

PARTIE I

1 ESPACE VECTORIEL

- **Addition de 2 vecteurs**
- **Multiplication par un scalaire**
- **Propriétés de l'addition**
- **Propriétés de la multiplication par un scalaire**
- **Propriétés déduites des précédentes**

1.1 Sous espace vectoriel

1.2 Combinaison linéaire

1.3 Indépendance linéaire

1.4 Base d'un espace vectoriel

INRA - Formation statistique - Module A-1

PARTIE I

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire

- **Intérêt du produit scalaire**
- **Propriétés du produit scalaire**

1.6 Décomposition en somme directe

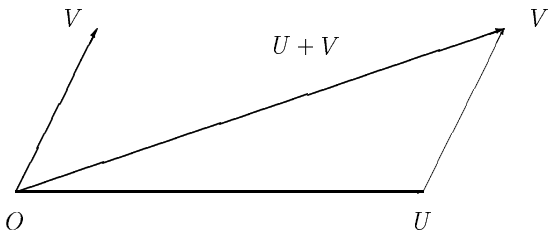
2 PROJECTIONS

3 COORDONNEES DANS \mathbb{R}^3

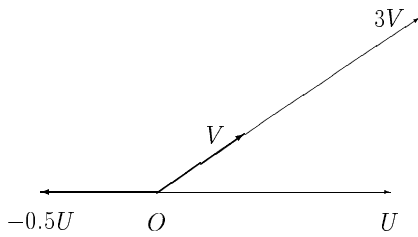
INRA - Formation statistique - Module A-2

1 ESPACE VECTORIEL

Addition de 2 vecteurs

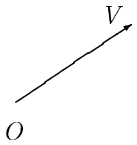


Multiplication par un scalaire

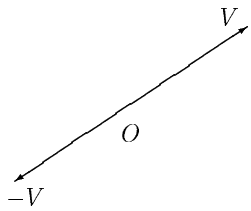


INRA - Formation statistique - Module A-3

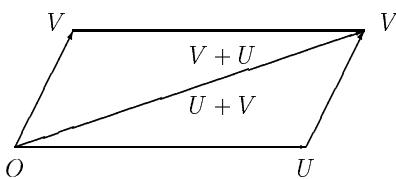
Propriétés de l'addition



$$\phi + V = V + \phi = V$$



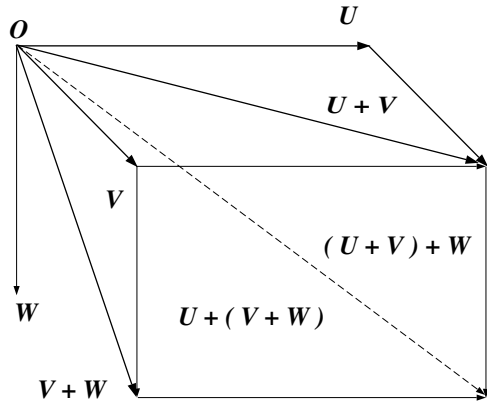
$$V + (-V) = \phi$$



$$U + V = V + U$$

INRA - Formation statistique - Module A-4

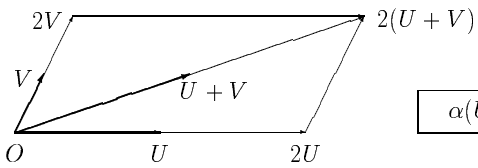
Propriétés de l'addition



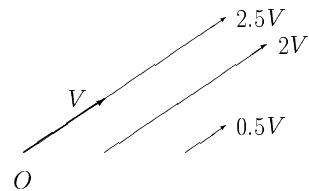
$$U + (V + W) = (U + V) + W$$

INRA - Formation statistique - Module A-5

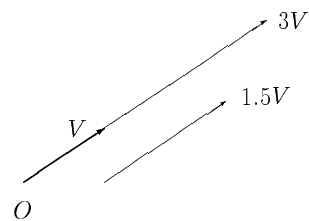
Propriétés de la multiplication par un scalaire



$$\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$$



$$(\alpha + \beta)V = \alpha V + \beta V$$



$$(\alpha\beta)V = \alpha(\beta V)$$

INRA - Formation statistique - Module A-6

Propriétés déduites des précédentes

1. $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$

$$\text{si } \beta = -\alpha \implies \begin{cases} (\alpha + \beta)U = o.U \\ \alpha U + \beta U = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ \boxed{o.U = \phi}$$

2. $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$

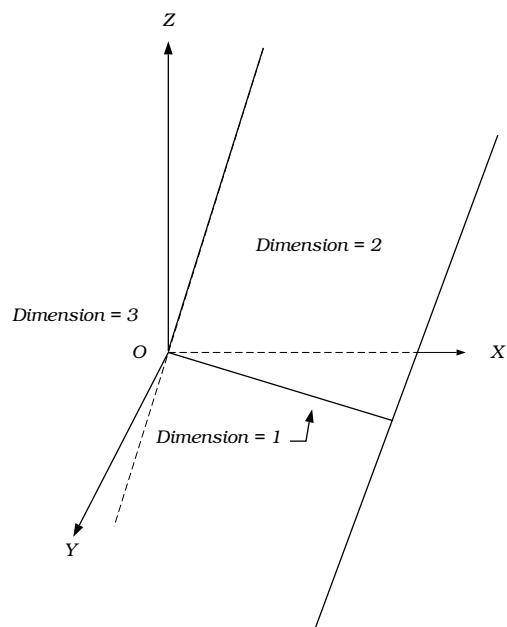
$$\text{si } V = -U \implies \begin{cases} \alpha(U + V) = \alpha\phi \\ \alpha U + \alpha V = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ \boxed{\alpha\phi = \phi}$$

3. $\boxed{(-1)V = -V}$

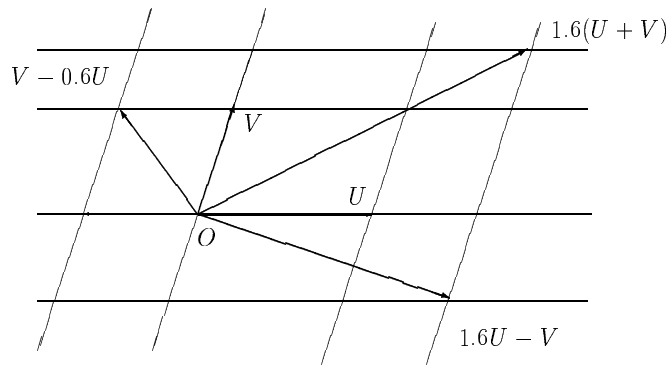
INRA - Formation statistique - Module A-7

1.1 Sous espace vectoriel



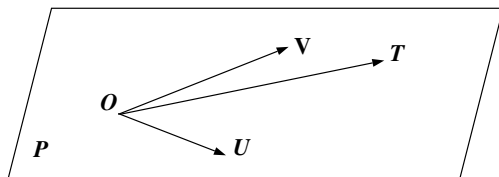
INRA - Formation statistique - Module A-8

1.2 Combinaison linéaire

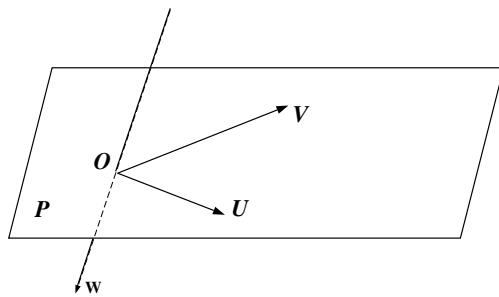


INRA - Formation statistique - Module A-9

1.3 Indépendance linéaire



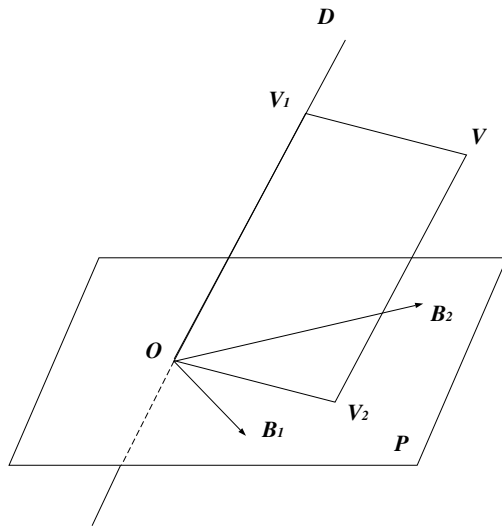
Ces vecteurs sont-ils indépendants ?



U, V et W sont-ils indépendants ?

INRA - Formation statistique - Module A-10

1.6 Décomposition en somme directe



INRA - Formation statistique - Module A-11

1.4 Base d'un espace vectoriel de dimension finie

1. Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent l'espace dans sa totalité.
2. Tout vecteur est défini de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base.
3. Un espace vectoriel a toujours une base (mais elle n'est pas unique).
4. Chaque base a le même nombre d'éléments, ce nombre représente la dimension de l'espace.

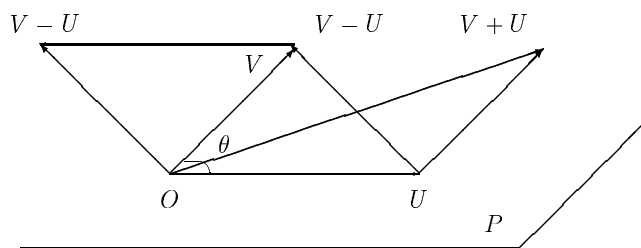
INRA - Formation statistique - Module A-12

Définition du produit scalaire

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ application de $E \times E$ dans \mathbb{R}
2. $\langle U, V \rangle = \langle V, U \rangle$
3. $\langle U, U \rangle \geq 0$
4. $\langle U, U \rangle = 0$ si et seulement si $U = 0$
5. $\langle \alpha U + \beta V, W \rangle = \alpha \langle U, W \rangle + \beta \langle V, W \rangle$

INRA - Formation statistique - Module A-13

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire



INRA - Formation statistique - Module A-14

Intérêt du produit scalaire

1. Longueur :

$$|U|^2 = \langle U, U \rangle$$

2. Distance :

$$|V - U|^2 = \langle U, U \rangle + \langle V, V \rangle - 2 \langle U, V \rangle$$

3. Angle ($|U|, |V| \neq 0$) :

$$\cos \theta = \frac{\langle U, V \rangle}{|U||V|} = \frac{\langle U, V \rangle}{(\langle U, U \rangle \langle V, V \rangle)^{1/2}}$$

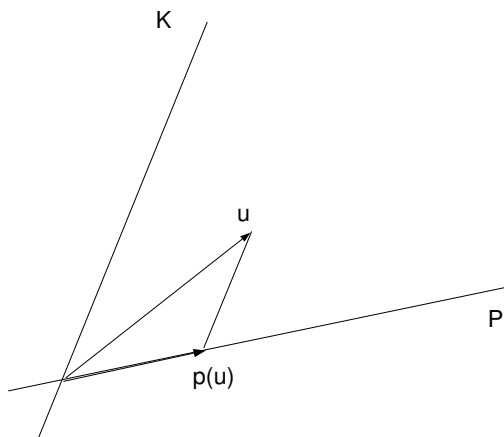
4. Orthogonalité :

U et V sont orthogonaux si et seulement si :

$$\langle U, V \rangle = 0$$

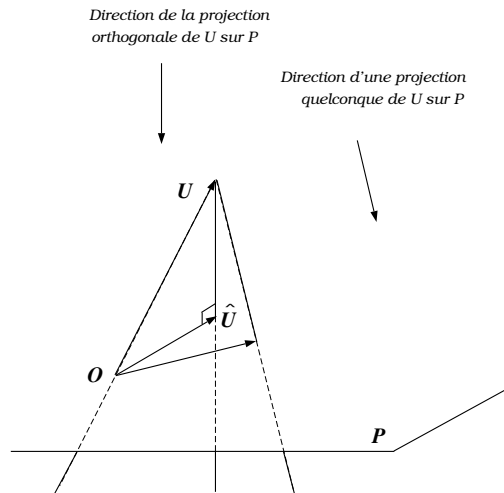
INRA - Formation statistique - Module A-15

2 PROJECTIONS



INRA - Formation statistique - Module A-16

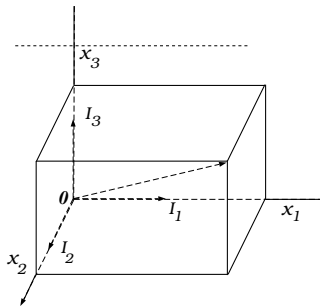
PROJECTION ORTHOGONALE



INRA - Formation statistique - Module A-17

3 BASE ORTHONORMÉE DE \mathbb{R}^3

Base orthonormée :
$$\begin{cases} |I_1| = |I_2| = |I_3| = 1 \\ \langle I_1, I_2 \rangle = \langle I_1, I_3 \rangle = \langle I_2, I_3 \rangle = 0 \end{cases}$$



INRA - Formation statistique - Module A-18

PARTIE II

GEOMETRIE ET STATISTIQUE

1 REPRESENTATION DES DONNEES

Les espaces des individus et des variables

2 LES RESUMES STATISTIQUES

Moyenne et variance

3 LES LIAISONS STATISTIQUES

Exemple : la liaison pression - température

Notion de corrélation

3 LES TESTS STATISTIQUES

Comparaison de deux populations

4 RESUME

INRA - Formation statistique - Module A-19

1 REPRESENTATION DES DONNEES

Exemple :

Un tableau de données

les lignes \iff les individus

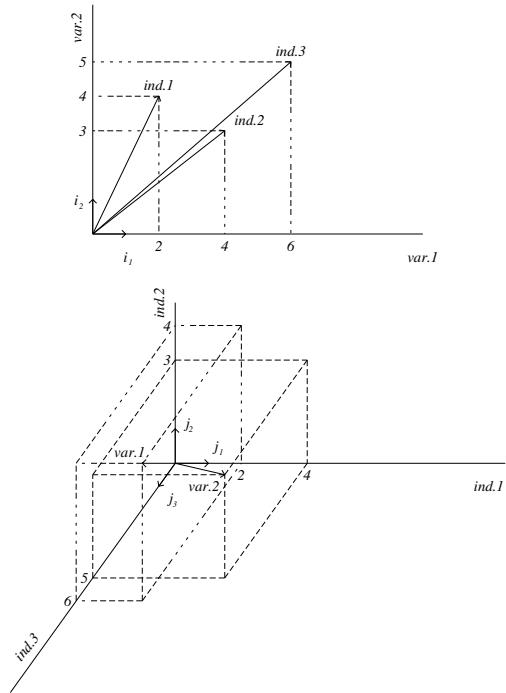
les colonnes \iff les variables

	<i>var.1</i>	<i>var.2</i>
<i>ind.1</i>	2	4
<i>ind.2</i>	4	3
<i>ind.3</i>	6	5

Que peut-on représenter géométriquement ?

INRA - Formation statistique - Module A-20

L'espace des individus et l'espace des variables



INRA - Formation statistique - Module A-21

2 DES RESUMES STATISTIQUES

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ une variable observée sur n individus.

$J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ le vecteur à n composantes égales à 1.

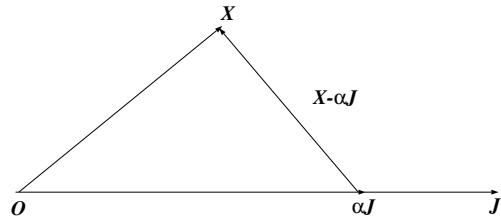
\widehat{X}_J la projection orthogonale de X sur J .

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ la moyenne.

$|X|^2$ le carré de la longueur du vecteur X

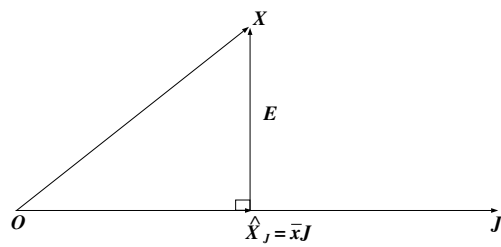
INRA - Formation statistique - Module A-22

Moyenne et variance



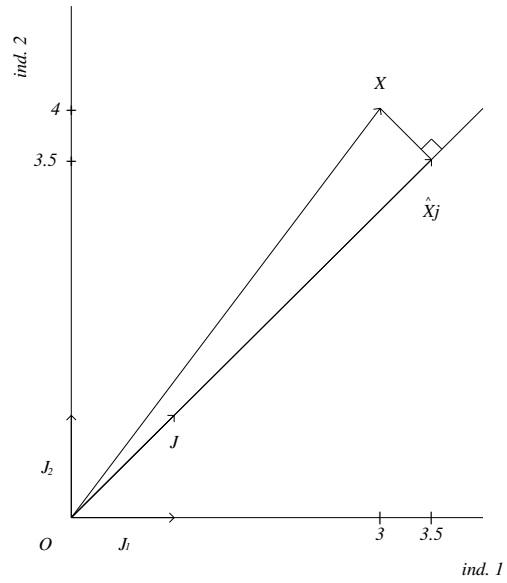
INRA - Formation statistique - Module A-23

Moyenne et variance



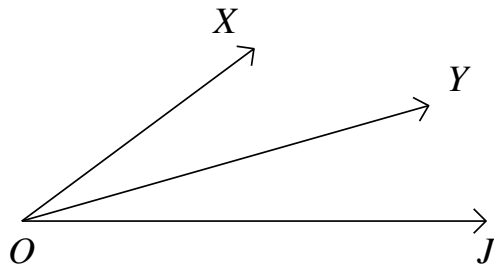
INRA - Formation statistique - Module A-24

Moyenne et variance
Exemple: $X' = [3 \ 4]$. Moyenne?



INRA - Formation statistique - Module A-25

3 LES LIAISONS STATISTIQUES



INRA - Formation statistique - Module A-26

3 LES LIAISONS STATISTIQUES

$$- X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{trois variables}$$

- \widehat{X}_J , \widehat{Y}_J et \widehat{Z}_J les projections orthogonales de X , Y et Z sur J .

- X' , Y' et Z' les variables X , Y et Z centrées.

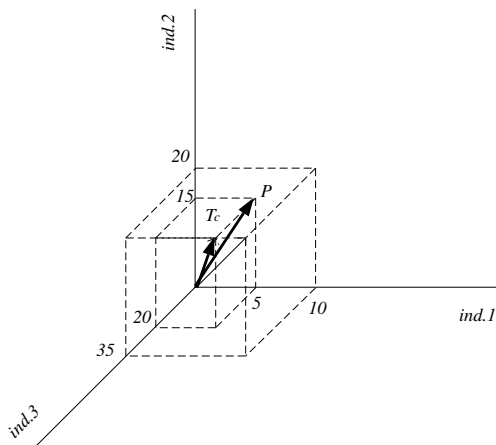
Exemple : Soit le tableau suivant des pressions et des températures (degrés centigrade et Fahrenheit).

	<i>P</i>	<i>T_c</i>	<i>T_f</i>
<i>ind.1</i>	10	5	41
<i>ind.2</i>	20	15	59
<i>ind.3</i>	35	20	69

Quel angle exprime la liaison entre la pression et la température ?

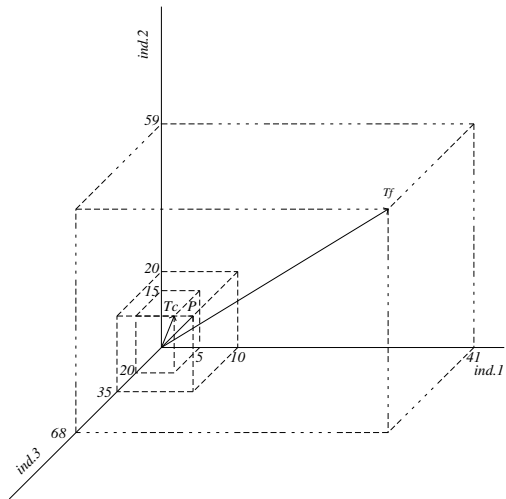
INRA - Formation statistique - Module A-27

La liaison pression-température



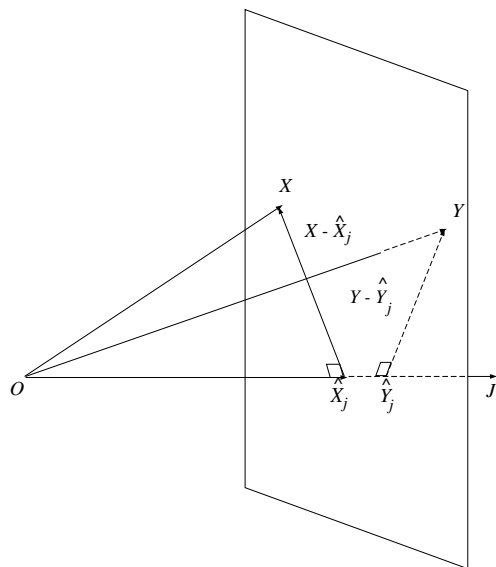
INRA - Formation statistique - Module A-28

La liaison pression-température



INRA - Formation statistique - Module A-29

Notion de corrélation L'espace des variables centrées



INRA - Formation statistique - Module A-30

La liaison pression-température
L'espace des variables centrées

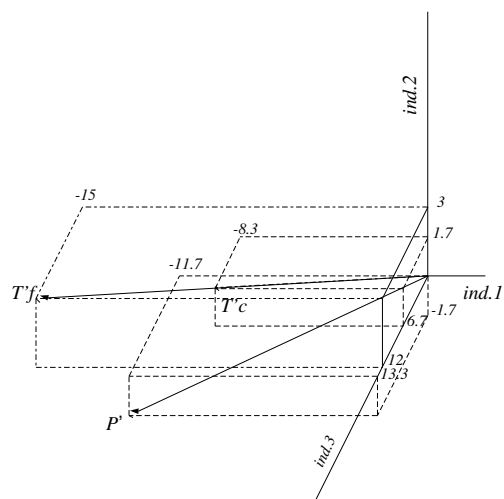
	P	T_c	T_f
<i>ind.1</i>	10	5	41
<i>ind.2</i>	20	15	59
<i>ind.3</i>	35	20	69

Centrons les variables

	P'	T'_c	T'_f
<i>ind.1</i>	-11.7	-8.4	-15
<i>ind.2</i>	-1.7	1.7	3
<i>ind.3</i>	13.4	6.7	12

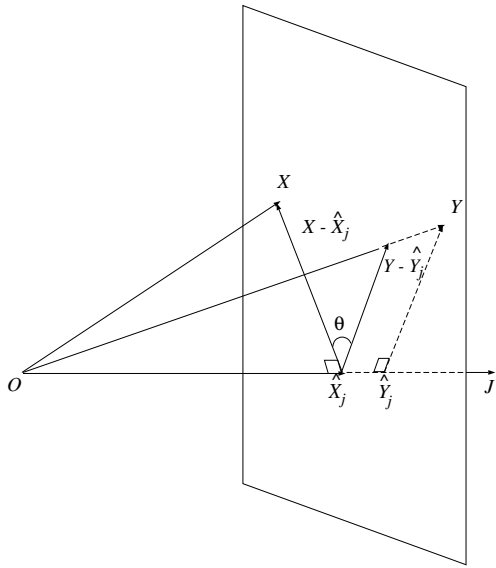
INRA - Formation statistique - Module A-31

La liaison pression-température
L'espace des variables centrées



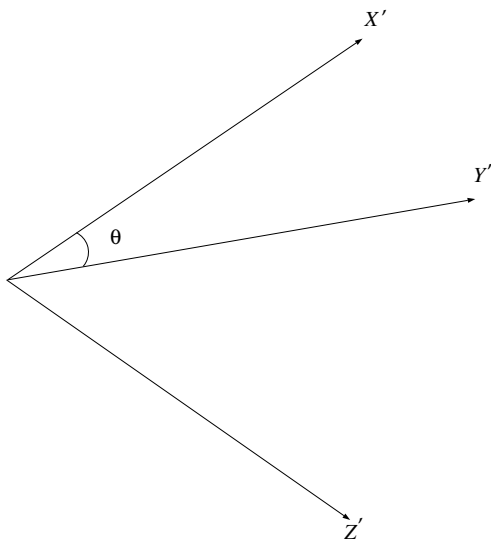
INRA - Formation statistique - Module A-32

Notion de corrélation



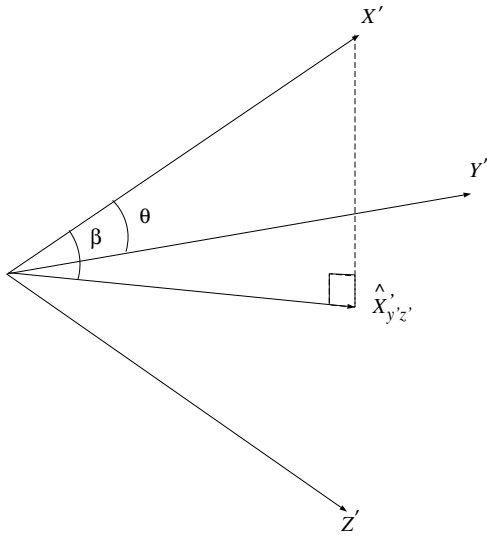
INRA - Formation statistique - Module A-33

Notion de corrélation



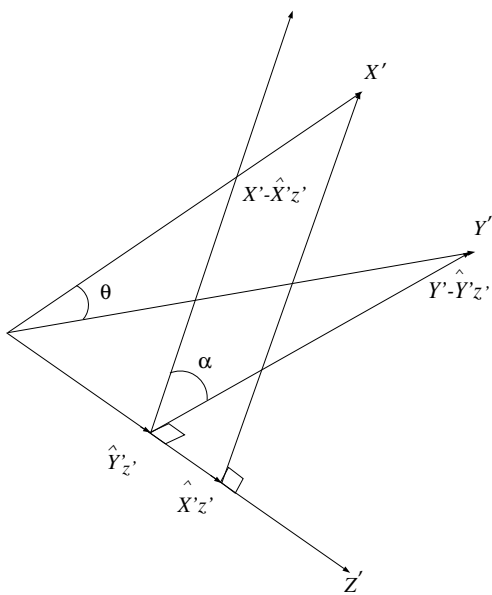
INRA - Formation statistique - Module A-34

Notion de corrélation



INRA - Formation statistique - Module A-35

Notion de corrélation



INRA - Formation statistique - Module A-36

3 LES TESTS STATISTIQUES

Comparaison de deux populations

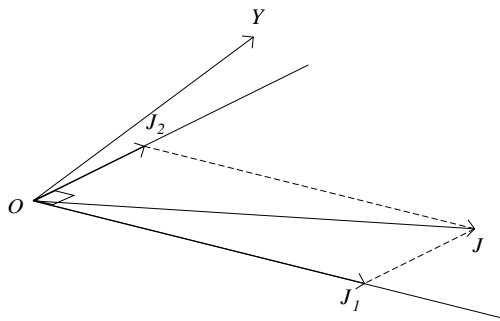
- P_1 et P_2 deux populations de moyenne μ_1 et μ_2
- Y le vecteur des observations (n_1 pour P_1 et n_2 pour P_2)
- J_1 et J_2 deux vecteurs orthogonaux tels que :

$$\langle J_1, J_2 \rangle = 0 \text{ et } J = J_1 + J_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{bmatrix} \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

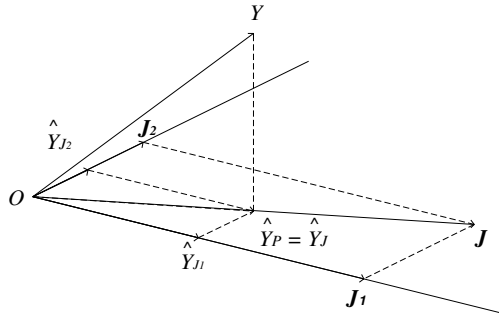
INRA - Formation statistique - Module A-37

Comparaison de deux populations



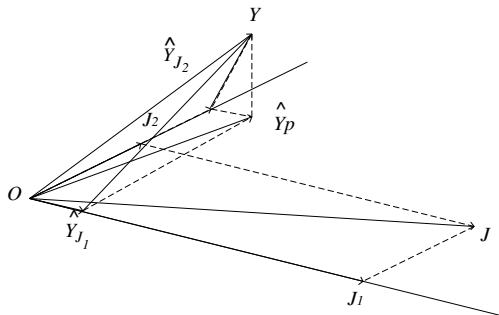
INRA - Formation statistique - Module A-38

Comparaison de deux populations
(Les deux populations sont identiques)



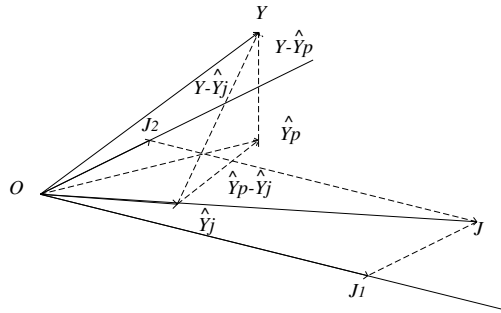
INRA - Formation statistique - Module A-39

Comparaison de deux populations
(Les deux populations sont différentes)



INRA - Formation statistique - Module A-40

Comparaison de deux populations
(Notion de test)



INRA - Formation statistique - Module A-41

4 Résumé

	Représentation géométrique	Expression statistique
Vecteur X	segment orienté de O vers X	x_1, \dots, x_n
Vecteur J	segment orienté de O vers J	$1, \dots, 1$
Vecteur $\widehat{X}_J = \bar{x}J$	Projeté orthogonal de X sur J	moyenne
$ X - \widehat{X}_J ^2$	Carré distance entre X et \widehat{X}_J	$(n - 1) \times$ variance

INRA - Formation statistique - Module A-42

4 Résumé

Représentation géométrique	Expression statistique
-------------------------------	---------------------------

$$\frac{\langle X - \widehat{X}_J, Y - \widehat{Y}_J \rangle}{|X - \widehat{X}_J| |Y - \widehat{Y}_J|}$$

Cosinus angle $X - \widehat{X}_J$ et $Y - \widehat{Y}_J$	Corrélation simple entre X et Y
---	--

$$\frac{\frac{|\widehat{Y}_P - \widehat{Y}_J|^2}{|Y - \widehat{Y}_P|^2}}{n_1 + n_2 - 2}$$

Rapport carrés distances pondérées par d.d.l.	Fisher à 1 et $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (si X et Y normales)
---	---

INRA - Formation statistique - Module A-43

PARTIE III

1 MATRICES

- Ranger des données
- Traiter des données
- Faire une transformation

2 MATRICES PARTICULIERES

- Matrice carrée
- Matrice nulle
- Matrice diagonale
- Matrice identité I
- Matrice J
- Matrice transposée : A' transposée de A
- Matrice symétrique

INRA - Formation statistique - Module A-44

3 OPERATIONS MATRICIELLES

- Addition
- Multiplication par un scalaire
- Multiplication de deux matrices
- Transposée d'un produit de matrices
- Trace
- Matrice idempotente
- Matrice inverse
- Notion de rang
- Déterminant d'une matrice

1 MATRICES

Ranger des données

- **Exemple** : âge, poids et taille de 5 individus

$$\begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{une ligne} = \text{un individu} \\ \text{une colonne} = \text{une variable} \end{array}$$

Matrice (5 × 3)

- **Notation**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \quad A_{(n \times p)} \text{ ou } A_{(n,p)}$$

$$A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, n \text{ et } j=1, \dots, p}$$

Traiter des données

– **Exemple** : âge, poids, taille de 5 femmes

$$F = \begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix} \quad F_{(5 \times 3)}$$

– **Exemple** : âge, poids, taille de 5 hommes

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 82 & 187 \\ 20 & 65 & 179 \\ 25 & 78 & 175 \\ 22 & 78 & 175 \\ 22 & 68 & 180 \\ 30 & 70 & 187 \end{bmatrix} \quad H_{(5 \times 3)}$$

– Rechercher les liaisons âge, poids, taille chez les femmes et chez les hommes.

Comparer les résultats.

INRA - Formation statistique - Module A-47

Faire une transformation

Exemple : Faire correspondre à chaque homme X d'âge (x_1), de poids (x_2) et de taille (x_3) :

- Un indice y_1 de risque de cancer.
- Un indice y_2 de risque d'infarctus du myocarde.

– Le produit de la matrice R des risques par unité d'âge, de poids et de taille par X permet d'obtenir le vecteur Y des risques y_1 et y_2 .

$$Y_{(2 \times 1)} = R_{(2 \times 3)} \times X_{(3 \times 1)}$$

INRA - Formation statistique - Module A-48

2 MATRICES PARTICULIERES

Matrice carrée : $M_{(n \times n)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice nulle : $a_{ij} = 0 \forall i, j$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-49

Matrice identité I : $a_{ii} = 1 \forall i$ et $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice J : $a_{ij} = 1 \forall i, j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice transposée : A' transposée de A ($a'_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-50

Matrice symétrique : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée ($A = A'$).

On n'écrit en général que la partie triangulaire haute ou basse.
Soit :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 OPERATIONS MATRICIELLES

Addition

Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ des matrices de **même dimension**.
La somme de A et de B est une matrice C telle que :

$$C = A + B \text{ a pour éléments: } c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+6 \\ 5+3 & 4+1 \\ 8+2 & 4+5 \\ 3+2 & 2+2 \end{bmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

Multiplication de deux matrices

$$i \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots A_{ik} \\ \vdots \end{pmatrix} \times k \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots B_{kj} \\ \vdots \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots C_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A_{(n \times p)} \quad B_{(p \times m)} \quad \rightarrow \quad C = A \times B$$

Les éléments de $C_{(n \times m)}$ sont :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

INRA - Formation statistique - Module A-53

Multiplication de deux matrices

Exercices : effectuer les produits

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-54

Transposée d'un produit de matrices

$$(A.B)' = B'.A'$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'.A' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (A.B)'$$

INRA - Formation statistique - Module A-55

Trace

Donner la trace de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Matrice idempotente

Une matrice $A_{(n \times n)}$ est idempotente si :

$$AA = A$$

Exemple: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

INRA - Formation statistique - Module A-56

Matrice inverse

On appelle matrice inverse de A la matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

si A^{-1} existe, elle est unique, A est dite non singulière

si A^{-1} n'existe pas, A est dite singulière

Exemple : Inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse d'une matrice diagonale?

INRA - Formation statistique - Module A-57

NOTION DE RANG

Nombre de vecteurs linéairement indépendants

Vecteurs-ligne (si $n < p$)

Vecteurs-colonne (si $n > p$)

Si tous vecteurs sont linéairement indépendants alors la matrice est de plein rang.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Rang} = 3 \\ \iff \text{matrice} \\ \text{de plein rang} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{Rang} = 2$$

INRA - Formation statistique - Module A-58

DETERMINANT D'UNE MATRICE

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

on l'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

\Downarrow

$$AX = B$$

Si A est inversible alors le système d'équations admet une solution :

$$X = A^{-1}B$$

Pour savoir si A^{-1} existe, on calcule son déterminant.

$$\det(A) \neq 0 \iff A^{-1} \text{ existe.}$$

INRA - Formation statistique - Module A-59

Calcul du déterminant

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 24 + 25 + 4 - 4 - 30 - 20 = -1$$

A non singulière \iff 1- A de plein rang
2- $\det(A) \neq 0$
3- A^{-1} existe

INRA - Formation statistique - Module A-60

VALEURS ET VECTEURS PROPRES

1 Notion de valeur et de vecteur propre

- Exemple : Symétrie par rapport à la 1^{ère} bissectrice
- Généralisation

2 Propriétés

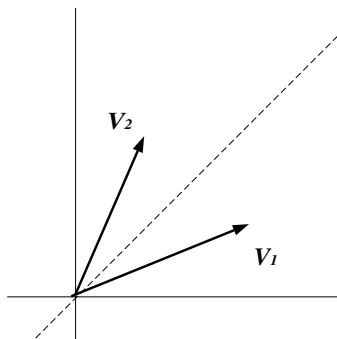
3 Exercices

- Symétrie par rapport à la 1^{ère} bissectrice

1 Notion de valeur et de vecteur propre
Symétrie par rapport à la 1^{ère} bissectrice

Soit l'application $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_1 : V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

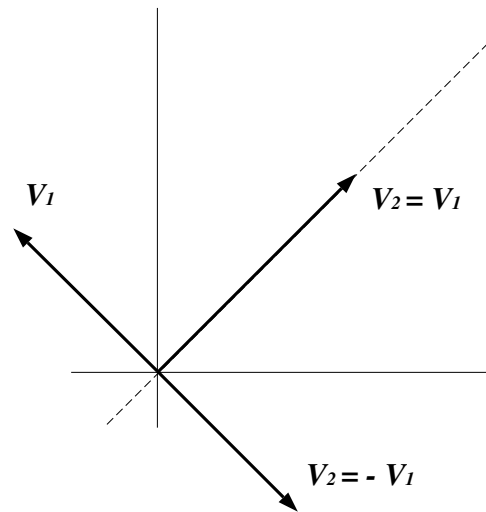


La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Quels sont les vecteurs V_1 non nuls du plan tels que :

$$A_1.V_1 = \lambda V_1 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} ?$$

Symétrie par rapport à la 1^{ère} bissectrice



INRA - Formation statistique - Module A-63

Généralisation

Soit :

- E un espace vectoriel de dimension n .
- A matrice.

$V \in E$, non nul, est un **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $A.V = \lambda V$.

INRA - Formation statistique - Module A-64

2 Propriétés

1. A une matrice carrée A d'ordre n sont associées au plus n valeurs propres réelles.
2. Les valeurs propres sont les racines d'un polynôme de degré n appelé **polynôme caractéristique**. Elles satisfont à l'équation : $\det(A - \lambda I) = 0$ avec $I =$ matrice identité.
3. Si A est une matrice **symétrique** (cas des matrices d'inertie et de variance-covariance) :
 - toutes les racines du polynôme caractéristique sont **réelles**.
 - Si toutes les racines sont positives la matrice A est dite **définie positive**.
 - Si λ_i et λ_j sont deux valeurs propres distinctes les vecteurs propres associés sont **orthogonaux**.

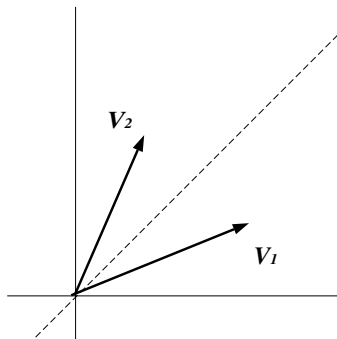
INRA - Formation statistique - Module A-65

3 Exercices

Symétrie par rapport à la 1^{ère} bissectrice

Soit l'application $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x_2 = y_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$



La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rechercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A_1 ?

INRA - Formation statistique - Module A-66

MAXIMISATION-DERIVATION

1 Recherche des extrema

- Extremum d'une fonction

2 Dérivation

- Dérivée première
- Exemple
- Dérivée seconde

3 Recherche des extrema

- Exemples

Extremum d'une fonction d'une variable

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. dérivable deux fois.
2. Calcul de $f'(x)$
 f admet un extremum en $x_0 \in]a, b[\implies f'(x_0) = 0$.
3. Calcul de $f''(x)$

$$\begin{cases} f(x_0) \text{ est minimum si } f''(x_0) > 0 \\ f(x_0) \text{ est maximum si } f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Contre exemples :

- $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, pas d'extremum en 0
- $f(x) = x^4$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = 0$, minimum en 0
- $f(x) = x$ sur $[0,1]$, 0 est un minimum mais $f'(0) \neq 0$
- $f(x) = |x|$, 0 est un minimum mais f non dérivable en 0

2 Dérivation

Dérivée première

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow f(X)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-69

Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow f(X) = a_1 x_1^2 + a_2 \sin(x_2) + a_3$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 2a_1 x_1 \\ a_2 \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-70

Quelques dérivées premières

Soient

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Si pour tout X , $f(X) = B'.X = X'.B$ alors :

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = B$$

- Si pour tout X , $f(X) = \text{Constante}$, alors :

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

INRA - Formation statistique - Module A-71

Quelques dérivées premières

$$f(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

soit

$$f(X) = [x_1 x_2 \dots x_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X'.X$$

alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \frac{\partial (X'.X)}{\partial X} = 2.X$$

INRA - Formation statistique - Module A-72

Quelques dérivées premières

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

$$f(X) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_1 \cdot x_n \\ + a_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2^2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_2 \cdot x_n \\ + \cdots + a_{nn} \cdot x_n^2$$

$$f(X) = [x_1 x_2 \cdots x_n] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$f(X) = X' \cdot A \cdot X$$

INRA - Formation statistique - Module A-73

Quelques dérivées premières

$$f(X) = X' \cdot A \cdot X$$

alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \frac{\partial (X' \cdot A \cdot X)}{\partial X} = A \cdot X + A' \cdot X$$

si de plus A est symétrique ($A = A'$) alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = 2 \cdot A \cdot X$$

INRA - Formation statistique - Module A-74

Dérivée seconde

Quand $f(X)$ est une forme quadratique

$$f(X) = X'.A.X$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = A.X + A'.X$$

alors

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \frac{\partial(A.X + A'.X)}{\partial X} = A' + A$$

si de plus A est symétrique ($A = A'$)

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = 2.A$$

C'est une matrice appelée :
matrice **HESSIENNE** (H)

INRA - Formation statistique - Module A-75

3 Recherche des extrema

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fois dérivable

vecteur gradient : $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \vdots \end{bmatrix}$ et matrice hessienne : $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix}$

Condition nécessaire pour obtenir un extremum de $f(X)$ au point $X = X_0$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \\ \vdots \end{bmatrix}_{X=X_0} = 0$$

Condition suffisante pour avoir un :

1. **Maximum** : matrice hessienne évaluée en X_0 définie négative.
2. **Minimum** : matrice hessienne évaluée en X_0 définie positive.

INRA - Formation statistique - Module A-76

Exemples

Déterminer les extrema s'ils existent :

1. Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

2. Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 7$$

3. Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

INRA - Formation statistique - Module A-77

Exemple 1

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie positive, le point $(0, 0)$ est un minimum.

INRA - Formation statistique - Module A-78

Exemple 2

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 2 \\ -2y + 4 \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \iff (x,y) = (1,2)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie négative , le point (1,2) est un maximum.

INRA - Formation statistique - Module A-79

Exemple 3

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne n'est ni définie positive ni définie négative.

INRA - Formation statistique - Module A-80

Application : Modèle linéaire

Construction de la droite des moindres carrés sur une régression linéaire simple

équation de la régression :

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

On cherche a et b minimisant $\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$$\text{on pose } f(a, b) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2]$$

INRA - Formation statistique - Module A-81

Application : Modèle linéaire (suite)

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [-2y_i x_i + 2x_i(ax_i + b)] \\ \sum_{i=1}^n [-2y_i + 2(ax_i + b)] \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\sum_{i=1}^n y_i x_i + \sum_{i=1}^n x_i(ax_i + b) = 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = 0 \end{cases}$$

INRA - Formation statistique - Module A-82

Application : Modèle linéaire (suite)

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n y_i x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ -n\bar{Y} + na\bar{X} + nb = 0 \end{cases}$$

Calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2x_i\bar{X} + \bar{X}^2] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n [x_i y_i - x_i \bar{Y} - y_i \bar{X} + \bar{X} \bar{Y}] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{X} \bar{Y} - n\bar{X} \bar{Y} + n\bar{X} \bar{Y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{X} \bar{Y} \end{aligned} \tag{2}$$

INRA - Formation statistique - Module A-83

Application : Modèle linéaire (suite)

En utilisant les équations (1) et (2), le système devient :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) - n\bar{X}\bar{Y} + a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + an\bar{X}^2 \\ \quad + nb\bar{X} = 0 \\ b = \bar{Y} - a\bar{X} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) - n\bar{X}\bar{Y} + a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + an\bar{X}^2 \\ \quad + n(\bar{Y} - a\bar{X})\bar{X} = 0 \\ b = \bar{Y} - a\bar{X} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \\ b = \bar{Y} - a\bar{X} \end{cases}$$

INRA - Formation statistique - Module A-84