# Quelques Rappels et Motivations

## Rappels

**Exercice 1.** Déterminer les ensembles suivants :

1. $I_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} ]0, \frac{1}{n}]$, $I_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} ]0, \frac{1}{n}[$, $I_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}]$ et $I_4 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}[$. Puis $L_1 = ]0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}]$, $L_2 = ]0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[$, $L_3 = [0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}]$ et $L_4 = [0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[$.
2. $U_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} ]0, 1-\frac{1}{n}]$, $U_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} ]0, 1-\frac{1}{n}[$, $U_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-\frac{1}{n}]$ et $U_4 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-\frac{1}{n}[$. Puis $V_1 = ]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}]$, $V_2 = ]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}[$, $V_3 = [0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}]$ et $V_4 = [0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}[$.

**Exercice 2.** Soit $X$ un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{P}(X)$ indexée par un ensemble $I$ quelconque (fini ou infini, dénombrable ou non). Montrer les assertions suivantes :

1. Pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$ on a $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
2. Distributivités : pour tout $B \in \mathscr{P}(X)$,

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

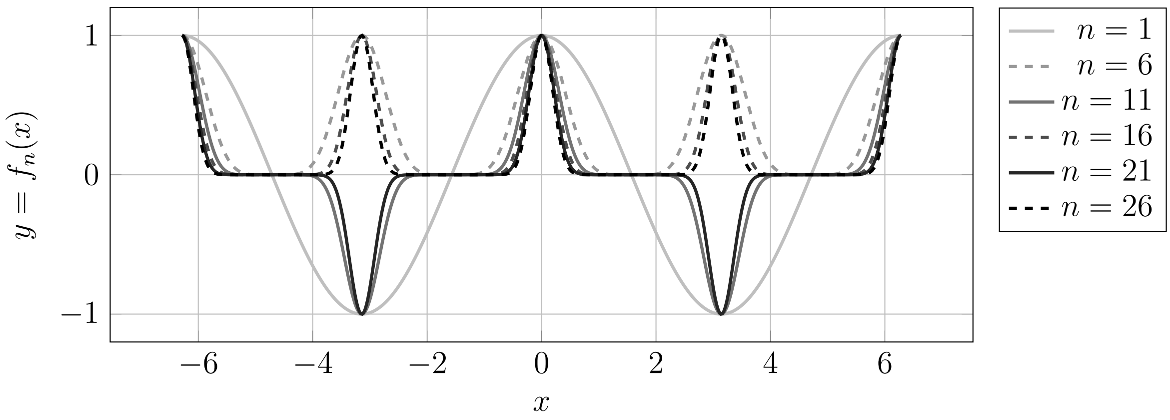
**Exercice 3.** Images et images réciproques d'ensembles Soient $X$ et $Y$ deux ensembles, et soit $f : X \to Y$ une application. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? pour chacune d'entre elles, donner une preuve ou un contre-exemple :

1. Image directe : soit $A, B \in \mathscr{P}(X)$,
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (b) $f(A^c) = f(A)^c$.
2. Image réciproque : soit $C, D \in \mathscr{P}(Y)$,
   (a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
   (b) $f^{-1}(C^c) = f^{-1}(C)^c$.

Une suite réelle admet *toujours* une limite supérieure et une limite inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si ces deux quantités sont finies et égales alors elle est convergente.

**Exercice 4.** Limites supérieures et inférieures de suites et fonctions

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_n = \left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) e^n$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction *partie entière*. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} x_n$.
2. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = \cos^n(x)$.




Il existe un moyen simple de relier “ensembles” et “fonctions” : les fonctions indicatrices (ou fonction caractéristique). Ce sont des fonctions à valeurs réelles qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. On les retrouve aussi en théorie de probabilités avec les variables aléatoires de Bernoulli.

**Exercice 5.** Fonctions indicatrices Soit $X$ un ensemble et $A \in \mathscr{P}(X)$. La fonction indicatrice de $A$ est l'application $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents.

Les notions de limites supérieures et limites inférieures peuvent être étendues aux ensembles via les indicatrices. C'est en théorie des probabilités que ces définitions seront particulièrement utiles. Attention aux notations ici, on utilise les mêmes notations pour les limites de suites d'objets différents (réels, fonctions, ensembles…)

**Exercice 6.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$. Montrer qu'il existe deux parties $B, C \in \mathscr{P}(X)$ telles que $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_B$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_C$. Exprimer $B$ et $C$ en fonction des parties $A_n$. Interpréter les ensembles $B$ et $C$.

## Pour s'entrainer, pour aller plus loin

**Exercice 7.** Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1. $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$ et $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
2. $B \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \setminus A_i)$ et $B \setminus \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

**Exercice 8.** Soient $X, Y$ et $Z$ des ensembles, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.
3. $f$ est injective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $h \circ f = \mathsf{Id}_X$.
4. $f$ est surjective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathsf{Id}_Y$.

**Exercice 9.** Soit $E$ un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties fixées. On considère l'application $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par

$$\varphi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Calculer $\varphi(\emptyset)$ et $\varphi(E \setminus (A \cup B))$. À quelle condition sur $A$ et $B$ l'application $\varphi$ est-elle injective ?
2. Déterminer $\varphi^{-1}\Big(\big\{(\emptyset, B)\big\}\Big)$. À quelle condition sur $A$ et $B$ l'application $\varphi$ est-elle surjective ?
3. À quelle condition sur $A$ et $B$ l'application $\varphi$ est-elle bijective ?

**Exercice 10.** Soit $X$ un ensemble non vide. Pour deux parties $A, B \in \mathscr{P}(X)$, la différence symétrique de $A$ et $B$ est définie par

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Exprimer $\mathbb{1}_{A \vartriangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\vartriangle$ est associative sur $\mathscr{P}(X)$.
3. Montrer qu'il existe une unique partie $E \in \mathscr{P}(X)$ telle que, pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on ait $A \vartriangle E = E \vartriangle A = A$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$ il existe un unique $A' \in \mathscr{P}(X)$ tel que $A \vartriangle A' = A' \vartriangle A = E$.

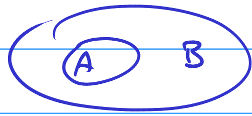
**Exercice 11.** On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Q}_n[X]$ l'ensemble de ceux qui sont de degré au plus $n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ est aussi dénombrable.
2. Les nombres algébriques sont les nombres complexes qui sont racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 2 :

$X$ est un ensemble, $A_i \in \mathcal{P}(X) \quad \forall i \in I$

1) Mq $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \quad A \subset B \iff B^c \subset A^c$




méthode 1 : $A \subset B \iff A \cap B = A \overset{\text{De Morgan}}{\iff} A^c \cup B^c = A^c \iff A^c \subset B^c$

méthode 2 : (double implication)

$[\Rightarrow]$ On a $A \subset B$. On montre par l'absurde que $B^c \subset A^c$.

Suppose donc que $B^c \not\subset A^c$. $\exists x \in B^c$ tq $x \notin A^c$, on a donc $x \in A \subset B$ et $x \notin B$ $\lightning$.

$[\Leftarrow]$ Suppose que $B^c \subset A^c$. On peut montrer par l'absurde que $A \subset B$

Suppose que $A \not\subset B$. $\exists x \in A$ et $x \notin B$, on a donc $x \in B^c \subset A^c$ et $x \notin A$ $\lightning$

méthode 3 : $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\iff (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

$\iff (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$

$\iff B^c \subset A^c$

2) On a $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B$ ssi $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $x \in B$

ssi $\exists i \in I$, $x \in A_i$ et $x \in B$

ssi $\exists i \in I$, $x \in A_i \cap B$

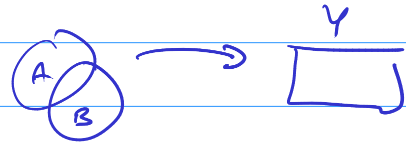
ssi $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$

Pour la 2nd partie, on peut procéder de même ou utiliser la loi de De Morgan

on a $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B \overset{\text{De Morgan}}{=} \left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c \cap B^c\right)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i^c\right) \cap B^c\right)^c$

$\overset{\text{question 1)}}{=} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i^c \cap B^c)\right)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$

Exercice 3 : $f : X \to Y$




1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ vraie

$y \in f(A \cup B)$ ssi $y = f(x)$ avec $x \in A \cup B$

ssi $y = f(x)$ avec $x \in A$ ou $x \in B$

ssi $y = f(x)$ avec $x \in A$ ou $y = f(x)$ avec $x \in B$ ssi $y \in f(A) \cup f(B)$

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ Faux on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Il suffit de prendre une fonction non injective. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$

on a $f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-) = f(\{0\}) = \{0\}$

$f(\mathbb{R}^+) = [-1, 1] = f(\mathbb{R}^-)$

$f(\{0\}) \neq f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-) = [-1, 1]$.

1. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
2. Cette inclusion est parfois stricte.
3. Si $f$ est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

**Solution** [ Enrouler ]

1. D'après l'exercice 2, $f(A \cap A') \subset f(A)$ (car $A \cap A' \subset A$) et de même, $f(A \cap A') \subset f(A')$.
2. Soient $f : E \to F$ une application non injective et $a, a' \in E$ distincts tels que $f(a') = f(a)$. Posons $A = \{a\}$ et $A' = \{a'\}$. Alors, $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$, tandis que $f(A) \cap f(A') = \{f(a)\} \cap \{f(a')\} = \{f(a)\}$.
3. Procédons par double inclusion, l'une étant claire d'après ce qui précède. Soit $b \in f(A) \cap f(A')$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ et $a' \in A'$ tels que $b = f(a)$ et $b = f(a')$. Si $f$ est injective, il en résulte que $a = a'$ donc $a \in A \cap A'$ et $b = f(a) \in f(A \cap A')$

2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ Vraie.

Soit $y \in Y$. Alors $x \in f^{-1}(A \cup B)$ ssi $f(x) \in A \cup B$

ssi $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$

ssi $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$

$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ Vrai

Soit $y \in Y$. Alors $x \in f^{-1}(A \cap B)$ ssi $f(x) \in A \cap B$

ssi $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$

ssi $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$

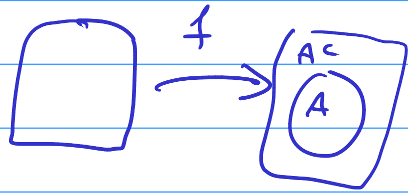
3) $f(A^c) = f(A)^c$

Considerer une application qui n'est pas injective.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$A = [0,1] \qquad f(A^c) = \{1\} \neq f(A)^c = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4) $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ Vrai




$$x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c$$

$$\iff f(x) \notin A$$

$$\iff x \notin f^{-1}(A)$$

$$\iff x \in f^{-1}(A)^c$$

## Exercice 4. Limite sup et inf de suites et de fonctions.

1) $x_n = \left(\frac{n}{2} - E\left(\frac{n}{2}\right)\right) e^n$. On calcule les premiers termes pour comprendre ce qu'il se passe.

$$x_0 = (0-0).1 = 0$$
$$x_1 = \left(\tfrac{1}{2} - 0\right) e = \tfrac{1}{2} e$$
$$x_2 = (1-1) e^2 = 0$$
$$x_3 = \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right) e^3 = \tfrac{1}{2} e^3$$
$$\vdots$$

Ainsi $x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ \frac{e^n}{2} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

et $\liminf_n x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$

$\limsup_n x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} +\infty = +\infty$

2) On pose $f_n(x) = \cos^n(x)$.

- si $x = 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ $\quad f_n(x) = \cos^n(0) = 1^n = 1$

  suite cte $\quad \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = \lim f_n(x) = 1$

- si $x = \pi + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ $\quad f_n(x) = \cos^n(\pi) = (-1)^n$

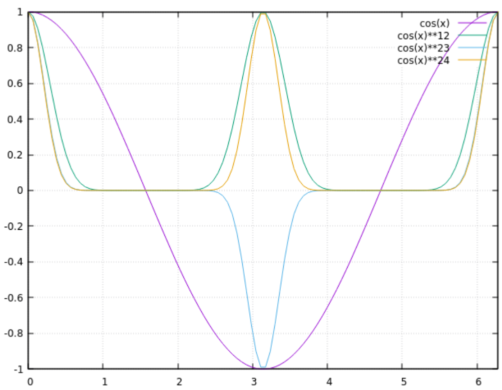
$$\liminf_n f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{\inf_{k\geq n} f_k(x)}_{=-1}\Big) = -1$$

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{\sup_{k\geq n} f_k(x)}_{=1}\Big) = +1$$

- sinon $x \neq k\pi$ alors on a $|\cos(x)| < 1$

  et donc $|f_n(x)| = |\cos^n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  et $\lim_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = 0$.



Exercice 5 : $A \subset X$ $\qquad \mathbb{1}_A : X \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Idée : Relier ensemble et fonctions !

1) • Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

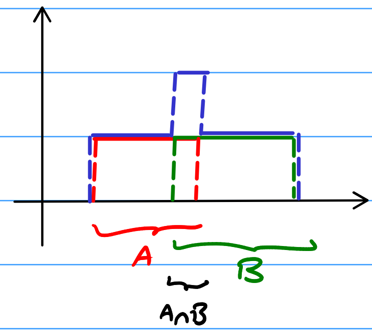
$$\begin{aligned} x \in A\cap B &\iff x \in A \text{ et } x \in B \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1 \end{aligned}$$

• Montrons que $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned} x \in A^c &\iff x \notin A \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 0 \\ &\iff 1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 \end{aligned}$$

De plus $x \mapsto 1 - \mathbb{1}_A(x)$ est bien à valeurs dans $\{0,1\}$

• Montrons que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$




$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{(A^c\cap B^c)^c} &= 1 - \mathbb{1}_{A^c\cap B^c} \\ &= 1 - (\mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_{B^c}) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) \\ &= \cancel{1} - \cancel{1} + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \end{aligned}$$

2) Montrer que $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents. Cela revient à trouver une bijection entre l'ensemble des parties de $X$ et l'ensemble des fonctions $X \to \{0,1\}$ (indicatrices)

On considère $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{f} \{0,1\}^X$, $A \longmapsto \mathbb{1}_A$. Montrons que $f$ est bijective (1-1 & onto)

[1-1] Soit $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A'}$, montrons que $A = A'$

[$A \subset A'$] : si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A'}(x) = 1$ et $x \in A'$

[$A' \subset A$] $\Leftrightarrow$ [$A^c \subset (A')^c$]. Si $x \notin A$ alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A'}(x) = 0$ et $x \notin A'$

$\therefore$ et $A = A'$

[auto] Soit $g \in \{0,1\}^X$, alors $g$ est l'indicatrice de l'ensemble $A = g^{-1}(1)$

$\nwarrow$ image réciproque

Exercice 6 $\quad A_n \in \mathcal{P}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ et $\quad f_n = \mathbb{1}_{A_n}$

- Montrons que $\exists\, C \in \mathcal{P}(X)$ tq $\limsup f_n = \mathbb{1}_C$

Soit $x \in X$, $\limsup\limits_n f_n(x) = \inf\limits_{N \in \mathbb{N}} \Big( \underbrace{\sup\limits_{n \geq N} (f_n(x))}_{\in \{0,1\}} \Big) \in \{0,1\}$

Ainsi $x \xrightarrow{f^+} \limsup\limits_n f_n(x)$ est une indicatrice (ie dans $\{0,1\}^X$)
il existe donc un ensemble $C \subset X$ tq $f^+ = \mathbb{1}_C$

Exprimons $C$ en fonction des $A_n$

$$\limsup_n f_n(x) = 1 \iff \forall N \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \geq N} f_n(x) = 1$$
$$\iff \forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N \text{ tq } f_n(x) = 1$$
$$\iff x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \Big( \bigcup_{n \geq N} A_n \Big)$$

La lim sup d'un ensemble, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de $A_n$

- De même $\liminf\limits_n f_n(x) = \sup\limits_{N \in \mathbb{N}} \big( \inf\limits_{n \geq N} f_n(x) \big) \in \{0,1\}$

et $\exists\, B$ tq $\quad f^- : x \mapsto \liminf\limits_n f_n(x)$ satisfaste $f^- = \mathbb{1}_B$

De plus on a $B = \bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}} \Big( \bigcap\limits_{n \geq N} A_n \Big)$ en effet

$$x \in B \iff x \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Big( \bigcap_{n \geq N} A_n \Big) \iff \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \,;\ \forall n \geq N_0 \quad x \in A_n$$
$$\iff \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \,;\ \inf_{n \geq N_0} f_n(x) = 1$$
$$\iff \liminf f_n(x) = 1$$

La lim inf d'une suite d'ensemble, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les $A_n$ à partir d'un certain rang
(ie à tous les $A_n$ sauf un nombre fini).

Exercice 9 : $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$

avec $A, B \subset E$.

1) $\varphi(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B)$

$\varphi((A \cup B)^c) = ((A \cup B)^c \cap A, (A \cup B)^c \cap B)$

$= (A^c \cap B^c \cap A, A^c \cap B^c \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$

on vient d'exhiber un exemple de potentiel "non-injectivité". Cela suggère le critère :

$$A \cup B = E.$$

Dans ce cas $\varphi$ est bien 1-1 car

Si $X, X' \in \mathcal{P}(X)$ tq

$\varphi(X) = \varphi(X') \iff \begin{cases} X \cap A = X' \cap A \\ X \cap B = X' \cap B \end{cases}$

$\iff (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B)$

$\iff X \cap \underbrace{(A \cup B)}_{=E} = X' \cap \underbrace{(A \cup B)}_{=E}$

$\iff X = X'$.

Réciproquement : Si $\varphi$ est 1-1, alors $\varphi((A \cup B)^c) = \varphi(\emptyset)$ et $(A \cup B)^c = \emptyset$

$\square$

2) $\varphi^{-1}(\{(\emptyset, B\})$. on cherche les $X \in \mathcal{P}(E)$

tq $\begin{cases} A \cap X = \emptyset \\ B \cap X = B \end{cases} \iff \begin{cases} X \subset A^c \\ B \subset X \end{cases}$

un tel $X$ existe si $A \cap B \overset{(*)}{=} \emptyset$.

* Supposons $(*)$ vraie. Mq $\varphi$ est "onto". Soit $(A', B')$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Il suffit de prendre

$X = A' \cup B'$

3) $\varphi$ est bijective si $A$ et $B$ font une partition de $E$ :

ie $A \cup B = E$ $A \cap B = \emptyset$