui précède que la mesure de Lebesgue est invariante par translation : pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda_1(A + a) = \lambda_1(A)$.

Exercice 14. Caractérisation de la mesure de Lebesgue Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$.
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\mu([0, 1[) = 1$;
- Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mu(I + a) = \mu(I)$.

Le but est de montrer que μ est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *On dit que la mesure μ est diffuse.*
2. Montrer que $\mu([0, x[) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On pourra commencer par le montrer pour tout rationnel $x \in \mathbb{Q}_+^*$.*
3. En déduire que $\mu = \lambda_1$.

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 15. Soit $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ et soit $\mathscr{C} = \Big\{\{1\},\{2,4\},\{2,5\}\Big\} \subset \mathscr{P}(X)$. Déterminer $\sigma(\mathscr{C})$.

Exercice 16. Tribu image réciproque Soit X un ensemble, $(Y,\mathscr{B})$ un espace mesuré, et $f : X \to Y$ un application. On note

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}\}.$$

1. Montrer que $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur X.
2. On suppose que $\mathscr{A}$ est une tribu sur X. Montrer que f est $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-mesurable si et seulement si $f^*(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$.

Exercice 17. Soit λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, δ_0 la mesure de Dirac en 0, et $\mu = \lambda_1 + \delta_0$.

1. Calculer $\mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n)$, où $A_n = [0, \frac{1}{n}[$;
2. Calculer $\mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n)$, où $A_n = [\frac{1}{n}, 1[$;
3. Calculer $\mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n)$, où $A_n = [-\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}[$;
4. Calculer $\mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n)$, où $A_n = [-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$.

Exercice 18. Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lambda_n(A) = 0$. Montrer que A est d'intérieur vide.

Exercice 19. Extrait d'un sujet d'examen.
Soit $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable, où $\mathscr{A}$ est une tribu qui contient les singletons. Dans ce qui suit, toutes les mesures considérées sont des mesures sur $(X,\mathscr{A})$.
On dit qu'une mesure μ est diffuse si elle vérifie $\forall x \in X \quad \mu(\{x\}) = 0$.
On dit qu'une mesure μ est discrète s'il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer qu'une mesure μ est diffuse si et seulement si, pour toute partie dénombrable $A \subset X$ on a $\mu(A) = 0$.
2. Soit μ une mesure discrète, et soit $D \subset X$ dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$. Montrer qu'il existe des réels positifs $(\alpha_a)_{a\in D}$ tels que $\mu = \sum\limits_{a\in D} \alpha_a \delta_a$.
3. Soit μ une mesure finie, et soit $D = \Big\{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\Big\}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $E_n = \Big\{x \in X \mid \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\Big\}$. Montrer que E_n est une partie finie de X pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que D est dénombrable.
   (b) Pour tout $A \in \mathscr{A}$ on note $\nu(A) = \mu(A \cap D^c)$. Montrer que ν est une mesure diffuse.
   (c) Montrer que μ est la somme d'une mesure diffuse et d'une mesure discrète.
4. Montrer que le résultat de la question 3.(c) est encore vrai si la mesure μ est σ-finie.

Exercice 20. Un exemple de partie non mesurable
On considère la relation d'équivalence sur $[0,1]$ définie par

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

On peut donc écrire $[0,1]$ comme l'union disjointe de ses classes d'équivalences : $[0,1] = \bigsqcup\limits_{i\in I} C_i$.
Pour tout $i \in I$ on se donne un élément $x_i \in C_i$ et on considère $A = \{x_i \mid i \in I\}$. Par ailleurs, pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, on note $A_q = A + q$.

1. Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.
2. Montrer que $[0,1] \subset \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.
3. En supposant que A est borélien, exprimer $\lambda_1(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q)$ en fonction de $\lambda_1(A)$. Conclure.

remarque : tribu de X : contient le $\emptyset$, stable par complémentaire, stable par union dénombrable.

$\Leftrightarrow$ contient X, stable par complémentaire, stable par intersection dénombrable.

Exercice 1 : X est un ensemble qcq. On pose
$$\mathcal{D} = \{ A \subset X \mid A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable} \}$$

1) Montrons que $\mathcal{D}$ est une tribu :

* $X \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{card}(X^c) = \mathrm{Card}(\emptyset) = 0$
* $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire : Si $A \in \mathcal{D}$ alors de 2 choses l'une : . A n'est pas dénombrable, mais A^c est dénombrable et $A^c \in \mathcal{D}$

  . A est dénombrable $(A^c)^c = A$ est dénombrable et $A^c \in \mathcal{D}$.
* $\mathcal{D}$ est stable par intersection dénombrable : Soit A_i, $i \in \mathbb{N}$ on pose
$$I = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Montrons donc que $I \in \mathcal{D}$. Supposons que $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tq A_{i_0} soit dénombrable. Dans ce cas
$$I = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A_{i_0}$$
et I est dénombrable car inclus dans A_{i_0} qui est dénombrable et $I \in \mathcal{D}$. Supposons maintenant que $\forall i \in \mathbb{N}$, A_i non dénombrable. Comme $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{D}$ les A_i^c sont dénombrables et
$$I^c = \left(\bigcap A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$$
est dénombrable (union dénombrable d'ensemble dénombrable). Ainsi $I \in \mathcal{D}$.

2) Soit $\mathcal{C} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. On a $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. En effet, les singletons sont dénombrables et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.
Reste à voir que $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Soit $A \in \mathcal{D}$, on peut supposer A dénombrable (par symétrie de A et A^c). A s'écrit alors

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

et A est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$ et donc $A \subset \mathcal{D}$.

$$\therefore \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}.$$

3) Si $X = \mathbb{N}$, on a bien sûr $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$. De plus si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors A est dénombrable et $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ ce qui donne $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

On obtient $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarque : la plus petite tribu sur $\mathbb{N}$ qui contient les singletons est l'ensemble non dénombrable $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$!

Exercice 3 : $(X, \mathcal{F})$ espace mesurable

Dans cet exercice on considère les fonctions à valeurs réelle

on a donc $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

boréliens

1) Si $\mathcal{F} = \{\phi, X\}$ tribu triviale : Si f est $\mathcal{F}$_$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable

on a $\forall a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(\{a\}) = \phi \text{ ou } f^{-1}(\{a\}) = X$$

Comme f est une application, il existe un unique réel α_0 tq

$$f(x) = \alpha_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ f est constante.

Reciproquement, les applications constantes sont mesurable par rapport à toutes les tribus.

En résumé, les applications $\mathcal{F}$_$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables sont les ctes.

2) Si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. Dans ce cas, soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ et f est mesurable.

En résumé, les applications $\mathcal{F}$_$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables sont l'ensemble des fonctions de $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit X un ensemble et $(A_1, \dots, A_n)$ une partition finie de X. $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$.

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$

3) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$: car $\emptyset \subset \{1, \dots, n\}$

- stable par complémentaire : Soit $B \subset X$, $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ avec $I \subset \{1, \dots, n\}$ et
$$B^c = X \setminus B = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} A_i$$
et $B^c \in \mathcal{A}$.

- stable par union dénombrable : Soit B_j, $j \in \mathbb{N}$ une famille dénombrable de $\mathcal{A}$:
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i \right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j} A_i$$

or cette dernière union est finie car les $I_j \subset \{1, \dots, n\}$. On a bien $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A}$.

Posons $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, alors les $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ sont mesurables.

On peut montrer que ce sont les seules...

Exercice 4 :

1) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \cos(x) & \text{sinon} \end{cases} = e^x \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) + \cos(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$

c'est une somme et produit de fonctions boréliennes. f est borélienne

2) $g(x) = \inf_n (\cos(x e^n))$ les applications $x \mapsto \cos(x e^n)$ sont bien toutes continues

Etant donnée une suite de fonction borélienne, $\inf_n$ est aussi borélienne. (cf cours)

3) $h(x) = \limsup_n (\text{Arctan}(f(x^n) + n^3 x))$

les applications $x \mapsto n^3 x$; est C^0 donc borélienne

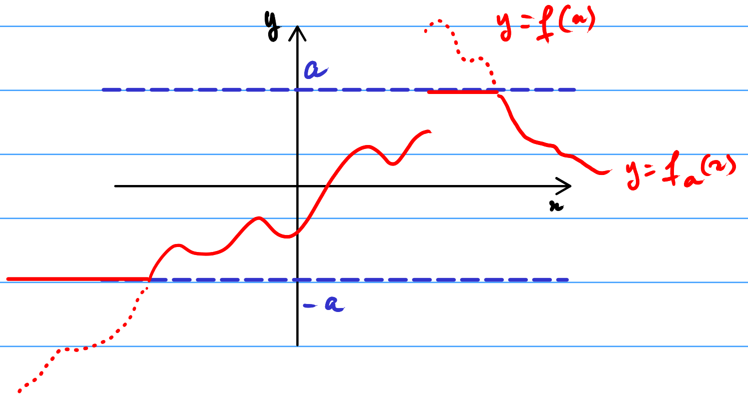
$x \mapsto x^n \mapsto f(x^n)$; est la composée d'application borélienne donc borélienne.

$x \mapsto n^3 x + f(x^n) \longmapsto \text{Arctan}(n^3 x + f(x^n))$

est la composée d'application borélienne.

Enfin la limsup d'une suite de fonction borélienne est bien borélienne (cf cours)

Exercice 5 : (troncature) $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable.



$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \\ a & \text{si } f(x) > a \end{cases}$$

* Méthode 1 :

Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, l'ensemble $A_a = \{y \in A \mid |y| < a\} = A \cap]-a, a[$

- si $a, -a \notin A$ on a $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a)$
- Si $a \in A, -a \notin A$ on a $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}([a, +\infty[)$
- Si $a \notin A, -a \in A$ on a $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}(]-\infty, a])$
- Si $a, -a \in A$ on a $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}(]-\infty, a]) \cup f^{-1}([a, +\infty[)$

Dans tous les cas ces ensembles sont mesurables et f_a est mesurable.

* Méthode 2 : On a $f(x) = \mathbb{1}_{]-\infty, -a]}(f(x))\, a + \mathbb{1}_{]-a, a[}(f(x))\, f(x) + \mathbb{1}_{]a, +\infty[}(f(x))\, a$

qui est une somme de fonctions mesurables : En effet $\mathbb{1}_{]-\infty, -a]}(f(\cdot))$ est la composée de deux applications mesurables...

non nécessairement mesurable !

Exercice 2 : Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, on note
$$\mathcal{A}_X = \{ X \cap B \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \}$$

1) Montrons que $\mathcal{A}_X$ est une tribu sur X

- contient $\emptyset$: En effet $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $X \cap \emptyset = \emptyset$.
- stable par union dénombrable : soit $A_i \in \mathcal{A}_X$, $i \in \mathbb{N}$. Il existe donc des $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tq
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X \cap B_i) = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) \cap X \in \mathcal{A}_X$$
car $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est stable par union dénombrable
- stable par passage au complémentaire : Soit $A \in \mathcal{A}_X$, alors il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tq $A = X \cap B$. De plus
$$X \setminus A = X \cap A^c = X \cap (X^c \cup B^c)$$
$$= (X \cap X^c) \cup X \cap B^c = X \cap B^c$$
comme $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on a bien $X \setminus A \in \mathcal{A}_X$.

2) On note $\mathcal{O}_X = \{ X \cap U \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \}$ et $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$

On considère l'injection $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. L'application i
$x \longmapsto i(x)$
est continue. Donc pour tout $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$
$$U \cap X = i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$
i.e. l'image réciproque des ouverts de $\mathbb{R}^n$ par i sont les ouverts de $\mathcal{O}_X$

lemme 2.2.1 : si $f : X \longrightarrow Y$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ alors $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$

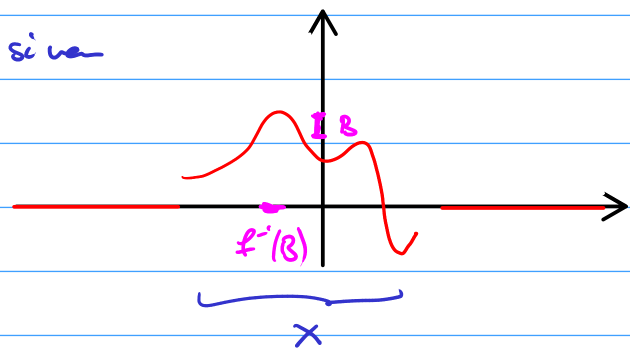
D'après la remarque : $\mathcal{B}(X) = \sigma(\underbrace{i^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})}_{=\mathcal{O}_X}) = i^{-1}(\underbrace{\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}) = \mathcal{A}_X$

Exercice 6 :

1) $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne.

on a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Idée : pouvoir étendre f à tout $\mathbb{R}^n$...

Soit donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$:

↳ si $0 \notin B$ $g^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ mesurable

↳ si $0 \in B$ $g^{-1}(B) = X^c \cup f^{-1}(B)$ mesurable.

4). Soit $h : X \to \mathbb{C}$ mesurable. L'application $|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est continue et donc borélienne. Ainsi, $|h| : X \to \mathbb{C}$ qui est la composée de 2 appli mesurables est mesurable.

• remarque : Si h est mesurable à valeur dans $\mathbb{C}$, on peut factoriser h en "forme polaire" avec 2 fonctions mesurables...

L'ensemble $E = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(X)$ car f est mesurable. De plus $\mathbb{1}_E : X \to \mathbb{R}$ est donc mesurable. On remarque que l'application $x \mapsto f(x) + \mathbb{1}_E(x)$ n'est jamais nulle (vaut 1 si $x \in E$ et $f(x)$ sinon). On pose :

$$\alpha(x) = \frac{f(x) + \mathbb{1}_E(x)}{|f(x) + \mathbb{1}_E(x)|}$$

La fonction α est bien mesurable comme composée d'applications mesurables :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\text{mesurable}} & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\text{continue}} & \mathbb{S}^1 \\ x & \longmapsto & f(x) + 1\!\!1_E(x) = t & \longmapsto & \dfrac{t}{|t|} \end{array}$$

et on a $\quad f(x) + 1\!\!1_E(x) = \alpha(x) \, |f(x) + 1\!\!1_E(x)|$.

Ainsi, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 = \alpha(x)|f(x)| & \text{si } x \in E \\ \alpha(x)|f(x)| & \text{si } x \notin E \end{cases}$

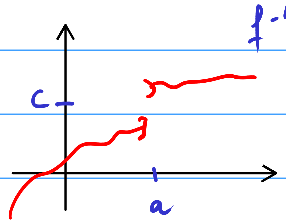
Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1) Supposé f croissante. On montre que $f^{-1}(]-\infty, c[)$ $\forall c \in \mathbb{R}$ est un intervalle : on note

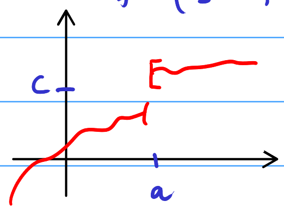
$$a = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\}$$ (avec $\sup \emptyset = -\infty$)

Remarque : Attention :

$f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a]$



$f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a[$



- comme f est croissante $\forall x < a$, on a $f(x) < c$, donc $]-\infty, a[\subset f^{-1}(]-\infty, c[)$.
- D'autre part, $\forall x > a \Rightarrow f(x) \geq c$ et $f^{-1}(]-\infty, c[) \subset]-\infty, a]$.

On en déduit que $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a]$ ou $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a[$

- remarque : les bonnes propriétés des images réciproques vis-à-vis des $\cup$, ^{c}, etc... donne $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

Les intervalles $]-\infty, c[$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f est donc mesurable

2) Supposé f dérivable. Montrons que f' est mesurable :

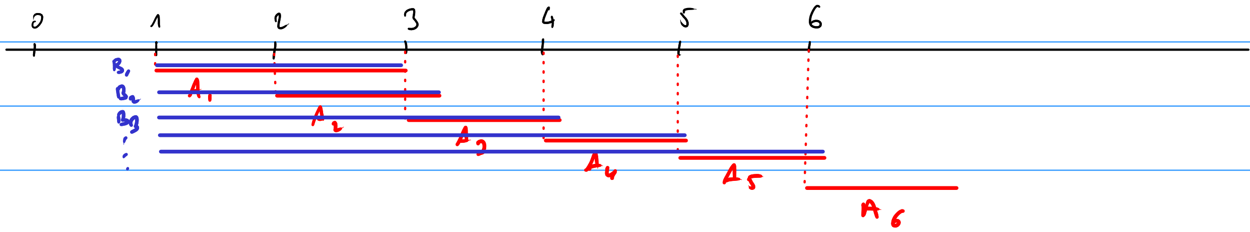
Idée : exprimer f' comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables

f est continue (car dérivable) et donc mesurable. On pose

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{1/n}$$

qui sont mesurables. On a de plus $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(x)$ et donc f' est mesurable.

Exercice 8 :



$A_1 = [1 ; 2 + \frac{1}{1}] = [1 ; 3]$

$A_2 = [2 ; 3 + \frac{1}{4}] =$

$A_3 = [3, 4 + \frac{1}{9}]$

$A_4 = [4, 5 + \frac{1}{25})$

$\dots$

$A_n = [n, n+1 + \frac{1}{n^2}]$

$B_1 = A_1 = [1, 3]$

$B_2 = A_1 \cup A_2 = [1 ; 3 + \frac{1}{4}]$

$B_3 = B_2 \cup A_3 = [1 ; 4 + \frac{1}{9}]$

$B_4 = B_3 \cup A_4 = [1, 5 + \frac{1}{25}]$

$\dots$

$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = [1, n+1 + \frac{1}{n^2}]$

$C_1 = A_1 = [1 ; 3]$

$C_2 = A_1 \cap A_2 = [2 ; 3]$

$C_3 = C_2 \cap A_3 = \{3\}$

$C_4 = \emptyset$

$C_5 = \emptyset$

$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$

1) $\mu(A_1) = 3$

$\mu(A_2) = 2$

$\mu(A_3) = 2$

$\vdots$

$n \geq 3$ $\mu(A_n) = 2$

$\mu(B_1) = 3$

$\mu(B_2) = 3$

$\mu(B_3) = 4$

$\vdots$

$\mu(B_n) = n$

$\mu(C_1) = 3$

$\mu(C_2) = 2$

$\mu(C_3) = 1$

$\mu(C_4) = 0$

$\dots$

$\mu(C_n) = 0$

$\nu(A_1) = 1 + 2 + 3 = 6$

$\nu(A_2) = 2 + 3 = 5$

$\nu(A_3) = 3 + 4 = 7$

$\dots$

$n \geq 3$ $\nu(A_n) = n + n + 1 = 2n + 1$

$\nu(B_1) = 6$

$\nu(B_2) = 6$

$\nu(B_3) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\dots$

$\nu(B_n) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\nu(C_1) = 6$

$\nu(C_2) = 5$

$\nu(C_3) = 3$

$\nu(C_4) = 0$

$\dots$

$\nu(C_n) = 0$

2) $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \mathbb{R}$ $\qquad \mu(B) = \nu(B) = +\infty$.

$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \emptyset$ $\qquad \mu(C) = \nu(C) = 0$.

Exercice 10 : $(X, \mathcal{A})$ espace mesurable et μ une mesure de proba sur $(X, \mathcal{A})$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{A}$ tq $\mu(A_n) = \mu(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

remarque : $\mu(X) = \mu(A_n \cup A_n^c) = \mu(A_n) + \mu(A_n^c)$
$\Rightarrow \mu(A_n^c) = 0$ car $\mu(X) < +\infty$.

1) on a $\mu\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c\right) \overset{\text{sous additivité}}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n^c) = 0$

ce qui donne $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(X)$

2) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ = mesure de comptage.

$A_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$. On a $\mu(A_n) = \mu(\mathbb{N}) = +\infty$

et $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$

Exercice 9 : $F : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ mesurable.

Si μ mesure sur $(X, \mathcal{A})$ on note $F_* \mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$
$B \mapsto \mu(F^{-1}(B))$

la mesure image.

1) On pose $\mu = \delta_a$ pour $a \in X$ fixé.

Soit $B \in \mathcal{B}$ $\quad F_*\mu(B) = \mu(F^{-1}(B)) = \delta_a(F^{-1}(B))$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a \in F^{-1}(B) \\ 0 & \text{si } a \notin F^{-1}(B) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } F(a) \in B \\ 0 & \text{si } F(a) \notin B \end{cases}$$

$$= \delta_{F(a)}(B).$$

2) On pose $X = \mathbb{N}$. Mesure invariante si $\nu = G_* \nu$
et $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

a) on pose $\nu = \delta_a$. On cherche une condition sur $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
tq $G_* \delta_a = \delta_a$

[$\Rightarrow$] $\quad G_*\delta_a = \delta_a \Rightarrow \delta_a = \delta_{G(a)}$ d'après la question 1)

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \delta_a(B) = \delta_{G(a)}(B)$

si $B = \{a\}$ $\Rightarrow \delta_a(\{a\}) = 1 = \delta_{G(a)}(\{a\})$

$\Rightarrow G(a) = a$

[$\Leftarrow$] Réciproquement, si $a = G(a)$ $\quad \delta_{G(a)} = G_* \delta_a = \delta_a$

En résumé, G préserve δ_a ssi G fixe a.

b) On pose γ mesure de comptage. Soit $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$G_* \gamma = \gamma \quad \text{ssi} \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad G_* \gamma(B) = \gamma(B)$$

$$\text{ssi} \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad G_* \gamma\Big(\bigcup_{x \in B} \{x\}\Big) = \gamma\Big(\bigcup_{x \in B} \{x\}\Big)$$

$$\text{ssi} \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \sum_{x \in B} G_* \gamma(\{x\}) = \sum_{x \in B} \gamma(\{x\})$$

$$\text{ssi} \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \sum_{x \in B} \gamma(f^{-1}\{x\}) = \sum_{x \in B} \gamma(\{x\})$$

ssi $f^{-1}(\{x\})$ et $\{x\}$ ont le même poids

ssi f est une bijection.

Exercice 11 : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé $A \in \mathcal{F}$ tq $\mathbb{P}(A) > 0$

$$\mathbb{P}(\cdot | A) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$
$$B \longmapsto \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

proba conditionnelle "choix aléatoire de proba..."

1) Montrer tq $\mathbb{P}(\cdot | A)$ est une mesure de proba :

* mesure du vide : $\mathbb{P}(\phi | A) = \frac{\mathbb{P}(\phi \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\phi)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(\phi) = 0$ car $\mathbb{P}$ mesure.

* union dénombrable : Soit $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille 2 à 2 disjoints de $\mathcal{F}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \,|\, A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (B_k \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\overset{\mathbb{P} \text{ mesure}}{=} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k | A)$$

$\square$

2) Loi de Bayes : Soit $A, B \in \mathcal{F}$ tq $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B|A)$$
$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(A|B)$$

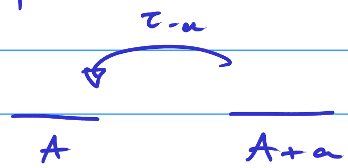
$$\Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{P}(A|B)$$

Exercice 13 : $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$

$A + a = \{ x + a \mid x \in A \}$.

1) Montrer que $A+a$ est mesurable ssi A mesurable.

Soit $\tau_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + a$ la translation par a. τ_a est C^0



et $A + a = \tau_{-a}^{-1}(A)$

Ainsi $a + A$ mesurable <u>ssi</u> $\tau_{-a}^{-1}(A)$ mesurable
<u>ssi</u> A mesurable

2) Soit

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty], \quad A \mapsto \mu(A) = \lambda_1(A + a)$$

* vide : $\emptyset + a \overset{(*)}{=} \emptyset \Rightarrow \mu(\emptyset) = \lambda_1(\emptyset + a) \overset{(*)}{=} \lambda_1(\emptyset) = 0$.

* union dénombrable : Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ famille disjointe de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) = \lambda_1\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) + a\Big)$$

λ_1 est une mesure.

$$= \lambda_1\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k + a)\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_1(A_k + a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

rappel : la mesure de Lebesgue λ_1 est l'unique mesure tq

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \lambda_1([a,b]) = b - a \quad (\#)$

3) on va montrer que $\mu([b,c]) = c - b \quad \forall b, c \in \mathbb{R}$

$$\mu([b,c]) = \lambda_1([b,c] + a) = \lambda_1([b+a, c+a])$$

$$\overset{(\#)}{=} (c+a) - (b+a) = c - b$$

En résumé, μ est une mesure et satisfait (*), par unicité, c'est la mesure de Lebesgue $\mu = \lambda_1$. Par suite, on a bien

$$\lambda_1(A+a) = \lambda_1(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Exercice 14 : Même notation $I + a = \{ x + a \mid x \in I \}$.

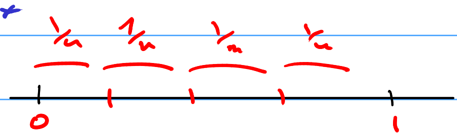
Hyp : on considère une mesure μ telle que :

- $\mu(]0,1]) = 1$
- pour tout intervalle I $\mu(I + a) = \mu(I)$

1) Montrer que $\mu(\{x\}) = 0$.

* on montre d'abord que $\mu(\{0\}) = 0$. En effet : on pose

$I_n = [0, \frac{1}{n}[$ $n \in \mathbb{N}^*$



on a

$\mu(I_1) = 1$ par hyp.

$\mu(I_1) = \mu(I_2 \cup (I_2 + \frac{1}{2})) = 2\mu(I_2) \Rightarrow \mu(I_2) = \frac{1}{2}$

...

$\mu(I_1) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (I_n + \frac{k}{n})\right) = n\,\mu(I_n) \Rightarrow \mu(I_n) = \frac{1}{n}$

Maintenant, comme I_n est famille décroissante de parties mesurables

$$\mu(\{0\}) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(I_n) = \lim_{n} \frac{1}{n} = 0$$

2) Montrer que $\mu([0, x[) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

① si $x \in \mathbb{Q}_*^+$, $x = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

c'est la même idée qu'au 1. on découpe $[0, x[$ en p intervalle de longueur $\frac{1}{q}$ ...

- On montre d'abord que $\mu([0,\frac{1}{q}[)=\frac{1}{q}$. En effet, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

on a $$1 = \mu([0,1[) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{q-1} [\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[\right)$$

$$= q\ \mu([0,\frac{1}{q}[)$$

$$\Rightarrow \mu([0,\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$$

- Dans le cas où $x=\frac{p}{q}$ on écrit

$$\mu([0,x[) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{p-1} [\frac{i}{q}; \frac{i+1}{q}[\right)$$

$$= p\ \mu([0,\frac{1}{q}[) = \frac{p}{q}.$$

② Soit $x \in \mathbb{R}$ qcq. Il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ croissante qui cv vers x. (prendre e.g. les troncatures des développement décimaux)

on a $$\mu([0,x[) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,q_n[\right)$$

$$\overset{\text{suite}\uparrow\text{ d'ensemble}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mu([0,q_n[)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} q_n = x.$$

3) On conclut par invariance par translation : Soit $a,b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$

. Si $a=b$ cf question 1)

. Si $a<b$ $\mu([a,b[) = \mu([0,b-a[+a) \overset{(*)}{=} b-a$

μ coïncide avec l'unique mesure qui satisfait $(*)$ qui est λ_1.

Exercice 12 : Fonction de répartition ...

$$(X, \mathbb{P}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathbb{P}_X)$$

1) *

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in X^{-1}(]-\infty, t])\}) \\ &\overset{\text{def loi image}}{=} \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) \end{aligned}$$

* Soit $t \leq t'$ qcq dans $\mathbb{R}$: on a $]-\infty, t] \subseteq]-\infty, t']$

qui donne (car $\mathbb{P}_X$ est une mesure) :

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) \overset{\text{monotonie}}{\leq} \mathbb{P}_X(]-\infty, t']) = F_X(t')$$

et $F_X(.)$ est croissante.

* Utiliser la limite croissante (resp. décroissante). $F_X(.)$ est $\nearrow$ et bornée (par 1), elle admet donc une limite en $+\infty$. Il suffit donc de considérer une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ tq $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ pour la déterminer

$$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = \lim_{n \to +\infty} F_X(t_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(]-\infty, t_n])$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(]-\infty, t_n]) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$$

on procède de même avec la limite en $t \to -\infty$ ... $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ tq $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Quitte à extraire une ss suite de (t_n) on peut supposer que t_n est $\searrow$ ...

$$\lim_{t\to a^+} F_X(t) = \lim_{n\to+\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(]-\infty, t_n])$$

lim $\searrow$ $\overset{\curvearrowright}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(]-\infty, t_n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, t_n]\right)$

$$= \mathbb{P}(]-\infty, a]) = F_X(a).$$

3) F_X est continue sur $\mathbb{R}$ ssi F_X est continue à gauche sur $\mathbb{R}$

ssi $\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{t\to a^-} F_X(t) = F(a)$

ssi $\forall a \in \mathbb{R}$ et une suite $\nearrow (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$F_X(t_n) = F(a)$

ssi ~~~~

$$F_X(a) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, t_n]\right)$$
$$= \mathbb{P}(]-\infty, a[)$$

ssi $F_X(a) = \mathbb{P}(]-\infty, a]) = \mathbb{P}(]-\infty, a[)$

ssi $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$

Exercice 24 : "Ensemble de Vitali".

4. Pourquoi la tribu borélienne ? Nous allons montrer que la mesure de Lebesgue ne se prolonge pas en une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ qui soit invariante par translations. Ce fait justifie qu'en Théorie de la mesure on s'intéresse à une classe plus petite de parties de $\mathbb{R}$, par exemple à la tribu borélienne de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que l'application μ, longueur des intervalles, ne se prolonge pas en une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation. Indication : Soit R la relation d'équivalence sur $I = [0,1]$ qui identifie deux nombres réels dont la différence est un nombre rationnel. Soit A un système de représentants de R, c'est-à-dire une partie de I qui contienne un et un seul point de chaque classe d'équivalence ; l'existence d'une telle partie repose sur l'axiome du choix non dénombrable. On pourra raisonner par l'absurde et déterminer la mesure de A.

b. Déduire de ce qui précède que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est strictement inclus dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Fejoz. - A. Laurent p.18
Exercices Corrigés.

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$

les classes d'équivalence sont les translatés irrationnelles de $\mathbb{Q}$

On note I l'ensemble des classes d'équivalences par $\sim$ et l'axiome du choix implique l'existence d'un ensemble $A = \{x_i, i \in I\}$ qui contient un unique représentant de chaque classe.

1) Montrons que $(A+q) \cap (A+r) = \emptyset \quad \forall q, r \in \mathbb{Q},\ q \neq r$.

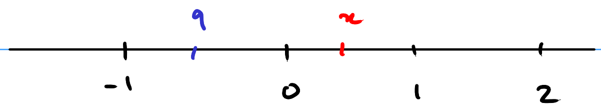
par définition de A si $x, y \in A$ $x \neq y$ on a $x - y \notin \mathbb{Q}$

supposé qu'il existe $z \in (A+q) \cap (A+r)$: alors

$z = x + q = y + r$ avec $x, y \in A$ $x \neq y$

$x - y = r - q \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

2)



• Soit $-1 \leq q \leq 1$ et $x \in A$. Comme $x \in [0,1]$ on a
$q \in \mathbb{Q}$. $\quad 0 \leq x \leq 1$

$0 - 1 \leq x + q \leq 1 + 1$

et $\quad x+q \in [-1,2]$. d'où $\quad \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \subset [-1,2]$

- D'autre part, par construction de A, tout $z \in [0,1]$ peut s'écrire

$$z = x + q \qquad x \in A \text{ et } q \in \mathbb{Q}$$

et comme $\quad 0 \leq x+q \leq 1$

$$-x \leq q \leq 1-x$$

on a $\quad -1 \leq q \leq 1$

donc $\quad x \in \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} A+q$. Autrement dit $[0,1] \subset \displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q)$

3) Supposons A borélien.

les ensembles $(A+q)$ sont disjoints on a donc

$$\lambda_1\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} A+q\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda_1(A+q)$$

invariance
translation
par λ_1

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda_1(A)$$

. Si $\lambda_1(A) > 0$ alors $\quad \lambda_1\Big(\displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} A+q\Big) = +\infty$ et $\lambda_1([-1,2]) = +\infty$ ce qui est absurde.

. Si $\lambda_1(A) = 0$ cela donne $\quad \lambda_1([-1,2]) = 0$ ce qui est absurde aussi

Dans tous les cas on a A qui n'est pas mesurable sinon on a une absurdité...