TD 2 : transformations linéaires

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1. Transformation de $\mathbb{R}^2$ Écrire, pour chaque application linéaire ci dessous, la matrice (dans la base canonique) de

1. la rotation d'angle θ et de centre $(0, 0)$.
2. la projection sur la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
3. la symétrie par rapport à la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit $a, b \in \mathbb{R}^3$. On note $a_{\perp b}$ le vecteur projeté de a sur le plan orthogonal à b.

1. Exprimer $a_{\perp b}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que $a_{\perp b} = \frac{(b \wedge a) \wedge b}{\|b\|^2}$.
3. Trouver une matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $a_{\perp b} = Ma$. Est-elle inversible ?

Exercice 3. Inverser des matrices sans calculs

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2\,\mathsf{Id}_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $\mathsf{Id}_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 4.* Déterminant d'une matrice triangulaire Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses entrées diagonales.

Exercice 5. Inverser des matrices avec calculs À l'aide du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.* Décomposition d'une rotation On appelle cisaillement horizontal (x-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme $H_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. On appelle cisaillement vertical (y-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme $V_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

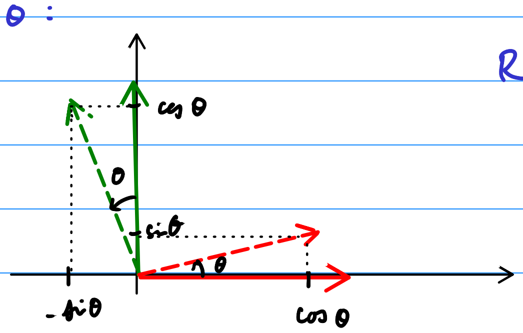
1. Représenter l'effet de ces transformations sur la base canonique.
2. Soit $R_{-\theta}$ la matrice de rotation d'angle $-\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer la décomposition suivante :

$$R_{-\theta} = H_{\tan\frac{\theta}{2}} V_{-\sin\theta} H_{\tan\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 7.* Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^t est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

Exercice I :

1) Pour écrire la matrice R_θ de la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ il faut déterminer l'image de $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ par R_θ :



$$R_\theta e_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad R_\theta e_2 = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

on a donc

$$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

2) Soit $u = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$ avec $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

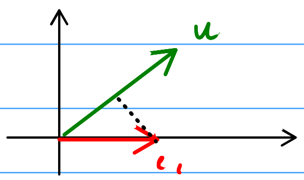
méthode 1 • La projection de x sur u est dans $\mathrm{Vect}(u)$ et

$$\mathrm{proj}_u(x) = \langle u, x\rangle u = u\,u^t x$$

La matrice P_u de la projection est donc

$$P_\theta = u\,u^t = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}(a_1\ a_2) = \begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2\\ a_1a_2 & a_2^2\end{pmatrix}$$

méthode 2 •



l'image de e_1 par proj_u est

$$P_\theta = \langle e_1, u\rangle u = a_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1^2\\ a_1a_2\end{pmatrix}$$

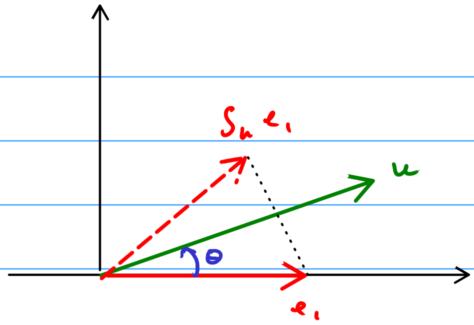
de même on a l'image de e_2 par proj_u

$$P_\theta e_2 = \langle e_2, u\rangle u = a_2\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1a_2\\ a_2^2\end{pmatrix}$$

on retrouve $P_\theta = \begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2\\ a_2a_1 & a_2^2\end{pmatrix}$

remarque : P_θ est une matrice de rang 1 ($\dim(\mathrm{Im}\ u\,u^t) = 1$) et son noyau est la droite $\perp$ à u.

3)



l'image par la symétrie d'axe $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

e_1

$$S_u = R_\theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_{-\theta}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ angle entre e_1 et u

$$\cos\theta = \frac{1}{\|u\|} \langle e_1, u \rangle = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2}}$$

$$= \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

et $$S_u = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}$$

$$= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1 u_2 \\ 2u_1 u_2 & u_2^2 - u_1^2 \end{pmatrix}$$

Application : • si $u_1 = u_2 = 1$

$$S_{\binom{1}{1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• si $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$

$$S_u = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4} & \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : on a $a, b \in \mathbb{R}^3$

1) Idée : Décomposer $\mathbb{R}^3$ en somme directe de 2 sev :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(b) \oplus \mathrm{Vect}(b^{\perp})$$

plan orthogonal de b

Ainsi $$a = \langle a, b \rangle b + a_{\perp b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_{\perp b} = a - \langle a, b \rangle b$$

2) Cf la formule du double produit vectoriel vu en cours :

$$\frac{1}{\langle b,b \rangle}(b \wedge a) \wedge b = \left(\langle b, b \rangle a - \langle b, a \rangle b \right) \frac{1}{\langle b,b \rangle}$$

$$= a - \langle b, a \rangle b$$

3) $$a_{\perp b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(Id_3 - b\, b^t \right)}_{= M} a$$

$$= M = \begin{pmatrix} 1 - b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & 1 - b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_3 b_2 & 1 - b_3^3 \end{pmatrix}$$

remarque : M n'est pas inversible (rang 2) Remarquons que si on cherche les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tq

$$Mx = a_{\perp b}$$

les solutions de ce système linéaire seront une droite

$$x + \mathrm{Ker}(M) = x + \mathrm{Vect}(b) \ \ldots$$

Exercice : Inverse des matrices sans calculs

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

on a bien $A^2 + A = 2\,Id$

$\iff A(A + Id) = 2\,Id \iff (A + Id)\,A = 2\,Id$

$\iff A\left(\frac{A + Id}{2}\right) = Id \iff \left(\frac{A + Id}{2}\right) A = Id$

et $A^{-1} = \frac{A + Id}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

et $A^3 - A = 4\,Id \iff A \underbrace{(A^2 - A)/4}_{= A^{-1}} = Id$

et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$.

3) Idée : utiliser les „sommes téléscopiques"

$(Id - A)(Id + A + A^2 + \dots + A^{p-1})$

$$= Id + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \dots + \cancel{A^{p-1}}$$
$$- \cancel{A} - \cancel{A^2} - \quad - \cancel{A^{p-1}} - A^p$$
$$= Id - \underbrace{A^p}_{=0} = Id.$$

on en déduit que $(Id - A)$ est inversible et

$$(Id - A)^{-1} = Id + A + A^2 + \dots + A^{p-1}$$

Remarque : Dans tous les cas, les inverses de A s'expriment comme des polynômes en A ...

Exercice 5 :

$$A \,\vdots\, Id = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice de gauche est triangulaire supérieure. Son déterminant est donc le produit des éléments diagonaux (cf exo3) et $\neq 0$. A est inversible ... on peut continuer :

$L_3 \leftarrow L_3/4$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$= Id \,\vdots\, A^{-1}$$

2) Même technique ...

$$C \,\vdots\, Id = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

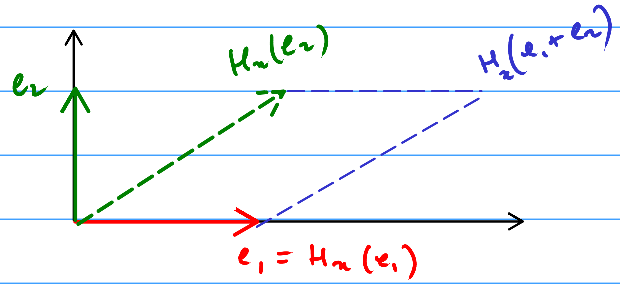
$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice C n'est pas inversible (triangulaire avec un zéro sur sa diagonale...)

Exercice 6 :

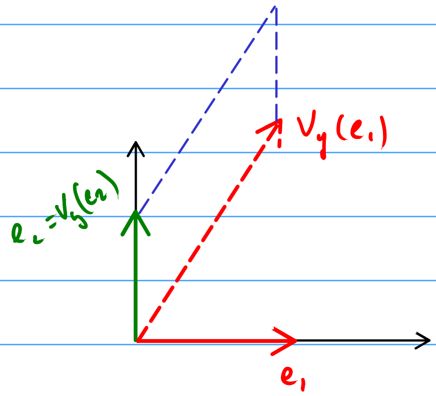
1) Cisaillement horizontal $H_x(e_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $H_x(e_2) = \begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$



le carré $[0,1]^2$ est envoyé sur un // gramme ...

Idem pour le cisaillement Vertical : $V_y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$

$V_y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



2) Faire une rotation d'angle $-\theta$ revient à composer 3 cisaillements bien choisis :

$$H_{\tan\theta/2}\, V_{-\sin\theta}\, H_{\tan\theta/2} = \begin{pmatrix}1 & \tan\theta/2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-\sin\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \tan\theta/2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1-\sin\theta\tan\theta/2 & \tan\theta/2\\-\sin\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \tan\theta/2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

remarque : $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

et $1 - \sin\theta\tan\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{1+\cos\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta + \cancel{\sin^2\theta} + \cos\theta - \cancel{\sin^2\theta}}{1+\cos\theta}$$

$$= \cos\theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \tan\theta/2 \\ -\sin\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta\tan\frac{\theta}{2} + \tan\theta/2 \\ -\sin\theta & \underbrace{-\sin\theta\tan\frac{\theta}{2} + 1}_{= \cos\theta} \end{pmatrix}$$

on montre de même que $(1+\cos\theta)\tan\frac{\theta}{2} = \sin\theta$ ...

Exercice 7 : Inverse de la transposée :

A étant inversible on a A^{-1} tq

$$A A^{-1} = A^{-1} A = Id$$

$$\Rightarrow (A A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t = Id$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = Id$$

$\Rightarrow$ l'inverse de A^t existe et est $(A^{-1})^t$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \ldots$$