CC I

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Le barème est donné a titre indicatif. Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit $f : X \to Y$ une application de X dans Y et $\mathscr{C}$ un ensemble de parties de Y. Démontrer que $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? (1.5pt)

   Comme $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$, on a $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$. Comme $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ est une tribu, elle contient $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$, autrement dit on a bien $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.

2. Énoncer le Théorème de convergence dominée. (1pt)

3. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. On suppose que $\mu(E) = 1$. Montrez que

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{A} \mid \mu(X) = 0 \text{ ou } \mu(X) = 1\}$$

   est une tribu sur E. (2.5pt)

Exercice 2. Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mu = \delta_{-1} + 2\delta_2$. On munit alors $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ de la mesure $\nu = \lambda \otimes \mu$ et considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

1. Soit a > 0. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x$. (1pt)

   Poser le changement de variable affine $x = t\sqrt{a}$ donne dans l'intégrale de Riemnann généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)a} \sqrt{a} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan t\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

2. Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction f et la mesure ν sur $\mathbb{R}^2$? (Justifier la réponse.) (2pt)

   D'après le théorème de Fubini-Tonelli pour les fonctions mesurables positives,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f| \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f| \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x, -1) + 2f(x, 2)| \mathrm{d}\lambda(x) = \\
\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x, -1)| + 2\,|f(x, 2)|\, \mathrm{d}\lambda(x) \\
\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x^2 + 1^2 + 1} + 2\frac{2}{x^2 + 2^2 + 1}\right) \mathrm{d}\lambda(x) \\
\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \pi < \infty.
\end{aligned}$$

   Ainsi f est ν-intégrable, et le théorème de Fubini s'applique.

3. Calculer alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}\nu(x,y)$. (1pt)

   Il donne
   $$\int_{\mathbb{R}^2} f \;\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\;\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}}(f(x,-1)+2f(x,2))\mathrm{d}\lambda(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\pi$$

Exercice 3. Soit $0<\alpha<1$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points distincts dans l'intervalle $[0,1]$. On considère la fonction $\Phi : [0,1]\to[0,\infty]$ définie par
$$\Phi(x) = \sum_{n>0}\frac{1}{n^2\,|x-r_n|^\alpha} \qquad \text{avec la convention que } \frac{1}{0}=\infty.$$

1. Montrer que pour $r\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto |x-r|^{-\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur l'intervalle $[0,1]$, et qu'il existe une constante $C>0$ telle que
   $$\int_0^1 \frac{1}{|x-r|^\alpha}\mathrm{d}\lambda(x) \leqslant C$$
   pour tout $r\in[0,1]$. (2pt)

   La fonction f est continue sur $[0,1]\setminus\{r\}$. Si $0<\epsilon<r$, alors
   $$\int_0^{r-\epsilon}\frac{1}{|x-r|^\alpha}\mathrm{d}\lambda = \left[-\frac{(r-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{r-\epsilon} = \frac{r^{1-\alpha}-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$$
   Si $0<\epsilon<1-r$, alors
   $$\int_{r+\epsilon}^1\frac{1}{|x-r|^\alpha}\mathrm{d}\lambda = \left[\frac{(x-r)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{r+\epsilon}^{1} = \frac{(1-r)^{1-\alpha}-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$$
   Ainsi $\int_0^1 |x-r|^{-\alpha}\mathrm{d}\lambda \leqslant \frac{2}{1-\alpha}$, et on peut prendre $C=\frac{2}{1-\alpha}$.

2. En déduire que $\int_0^1 \Phi(x)\mathrm{d}\lambda(x) < \infty$. (1.5pt)

   Comme intégration et sommation commutent pour les fonctions positives mesurables,
   $$\int_0^1\Phi(x)\mathrm{d}\lambda = \int_0^1\sum_{n>0}\frac{|x-r|^{-\alpha}}{n^2}\;\mathrm{d}\lambda = \sum_{n>0}\frac{1}{n^2}\int_0^1|x-r|^{-\alpha}\mathrm{d}\lambda \leqslant C\sum_{n>0}\frac{1}{n^2} = \frac{C}{6}\pi^2<\infty$$

3. En déduire que $\Phi(x)<+\infty$ pour λ-presque tout x. (0.5pt)

   Pour toute fonction mesurable positive f (ou Lebesgue inégrable), $\int f<\infty$ implique $f<\infty$ presque partout. Comme Φ est mesurable positive, on a $\Phi<\infty\lambda$-presque partout.

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\lim\limits_{x\to r_n}\Phi(x)=+\infty$. (0.5pt)

   Pour $n>0$ on a $\lim_{x\to r_n}\Phi(x) \geqslant \lim_{x\to r_n}\frac{1}{n^2|x-r_n|^\alpha} = \infty$.

Exercice 4. Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction non-negative et Borel mesurable satisfaisant à la condition

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^t f(t) d\lambda(t) < \infty. \tag{1}$$

On étudie la fonction $J_f :]-\infty, 1] \to [0, \infty[$ définie par l'intégrale de Lebesgue

$$J_f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xt} f(t) \mathrm{d}\lambda(t).$$

1. Montrer les assertions suivantes :
   (a) La fonction J_f est à valeurs finies et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$. (1.5pt)

   Pour $x \leqslant 1$ et $t \geqslant 0$ on a $e^{xt} \leqslant e^t$. Par monotonie de l'intégrale,

   $$J_f(x) = \int_{\mathbb{R} \geqslant 0} e^{xt} f(t) d\lambda(t) \leqslant \int e^t f(t) d\lambda(t) < \infty$$

   De plus, $|e^{xt} f(t)| \leqslant e^t f(t)$ pour tout $x \leqslant 1$, la première fonction est continue en x et la deuxième est intégrable en t. Donc $J_f(x)$ est continue.

   (b) La fonction J_f est deux fois dérivable dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, et $J_f'(x) \geqslant 0$ et $J_f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x < 1$. *Indication : Étant donné $\delta > 0$, on admettra qu'il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que $(t + t^2)\, e^{xt} \leqslant C_\delta e^t$ pour tout $x \leqslant 1 - \delta$ et $t \geqslant 0$. On pourra alors montrer le résultat pour $x < 1 - \delta$.* (3pt)

   Soit $C_\delta = \max\left\{\delta^{-1}, 2\delta^{-2}\right\} > 0$. Alors pour $t \geqslant 0$ on a

   $$C_\delta e^{\delta t} = C_\delta \sum_{n > 0} \frac{(\delta t)^n}{n!} \geqslant \left(t + t^2\right)$$

   Pour $t \geqslant 0$ on a

   $$\left(t + t^2\right) e^{xt} \leqslant \left(t + t^2\right) e^{(1-\delta)t} \leqslant C_\delta e^{\delta t} e^{(1-\delta)t} = C_\delta e^t$$

   Pour tout $\delta > 0$, tout $x \leqslant 1 - \delta$ et $t \geqslant 0$ on a

   $$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xt} f(t)\right) = t e^{xt} f(t) \leqslant C_\delta e^t f(t)$$

   et

   $$0 \leqslant \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{xt} f(t)\right) = t^2 e^{xt} f(t) \leqslant C_\delta e^t f(t)$$

   Comme les dérivées sont positives et bornées par une fonction intégrable pour $x \leqslant 1 - \delta$, on peut dériver sous l'intégrale. Ainsi

   $$J_f'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xt} f(t)\right) \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} t e^{xt} f(t) \mathrm{d}\lambda(t) \geqslant 0$$

   et

   $$J_f''(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{xt} f(t)\right) \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} t^2 e^{xt} f(t) \mathrm{d}\lambda(t) \geqslant 0$$

   L'énoncé en découle.

2. Considérons dans la suite le cas particulier où

$$f(t) = h(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2}$$

(a) Montrer que h vérifie la condition (1). (1pt)

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^t h(t) \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^t \frac{e^{-t}}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) = [\arctan t]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

(b) Montrer que la fonction J_h satisfait à l'équation différentielle

$$J_h''(x) + J_h(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(1pt)

Pour $\delta > 0$ et $x \leqslant 1 - \delta$ on a

$$\begin{aligned} J_h''(x) + J_h(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} t^2 e^{xt} \frac{e^{-t}}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) + = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xt} \frac{e^{-t}}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\left(t^2+1\right) e^{(x-1)t}}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \left[\frac{e^{(x-1)t}}{x-1}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$