Examen

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$.

1. Déterminer le noyau $\mathsf{Ker}\, f$ de f. L'application f est-elle injective ?

   Commençons par déterminer le noyau de f. On a $(x,y) \in \mathsf{Ker}\, f$ si et seulement si $f(x,y) = (0,0,0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases}$$

   On en déduit que $\ker(f) = \{(0,0)\}$, et en particulier que f est injective.

2. Déterminer l'image $\mathsf{Im}\, f$ de f et en donner une base. L'application f est-elle surjective ?

   Déterminons maintenant l'image de f. Un vecteur (u,v,w) est dans l'image de f si et seulement si

$$\begin{aligned}
\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (u,v,w) = f(x,y) &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \\ w &= x+y \end{cases} \\
&\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ u+v &= 2x \\ w-u &= 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y \\ \frac{u+v}{2} &= x \\ w-u &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 ; u - w = 0\}$. En particulier, $(1,1,0)$ n'est pas dans $\mathrm{Im}(f)$, et donc f n'est pas surjective. On peut aussi utiliser le théorème du rang.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A.

   On a $A^2 = A + 2I$.

2. En déduire l'inverse de A.

   On a $A(A-I)/2 = I$ qui donne $A^{-1} = (A-I)/2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.

   Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix}$$
$$= (1-X)\left(X^2+2X-8\right)$$
$$= (1-X)(X+4)(X-2)$$

   La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : 1,2, et -4.

2. Montrer que M est diagonalisable.

   Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres. $\lambda = 1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$2y - z = x$$
$$\begin{cases} \\ 3x - 2y = y \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$. $\lambda = 2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées $(4, 3, -2)$. $\lambda = -4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_3}$ de coordonnées $(2, -3, 2)$.

4. Donner alors la matrice P inversible et la matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. (On ne demande pas de calculer P^{-1}).

   Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On effectue l'ACP du nuage de points (en $2d$) suivant :

x	3	4	6	6	6	7	7	8	9	9	9	10	11	12	12	13	13	13	13	14	15	17	17	18	20
y	2	10	5	8	10	2	13	9	5	8	14	7	12	10	11	6	14	15	17	7	13	13	17	19	20

La matrice de covariance associée est $C = \begin{pmatrix} 19.4656 & 14.9616 \\ 14.9616 & 23.0976 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de C sont $\lambda_1 = 36.35300772$ et $\lambda_2 = 6.21019228$ et les vecteurs propres associés sont $v_1 = (0.6631391, -0.74849618)$ et $v_2 = (-0.74849618, -0.6631391)$ respectivement.

1. Comment est calculée la matrice C ?

   Notons $p_i = (x_i, y_i)$ le vecteur (ligne) de $\mathbb{R}^2$ ayant pour coordonnée la $i$ème colonne du tableau. On a $i = 1, \cdots, 25$ et
   $$C = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(p_i - \bar{p})^t(p_i - \bar{p})$$
   avec $\bar{p} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x_i, y_i)$.

2. Quelle propriété vérifie les vecteurs propres de C ?

   Ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

3. Quelle est la proportion de variance expliquée par chaque vecteurs propre ?

   Pour le premier axe principal $\mathsf{Vect}(v_1)$, on a $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) \simeq 6/7$ de la variance expliquée. Pour le second axe principal $\mathsf{Vect}(v_2)$, on a $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2) \simeq 1/7$.

4. La somme des vecteurs propres est égale à quelle quantité ?

   Le premier plan principale $\mathsf{Vect}(v_1, v_2)$ explique donc 100% de la variance (on est dans $\mathbb{R}^2$...). La somme des deux valeurs propres est donc égale à la variance (aussi appelée inertie totale) du nuage de point. C'est aussi la trace de C...

Exercice 5. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.

   Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.

2. Démontrer que si x est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

   Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.