PARTIE I

1 ESPACE VECTORIEL

- Addition de 2 vecteurs
- Multiplication par un scalaire
- Propriétés de l'addition
- Propriétés de la multiplication par un scalaire
- Propriétés déduites des précédentes

1.1 Sous espace vectoriel

1.2 Combinaison linéaire

1.3 Indépendance linéaire

1.4 Base d'un espace vectoriel

PARTIE I

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire

- Intérêt du produit scalaire
- Propriétés du produit scalaire

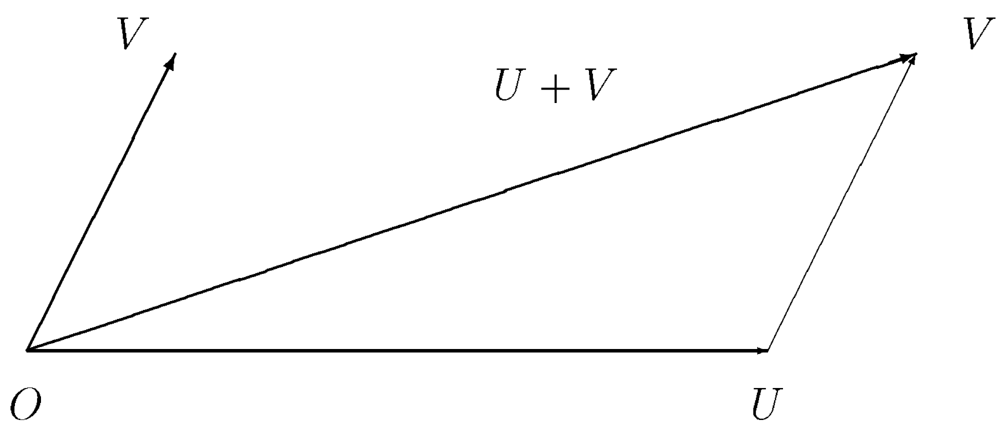
1.6 Décomposition en somme directe

2 PROJECTIONS

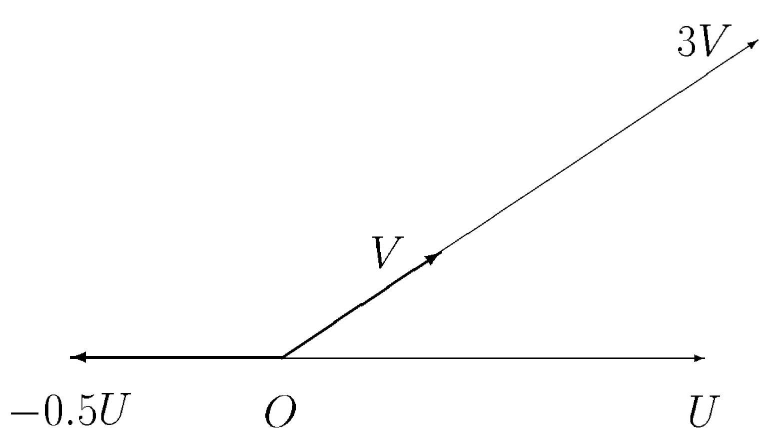
3 COORDONNEES DANS $\mathbb{R}^3$

1 ESPACE VECTORIEL

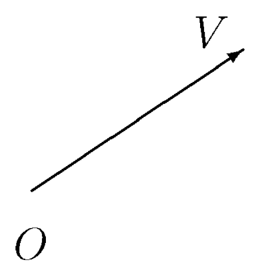
Addition de 2 vecteurs



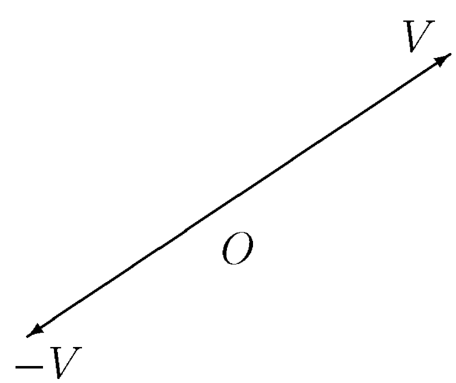
Multiplication par un scalaire



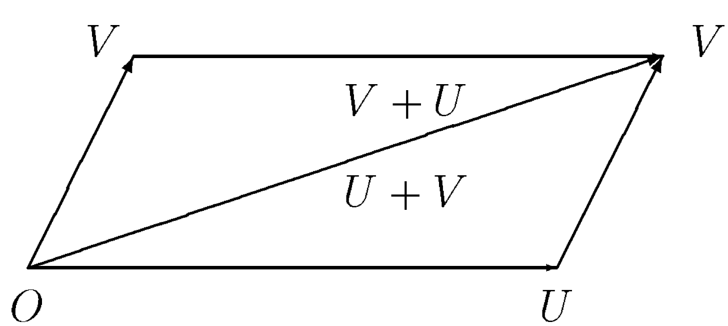
Propriétés de l'addition



$$\boxed{\phi + V = V + \phi = V}$$

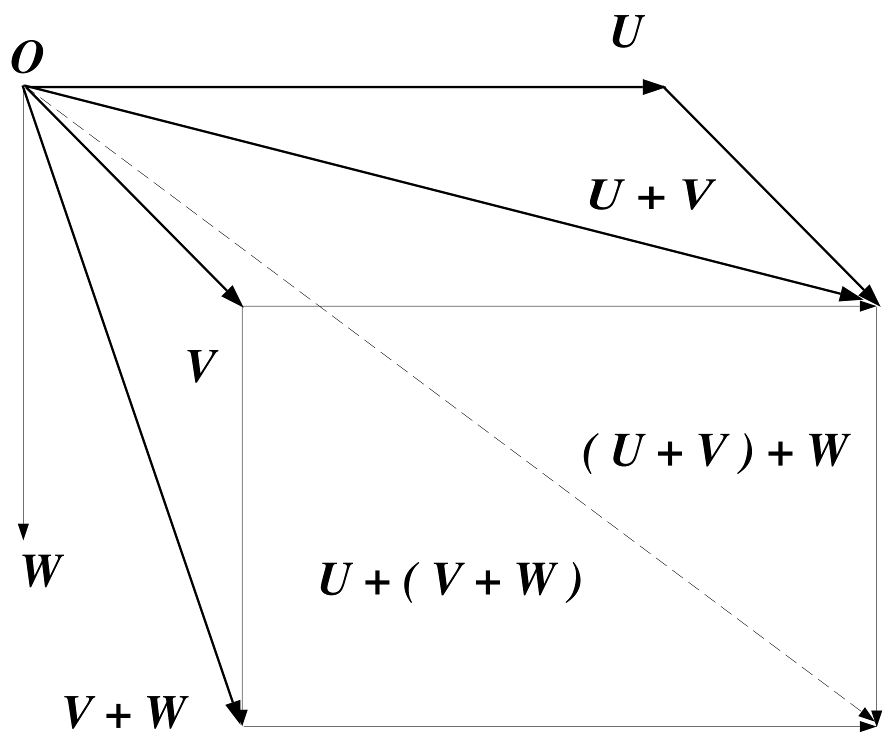


$$\boxed{V + (-V) = \phi}$$



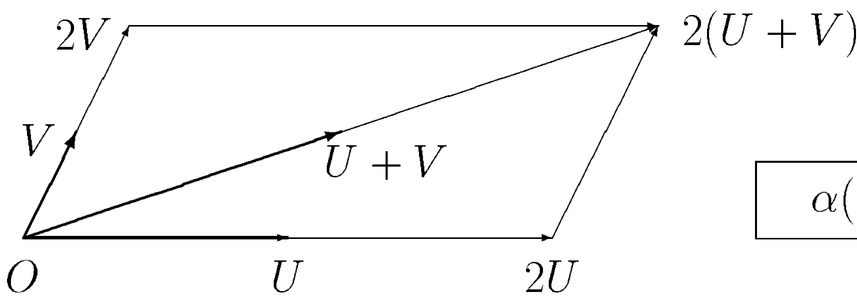
$$\boxed{U + V = V + U}$$

Propriétés de l'addition

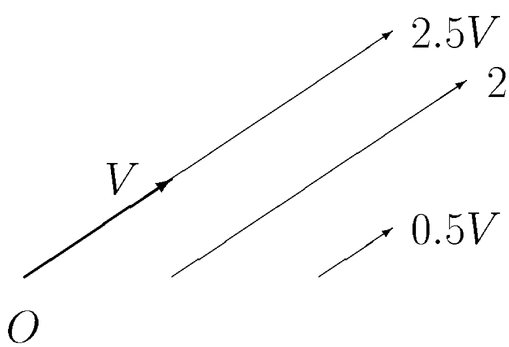


$$\boxed{U + (V + W) = (U + V) + W}$$

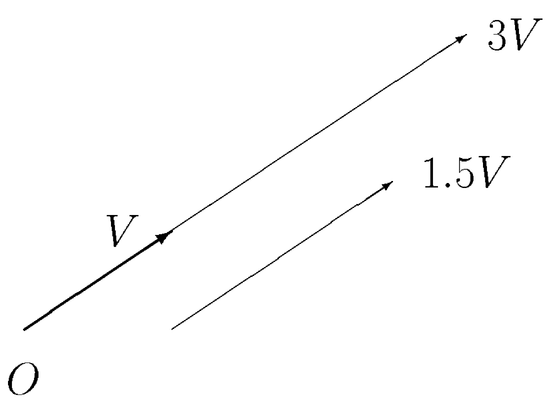
Propriétés de la multiplication par un scalaire



$$\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V$$



$$(\alpha+\beta)V = \alpha V + \beta V$$



$$(\alpha\beta)V = \alpha(\beta V)$$

Propriétés déduites des précédentes

1. $(\alpha+\beta)U = \alpha U + \beta U$

$$si \;\; \beta = -\alpha \quad \Longrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)U = o.U \\ \alpha U + \beta U = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{o.U = \phi}$$

2. $\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V$

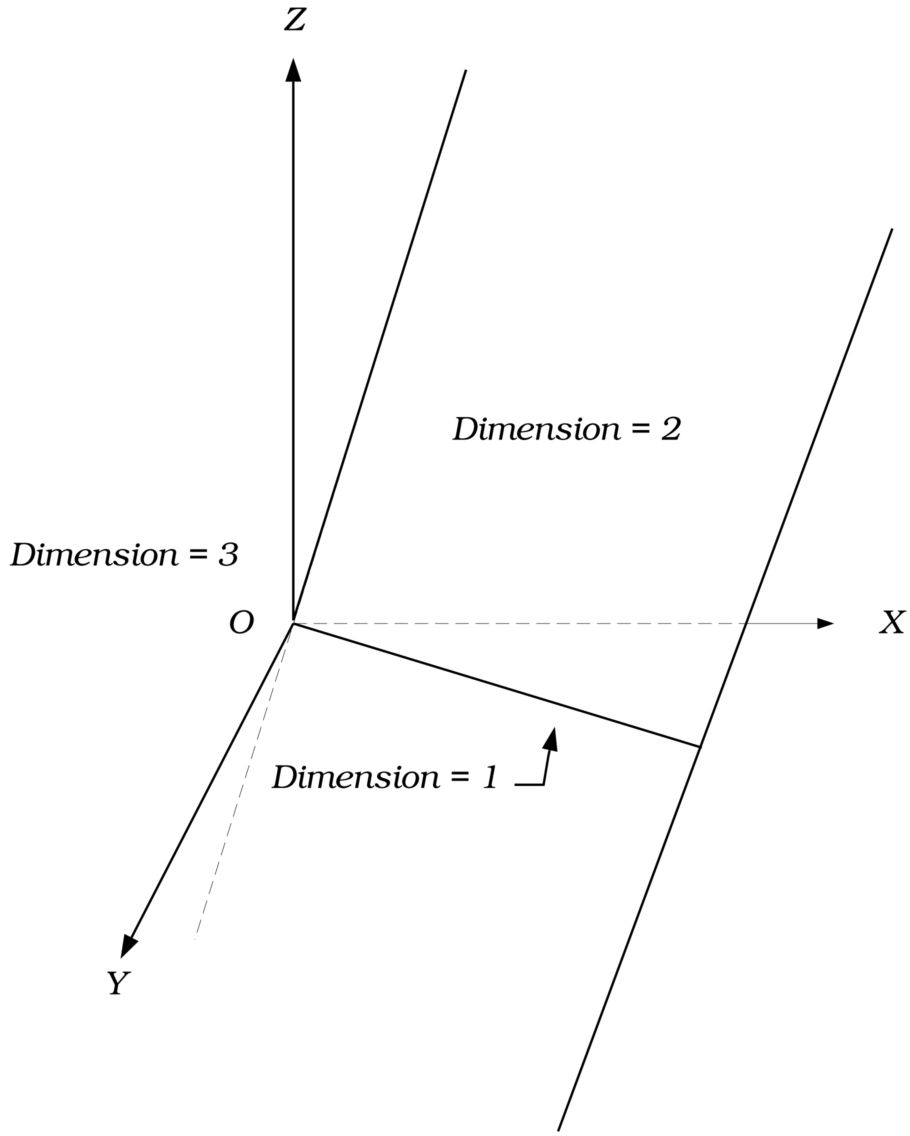
$$si \;\; V = -U \quad \Longrightarrow \begin{cases} \alpha(U+V) = \alpha\phi \\ \alpha U + \alpha V = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

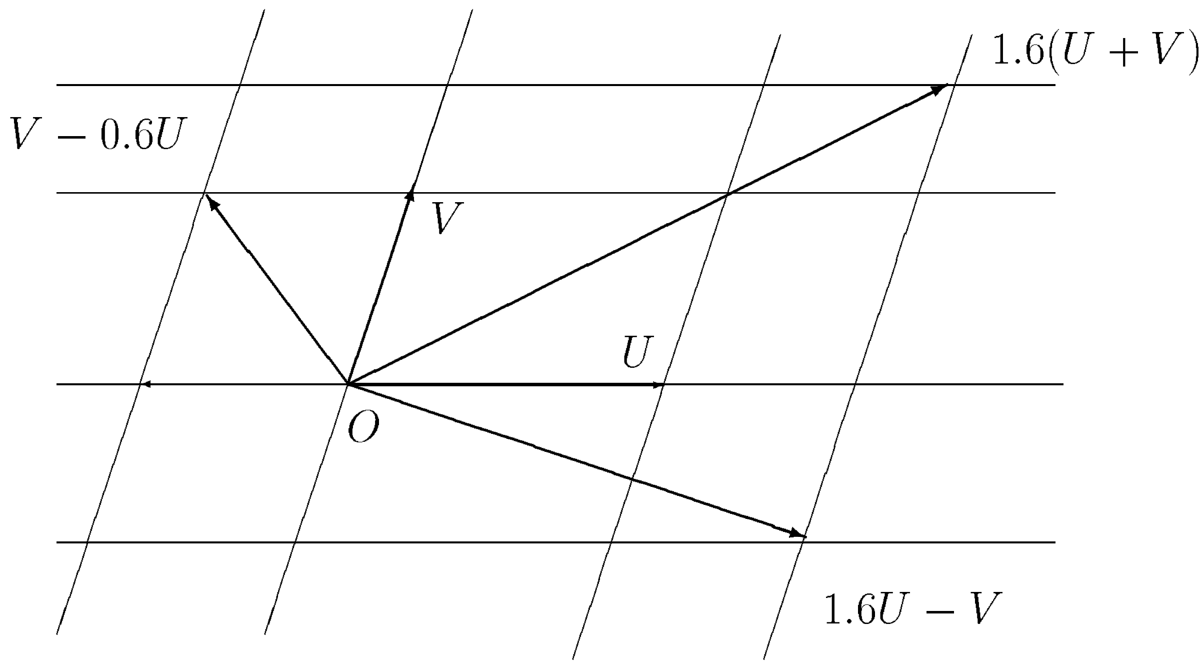
$$\boxed{\alpha\phi = \phi}$$

3. $\boxed{(-1)V = -V}$

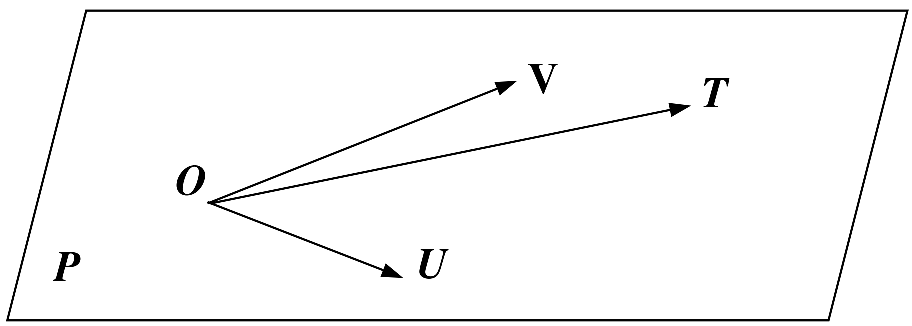
1.1 Sous espace vectoriel



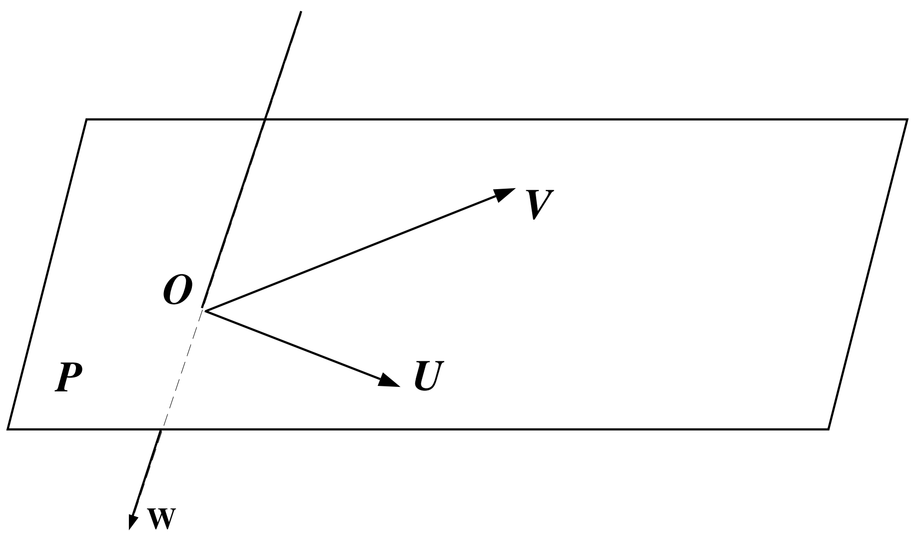
1.2 Combinaison linéaire



1.3 Indépendance linéaire

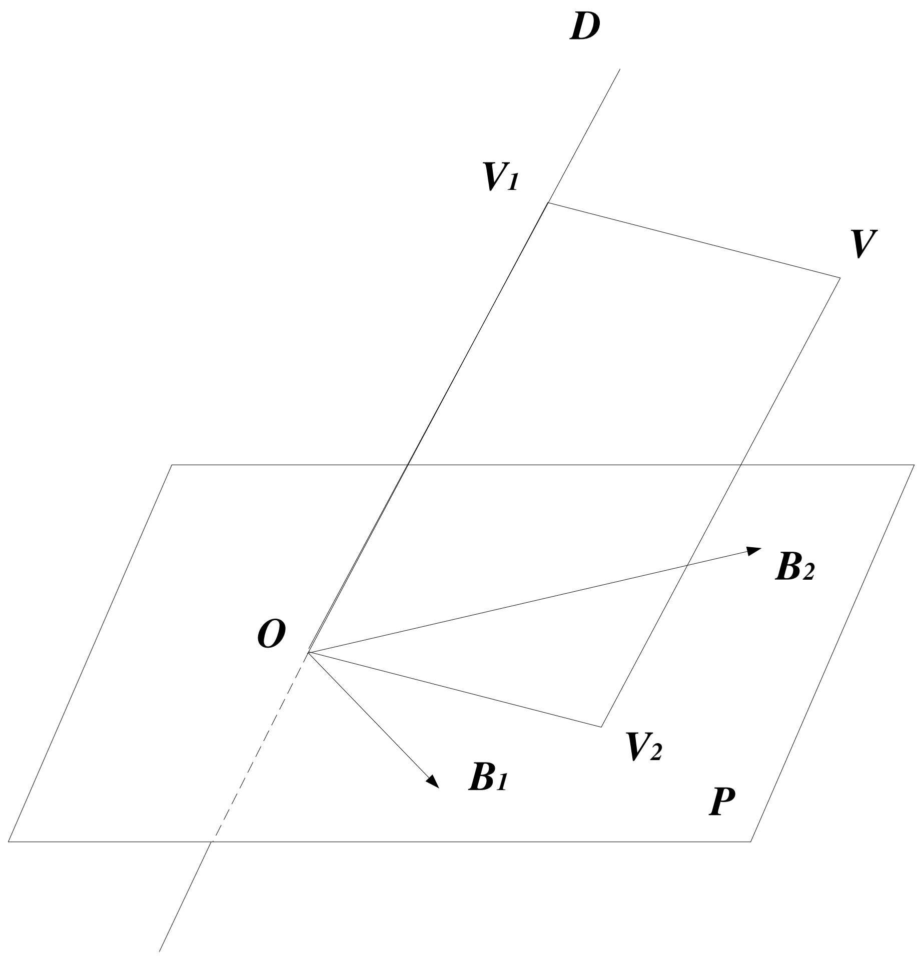


Ces vecteurs sont-ils indépendants ?



U, V et W sont-ils indépendants ?

1.6 Décomposition en somme directe



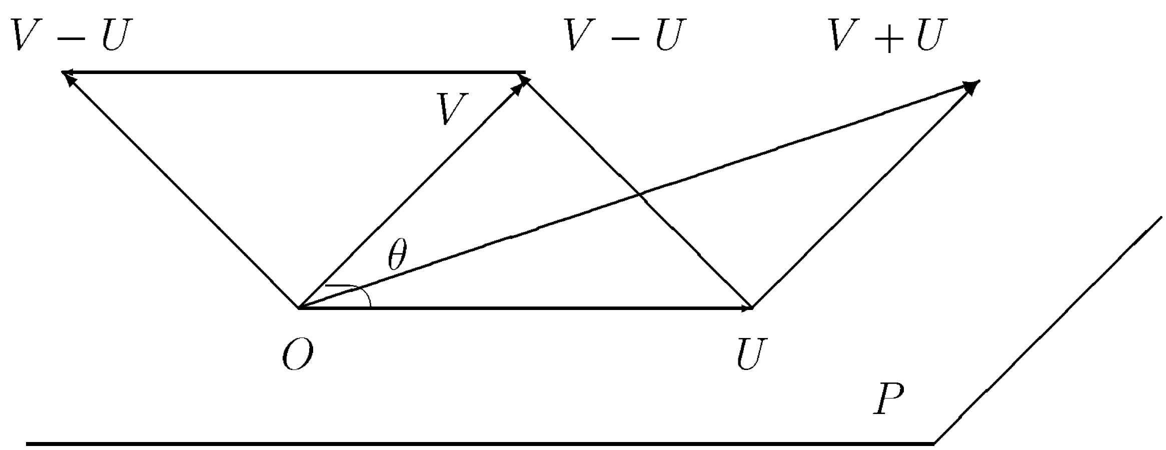
1.4 Base d'un espace vectoriel de dimension finie

1. Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent l'espace dans sa totalité.
2. Tout vecteur est défini de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base.
3. Un espace vectoriel a toujours une base (mais elle n'est pas unique).
4. Chaque base a le même nombre d'éléments, ce nombre représente la dimension de l'espace.

Définition du produit scalaire

1. $< \; , \; >$ application de $E \times E$ dans $I\!R$
2. $< U, V > = < V, U >$
3. $< U, U > \; \geq 0$
4. $< U, U > = 0$ si et seulement si $U = 0$
5. $< \alpha U + \beta V, W > = \alpha < U, W > + \beta < V, W >$

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire



Intérêt du produit scalaire

1. Longueur :
$$|U|^2 = < U, U >$$

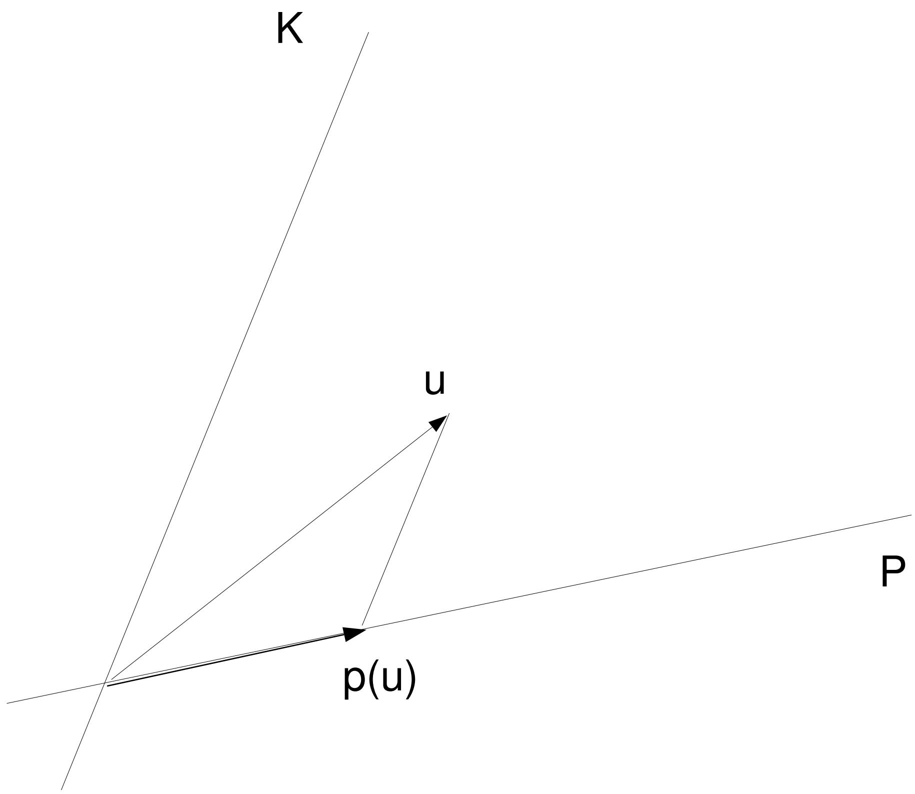
2. Distance :
$$|V - U|^2 = < U, U > + < V, V > -2 < U, V >$$

3. Angle ($|U|, |V| \neq 0$) :
$$cos\theta = \frac{< U, V >}{|U||V|} = \frac{< U, V >}{(< U, U >< V, V >)^{1/2}}$$

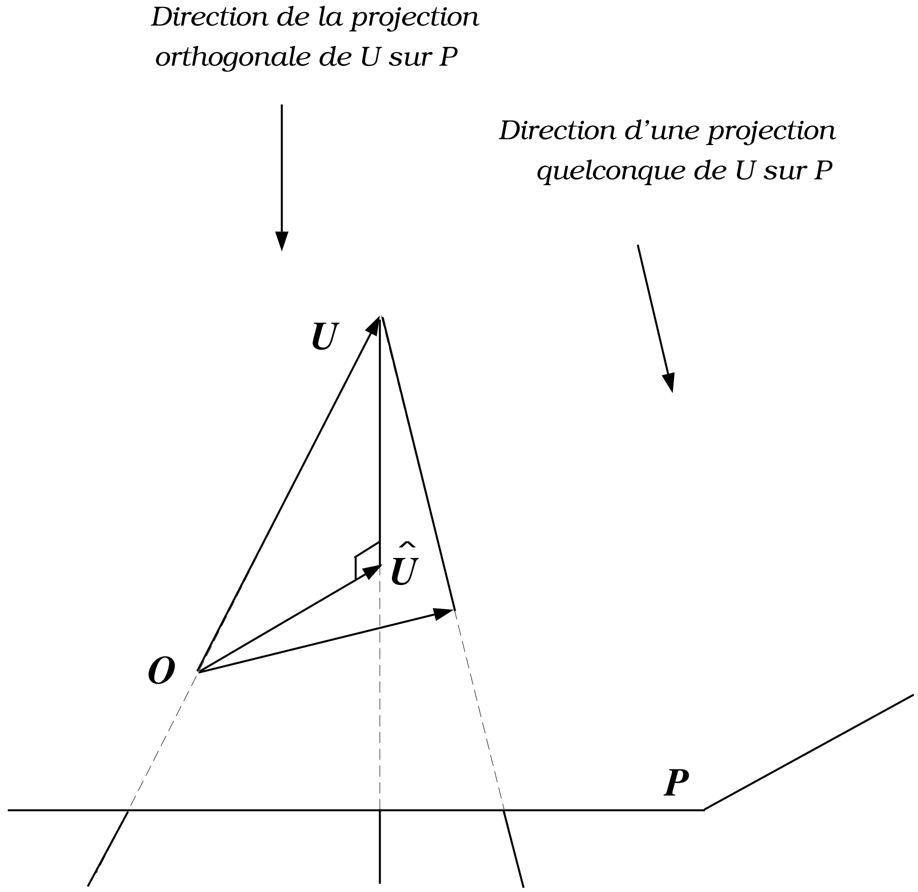
4. Orthogonalité :

U et V sont orthogonaux si et seulement si :
$$< U, V > = 0$$

2 PROJECTIONS

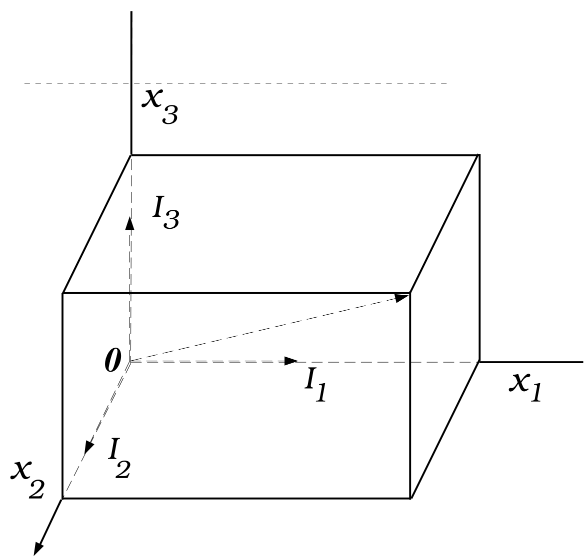


PROJECTION ORTHOGONALE



3 BASE ORTHONORMEE DE $\mathbb{R}^3$

Base orthonormée : $\begin{cases} |I_1| = |I_2| = |I_3| = 1 \\ \langle I_1, I_2 \rangle = \langle I_1, I_3 \rangle = \langle I_2, I_3 \rangle = 0 \end{cases}$



PARTIE II

GEOMETRIE ET STATISTIQUE

1 REPRESENTATION DES DONNEES

Les espaces des individus et des variables

2 LES RESUMES STATISTIQUES

Moyenne et variance

3 LES LIAISONS STATISTIQUES

Exemple : la liaison pression - température
Notion de corrélation

3 LES TESTS STATISTIQUES

Comparaison de deux populations

4 RESUME

1 REPRESENTATION DES DONNEES

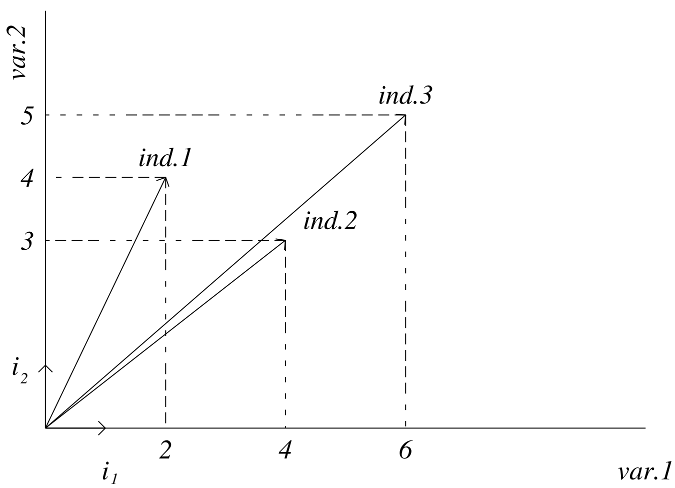
Exemple :

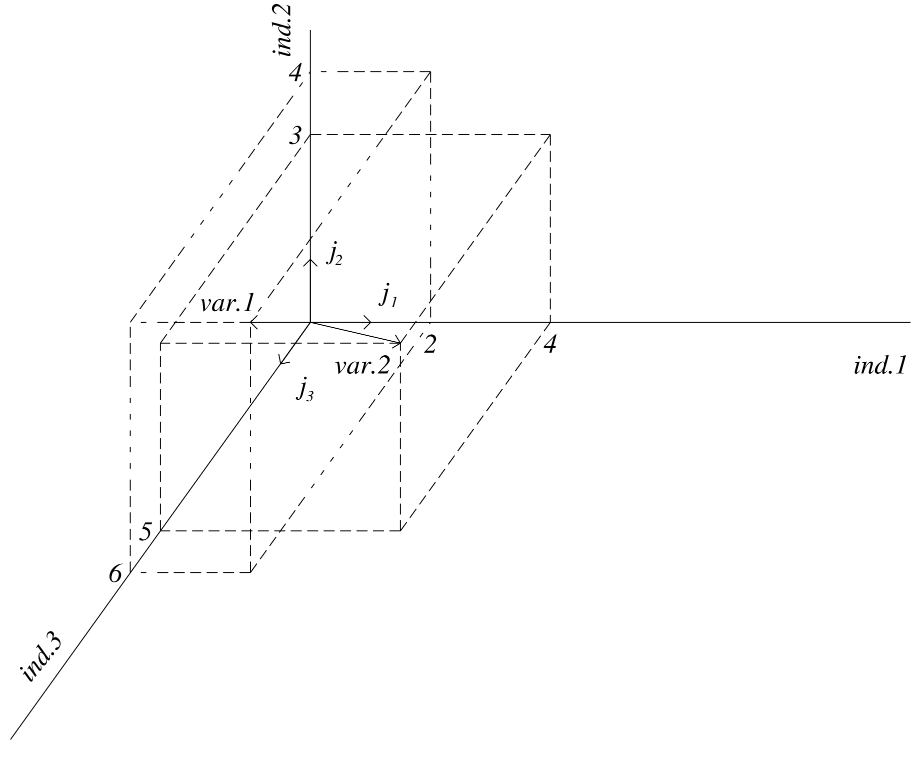
Un tableau de données
les lignes $\Longleftrightarrow$ les individus
les colonnes $\Longleftrightarrow$ les variables

	$var.1$	$var.2$
$ind.1$	2	4
$ind.2$	4	3
$ind.3$	6	5

Que peut-on représenter géométriquement ?

L'espace des individus et l'espace des variables





2 DES RESUMES STATISTIQUES

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ une variable observée sur n individus.

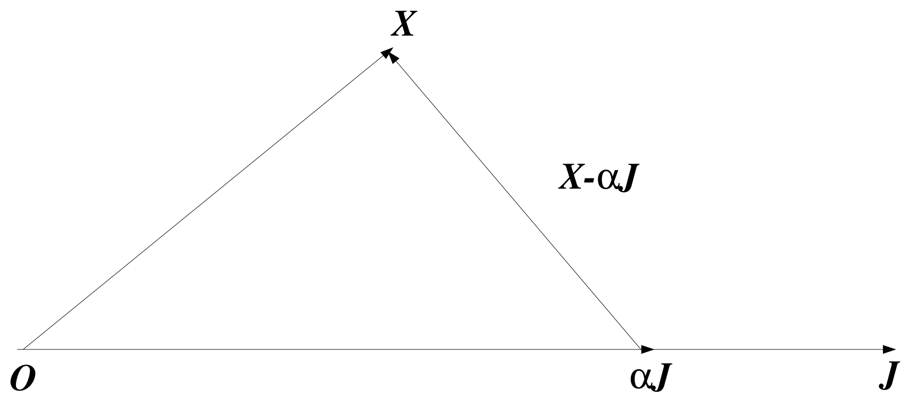
$J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ le vecteur à n composantes égales à 1.

$\widehat{X_J}$ la projection orthogonale de X sur J.

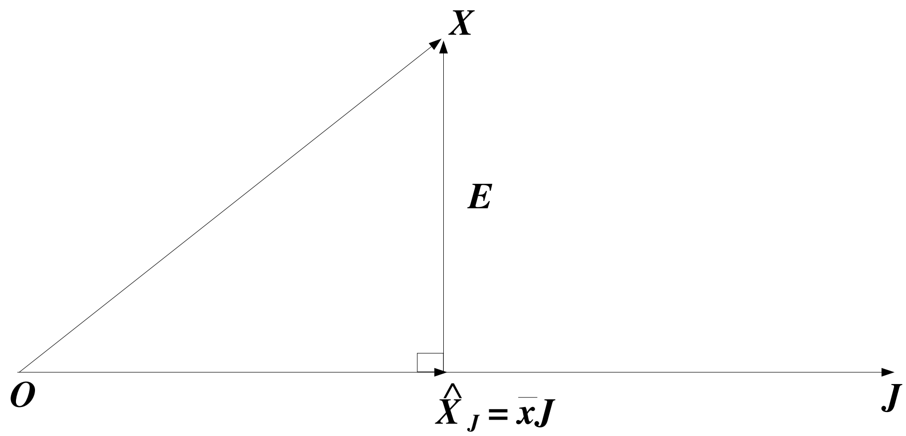
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne.

$|X|^2$ le carré de la longueur du vecteur X

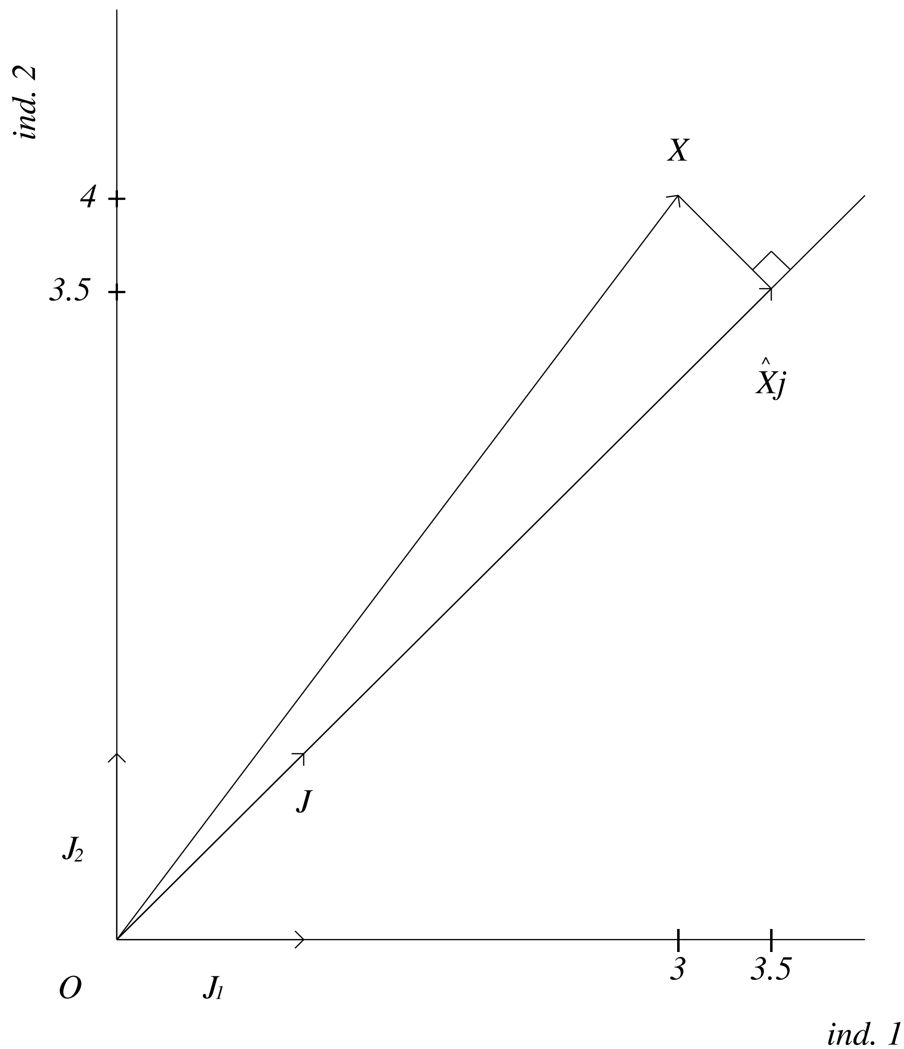
Moyenne et variance



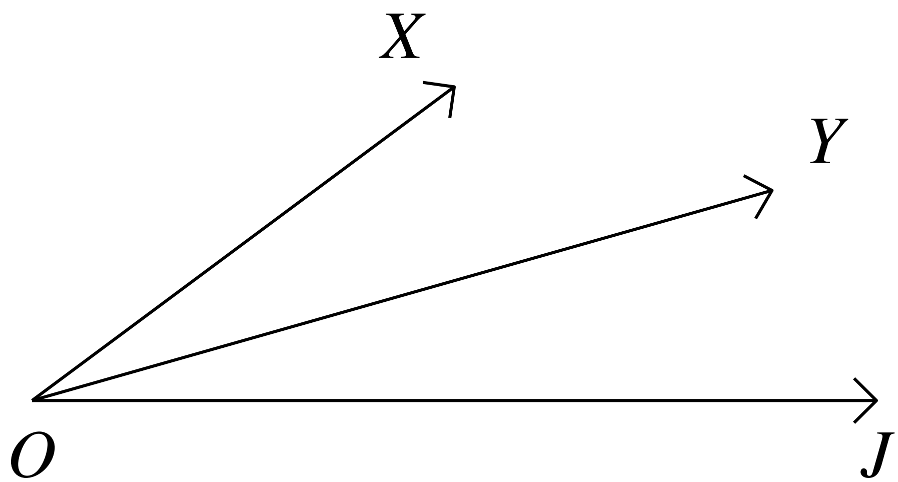
Moyenne et variance



Moyenne et variance
Exemple : $X' = [3\ 4]$. Moyenne ?



3 LES LIAISONS STATISTIQUES



3 LES LIAISONS STATISTIQUES

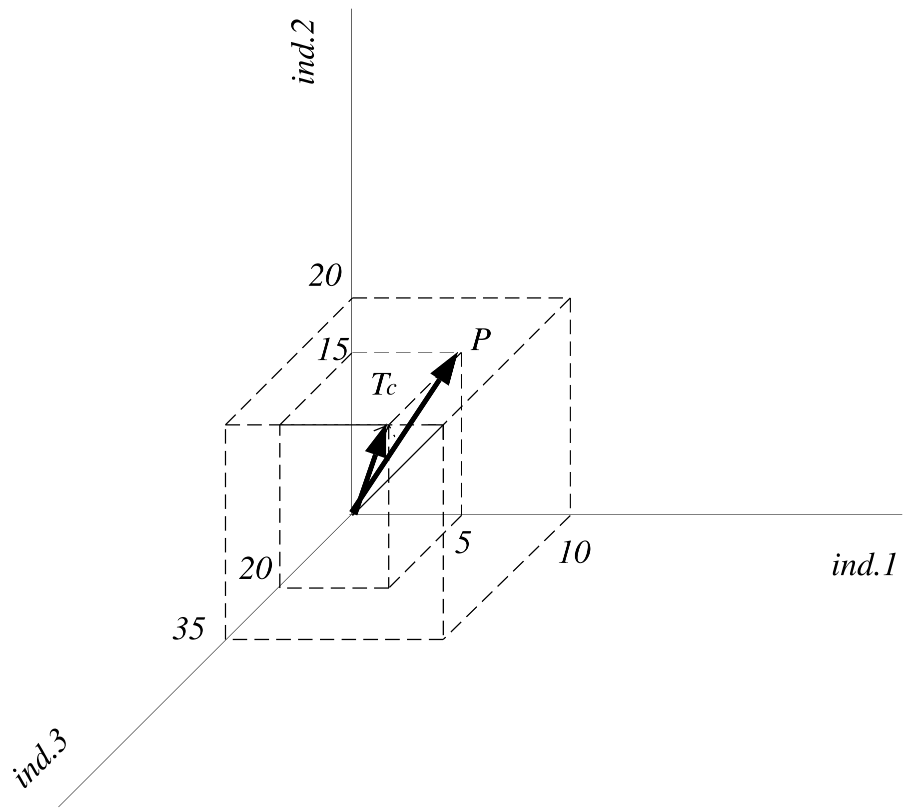
- $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ trois variables
- $\widehat{X_J}$, $\widehat{Y_J}$ et $\widehat{Z_J}$ les projections orthogonales de X, Y et Z sur J.
- X', Y' et Z' les variables X, Y et Z centrées.

Exemple : Soit le tableau suivant des pressions et des températures (degrés centigrade et Fahrenheit).

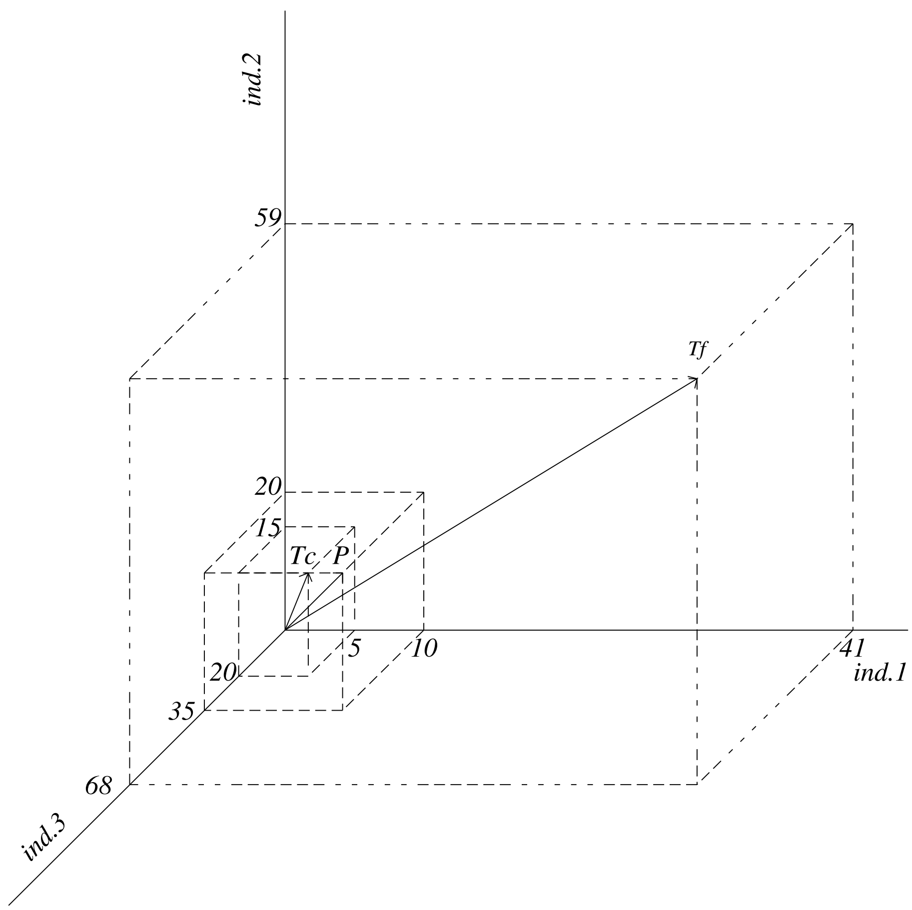
	P	T_c	T_f
$ind.1$	10	5	41
$ind.2$	20	15	59
$ind.3$	35	20	69

Quel angle exprime la liaison entre la pression et la température ?

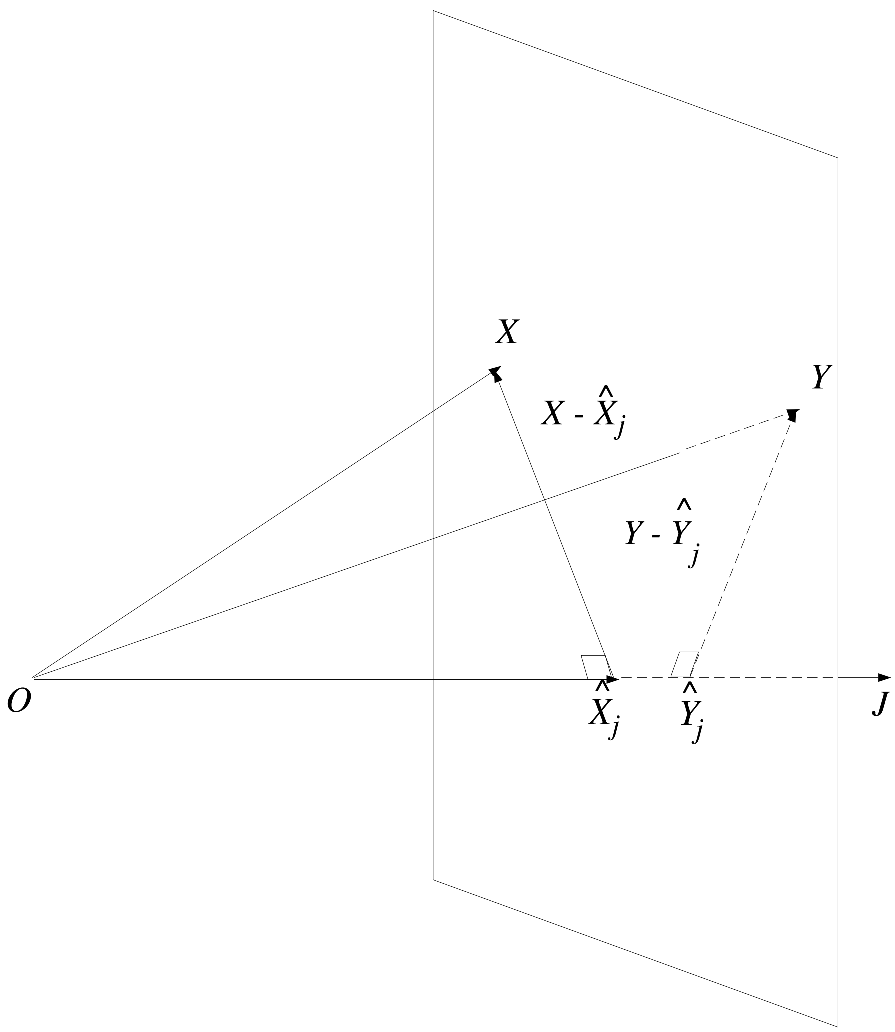
La liaison pression-température



La liaison pression-température



Notion de corrélation
L'espace des variables centrées



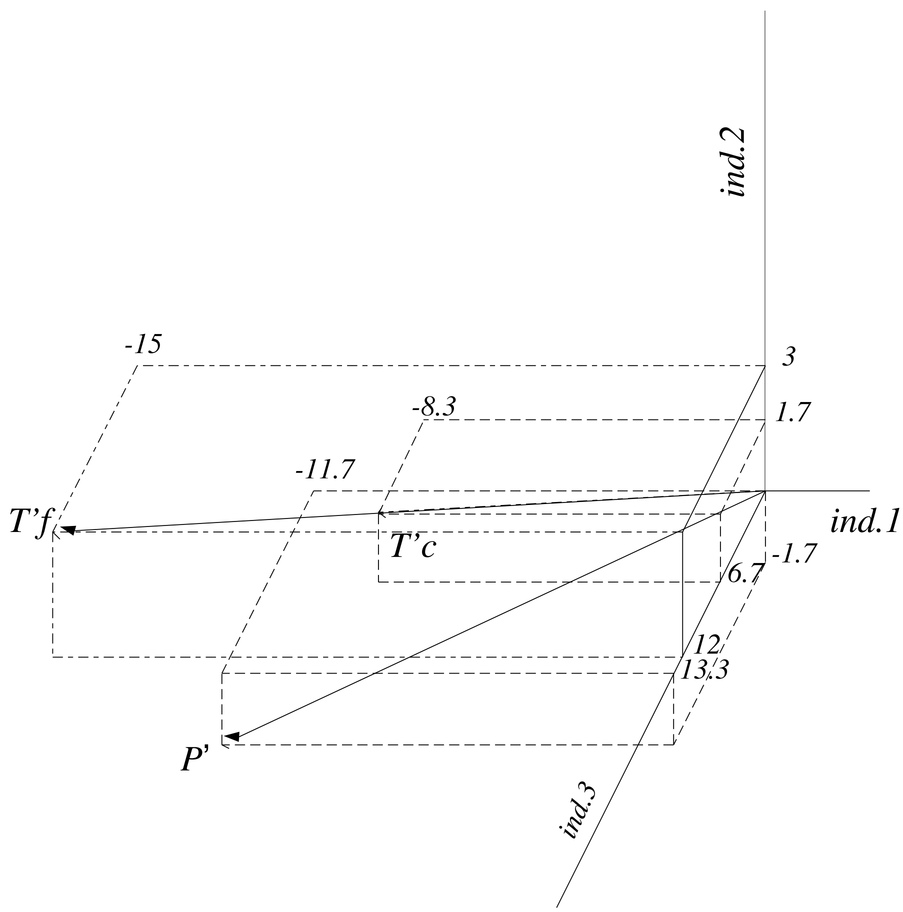
La liaison pression-température
L'espace des variables centrées

	P	T_c	T_f
$ind.1$	10	5	41
$ind.2$	20	15	59
$ind.3$	35	20	69

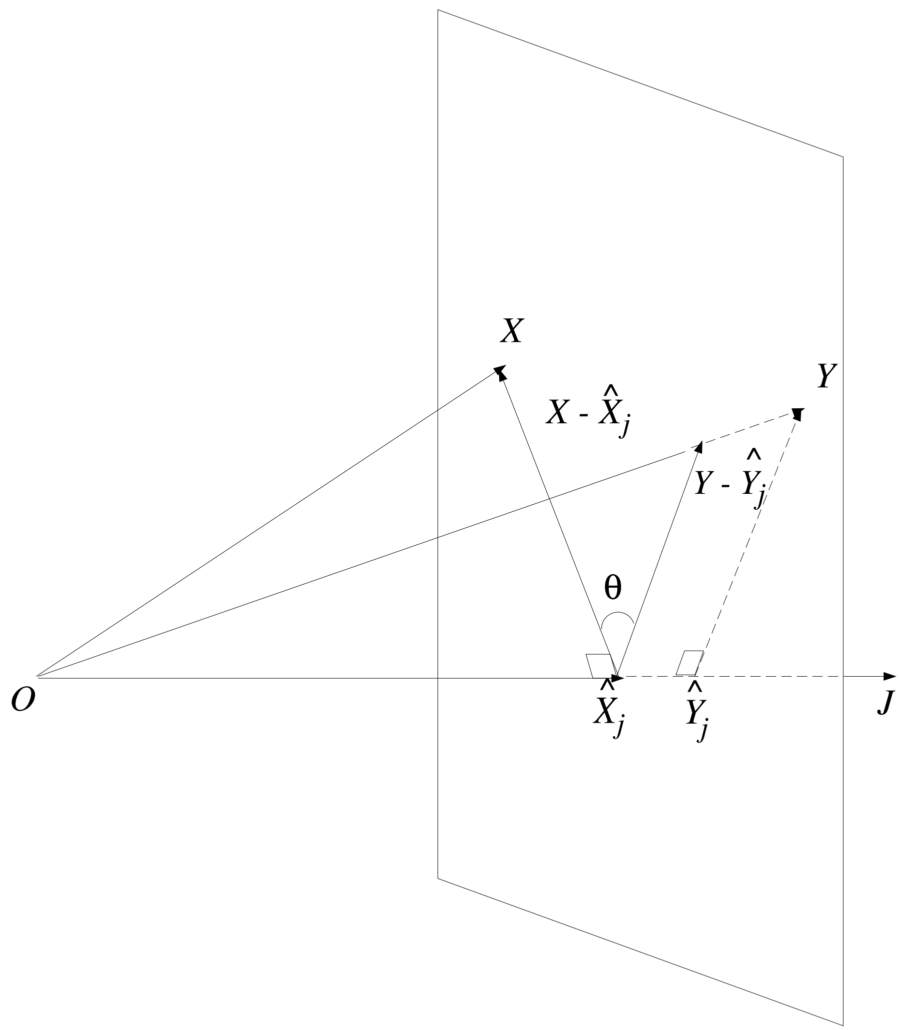
Centrons les variables

	P'	T'_c	T'_f
$ind.1$	-11.7	-8.4	-15
$ind.2$	-1.7	1.7	3
$ind.3$	13.4	6.7	12

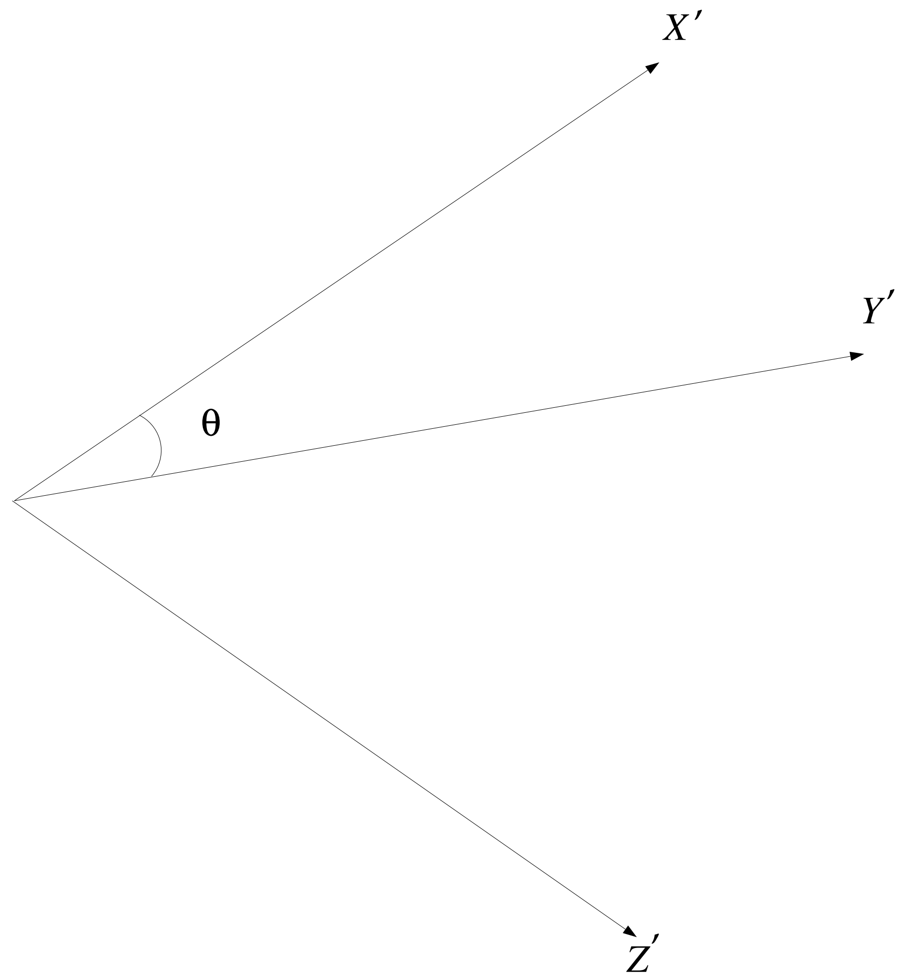
La liaison pression-température
L'espace des variables centrées



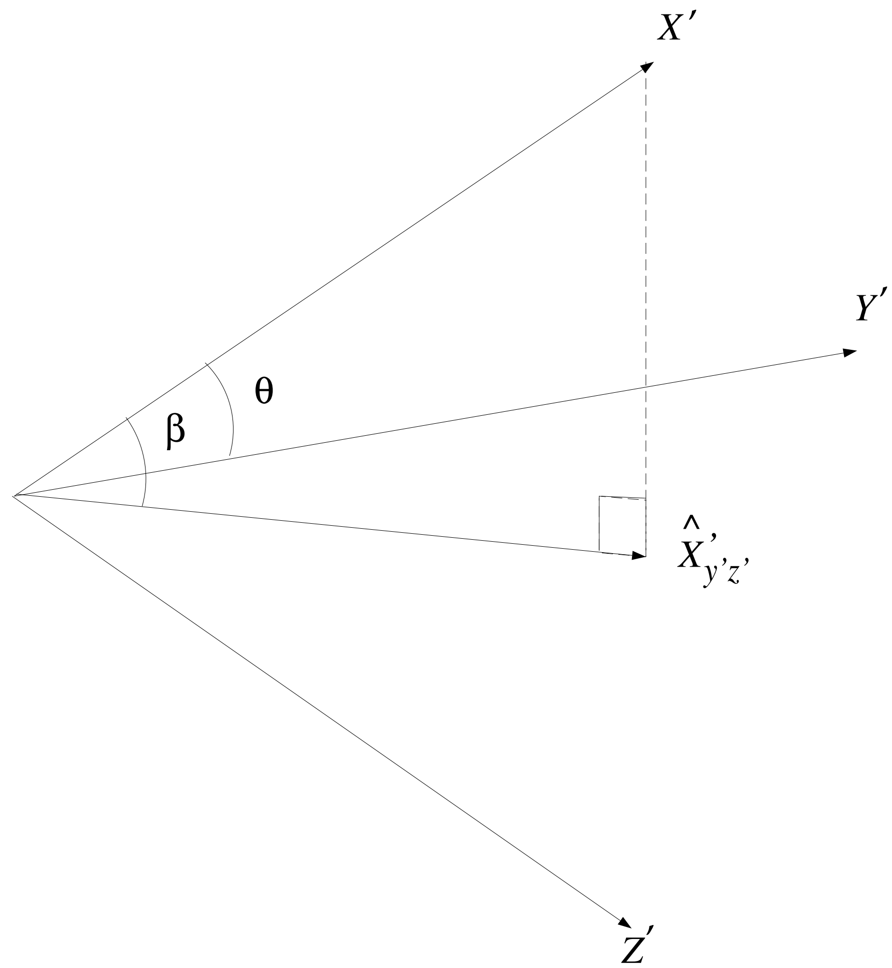
Notion de corrélation



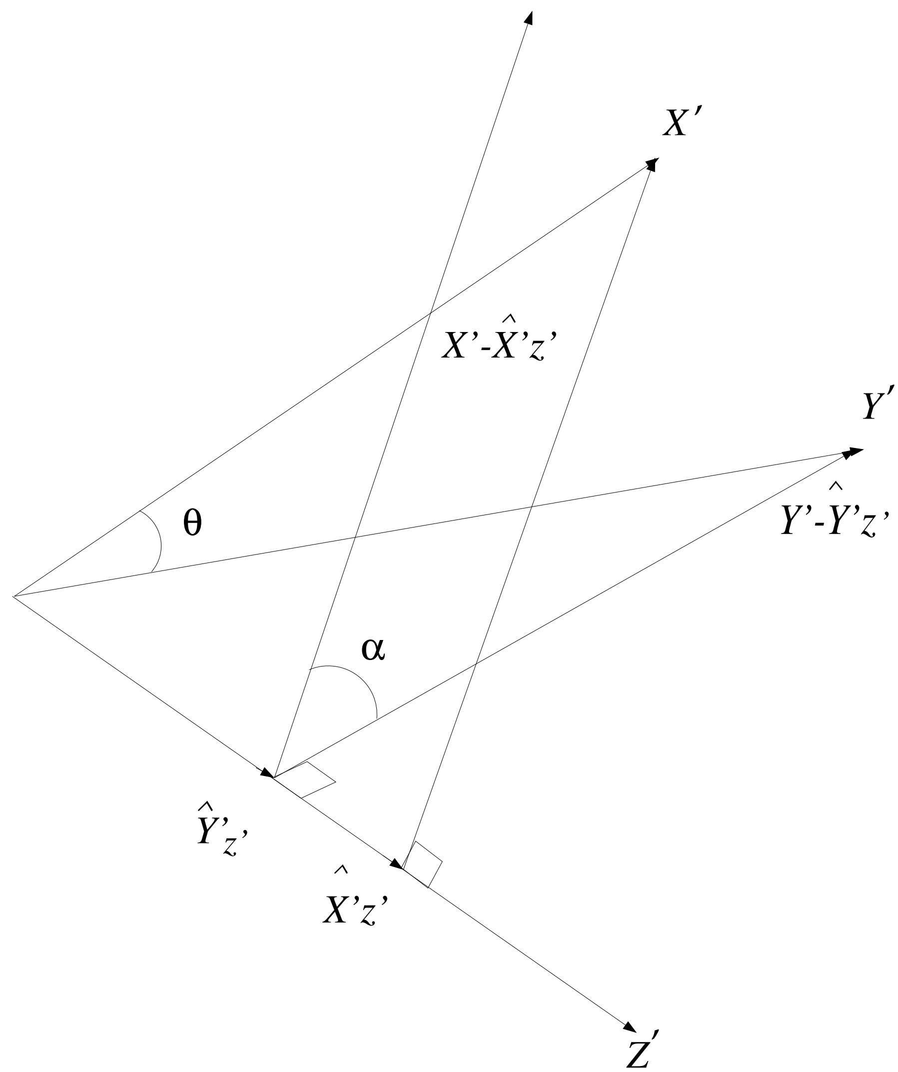
Notion de corrélation



Notion de corrélation



Notion de corrélation



3 LES TESTS STATISTIQUES
Comparaison de deux populations

– P_1 et P_2 deux populations de moyenne μ_1 et μ_2

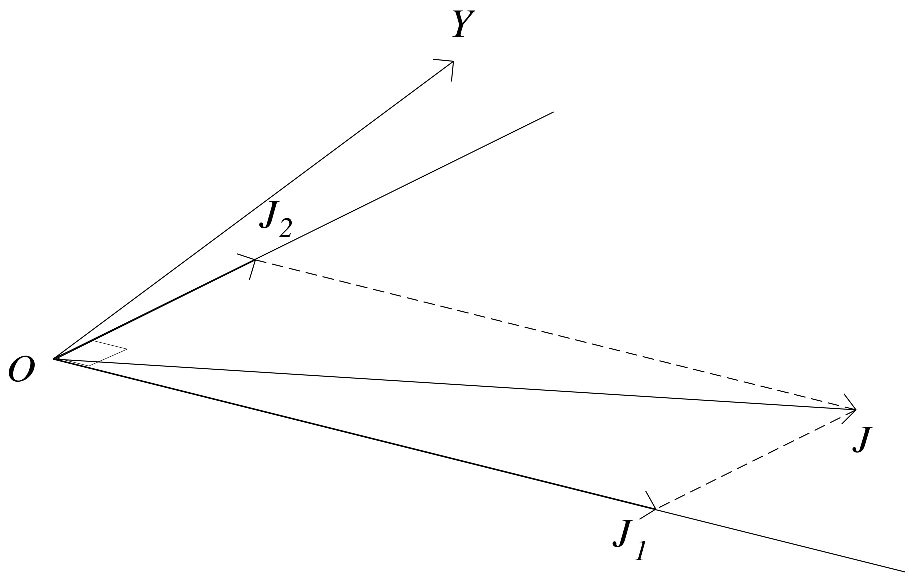
– Y le vecteur des observations (n_1 pour P_1 et n_2 pour P_2)

– J_1 et J_2 deux vecteurs orthogonaux tels que :

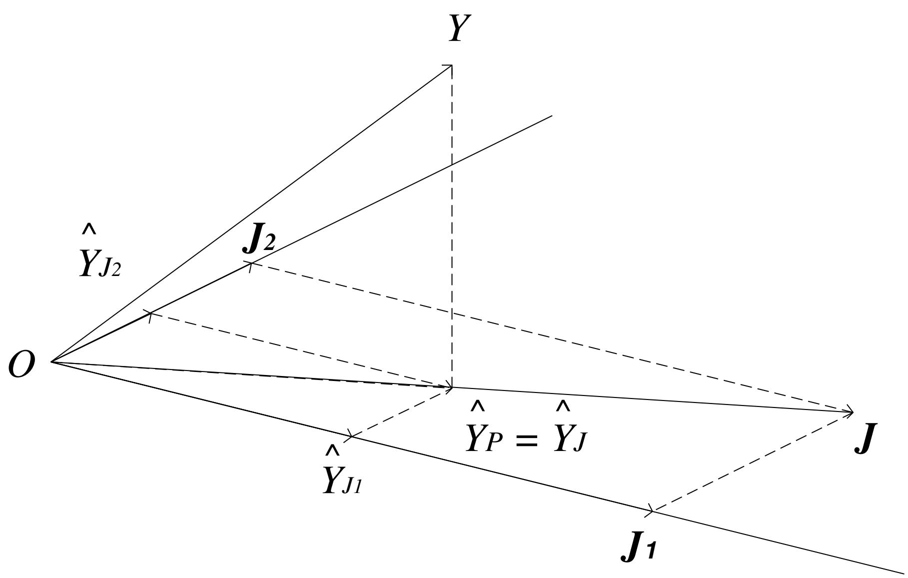
$$< J_1, J_2 >= 0 \text{ et } J = J_1 + J_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{bmatrix} \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

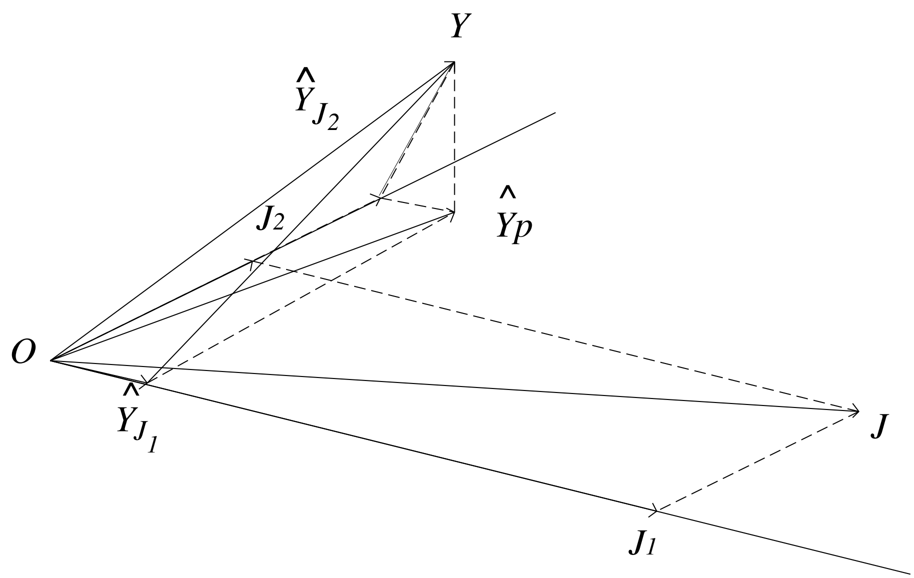
Comparaison de deux populations



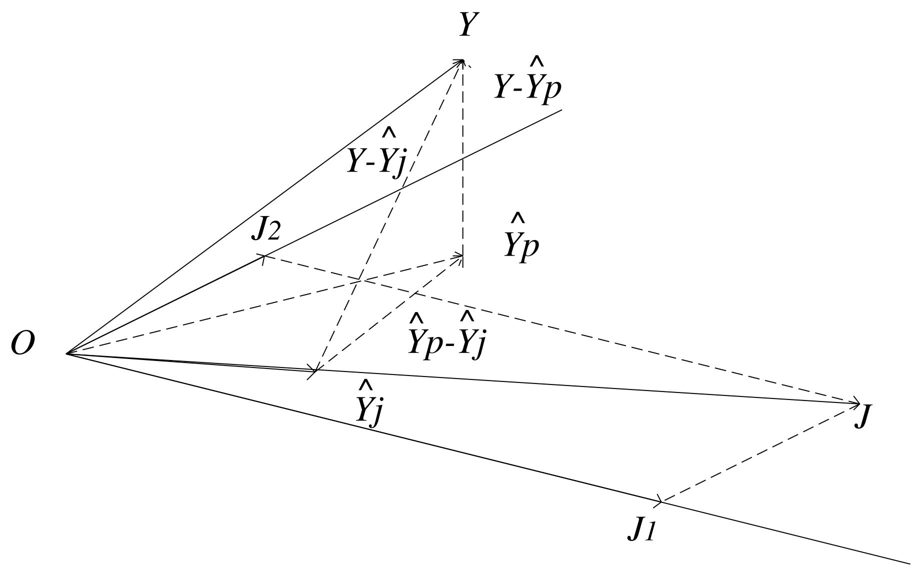
Comparaison de deux populations
(Les deux populations sont identiques)



Comparaison de deux populations
(Les deux populations sont différentes)



Comparaison de deux populations
(Notion de test)



4 Résumé

	Représentation géométrique	**Expression statistique**
Vecteur X	segment orienté de O vers X	$x_1, \cdots, x_n$
Vecteur J	segment orienté de O vers J	$1, \cdots, 1$
Vecteur $\widehat{X}_J = \bar{x}J$	Projeté orthogonal de X sur J	moyenne
$\lvert X - \widehat{X}_J \rvert^2$	Carré distance entre X et $\widehat{X}_J$	$(n-1)\times$ variance

4 Résumé

	Représentation géométrique	**Expression statistique**
$\dfrac{< X - \widehat{X_J}, Y - \widehat{Y_J} >}{\lvert X - \widehat{X_J}\rvert \lvert Y - \widehat{Y_J}\rvert}$	Cosinus angle $X - \widehat{X_J}$ et $Y - \widehat{Y_J}$	Corrélation simple entre X et Y
$\dfrac{\dfrac{\lvert\widehat{Y_P} - \widehat{Y_J}\rvert^2}{1}}{\dfrac{\lvert Y - \widehat{Y_P}\rvert^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	Rapport carrés distances pondérées par d.d.l.	Fisher à 1 et $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (si X et Y normales)

PARTIE III

1 MATRICES

- **Ranger des données**
- **Traiter des données**
- **Faire une transformation**

2 MATRICES PARTICULIERES

- **Matrice carrée**
- **Matrice nulle**
- **Matrice diagonale**
- **Matrice identité** I
- **Matrice** J
- **Matrice transposée :** A' **transposée de** A
- **Matrice symétrique**

PARTIE III

3 OPERATIONS MATRICIELLES

- **Addition**
- **Multiplication par un scalaire**
- **Multiplication de deux matrices**
- **Transposée d'un produit de matrices**
- **Trace**
- **Matrice idempotente**
- **Matrice inverse**
- **Notion de rang**
- **Déterminant d'une matrice**

1 MATRICES
Ranger des données

- **Exemple :** âge, poids et taille de 5 individus

$$\begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix}$$

une ligne = un individu
une colonne = une variable

Matrice (5×3)

- **Notation**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \qquad A_{(n \times p)} \; ou \; A_{(n,p)}$$

$$A = [a_{ij}]_{i=1,\cdots n \text{ et } j=1,\cdots p}$$

Traiter des données

– **Exemple :** âge, poids, taille de 5 femmes

$$F = \begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix} \qquad F_{(5\times3)}$$

– **Exemple :** âge, poids, taille de 5 hommes

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 82 & 187 \\ 20 & 65 & 179 \\ 25 & 78 & 175 \\ 22 & 78 & 175 \\ 22 & 68 & 180 \\ 30 & 70 & 187 \end{bmatrix} \qquad H_{(5\times3)}$$

– Rechercher les liaisons âge, poids, taille chez les femmes et chez les hommes.

Comparer les résultats.

Faire une transformation

Exemple : Faire correspondre à chaque homme X d'âge (x_1), de poids (x_2) et de taille (x_3) :

- Un indice y_1 de risque de cancer.
- Un indice y_2 de risque d'infarctus du myocarde.

– Le produit de la matrice R des risques par unité d'âge, de poids et de taille par X permet d'obtenir le vecteur Y des risques y_1 et y_2.

$$Y_{(2\times 1)} = R_{(2\times 3)} \times X_{(3\times 1)}$$

2 MATRICES PARTICULIERES

Matrice carrée : $M_{(n\times n)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice nulle : $a_{ij} = 0 \; \forall \, i, \; j$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale : $a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice identité I **:** $a_{ii} = 1 \; \forall i$ et $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice J **:** $a_{ij} = 1 \; \forall \, i, \, j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice transposée : A' transposée de A $\;(a'_{ij} = a_{ji} \; , \; \forall \, i, \, j)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique : $a_{ij} = a_{ji}\ ,\ \forall\, i,\ j$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée ($A = A'$).

On n'écrit en général que la partie triangulaire haute ou basse. Soit :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 OPERATIONS MATRICIELLES

Addition

Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ des matrices de **même dimension**.
La somme de A et de B est une matrice C telle que :

$$C = A + B \text{ a pour éléments : } c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

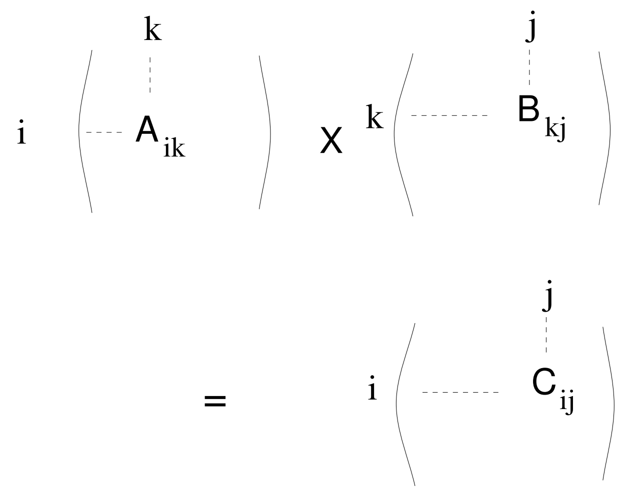
Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+6 \\ 5+3 & 4+1 \\ 8+2 & 4+5 \\ 3+2 & 2+2 \end{bmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad = \qquad ?$$

Multiplication de deux matrices



$A_{(n \times p)} \qquad B_{(p \times m)} \qquad \rightarrow \qquad C = A \times B$

Les éléments de $C_{(n \times m)}$ sont :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Multiplication de deux matrices

Exercices : effectuer les produits

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Transposée d'un produit de matrices

$$(A.B)' = B'.A'$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'.A' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (A.B)'$$

Trace

$$\text{Donner la trace de } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Tr(A) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Matrice idempotente

Une matrice $A_{(n \times n)}$ est idempotente si :

$$AA = A$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice inverse

On appelle matrice inverse de A la matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

si A^{-1} existe, elle est unique, A est dite non singulière
si A^{-1} n'existe pas, A est dite singulière

Exemple : Inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ 2a+c & = & 0 \\ 2b+d & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse d'une matrice diagonale ?

NOTION DE RANG

Nombre de vecteurs linéairement indépendants

Vecteurs-ligne (si $n < p$)

Vecteurs-colonne (si $n > p$)

Si tous vecteurs sont linéairement indépendants alors la matrice est de plein rang.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} Rang = 3 \\ \Longleftrightarrow \text{matrice} \\ \text{de plein rang} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad Rang = 2$$

DETERMINANT D'UNE MATRICE

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

on l'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$AX = B$$

Si A est inversible alors le système d'équations admet une solution :

$$X = A^{-1}B$$

Pour savoir si A^{-1} existe, on calcule son déterminant.

$$det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1} \text{ existe.}$$

Calcul du déterminant

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) = \; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 24 + 25 + 4 - 4 - 30 - 20 = -1$$

$$A \text{ non singulière} \iff \begin{array}{l} \text{1- } A \text{ de plein rang} \\ \text{2- } det(A) \neq 0 \\ \text{3- } A^{-1} \text{ existe} \end{array}$$

PARTIE IV

VALEURS ET VECTEURS PROPRES

1 Notion de valeur et de vecteur propre

- **Exemple : Symétrie par rapport à la** *1ère* **bissectrice**
- **Généralisation**

2 Propriétés

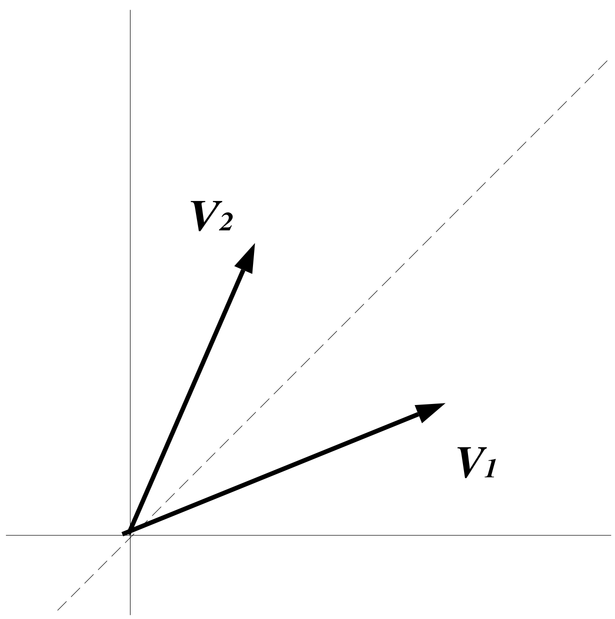
3 Exercices

- **Symétrie par rapport à la** *1ère* **bissectrice**

1 Notion de valeur et de vecteur propre
Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

Soit l'application $f_1 \; : \; I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$

$$f_1 \; : \; V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

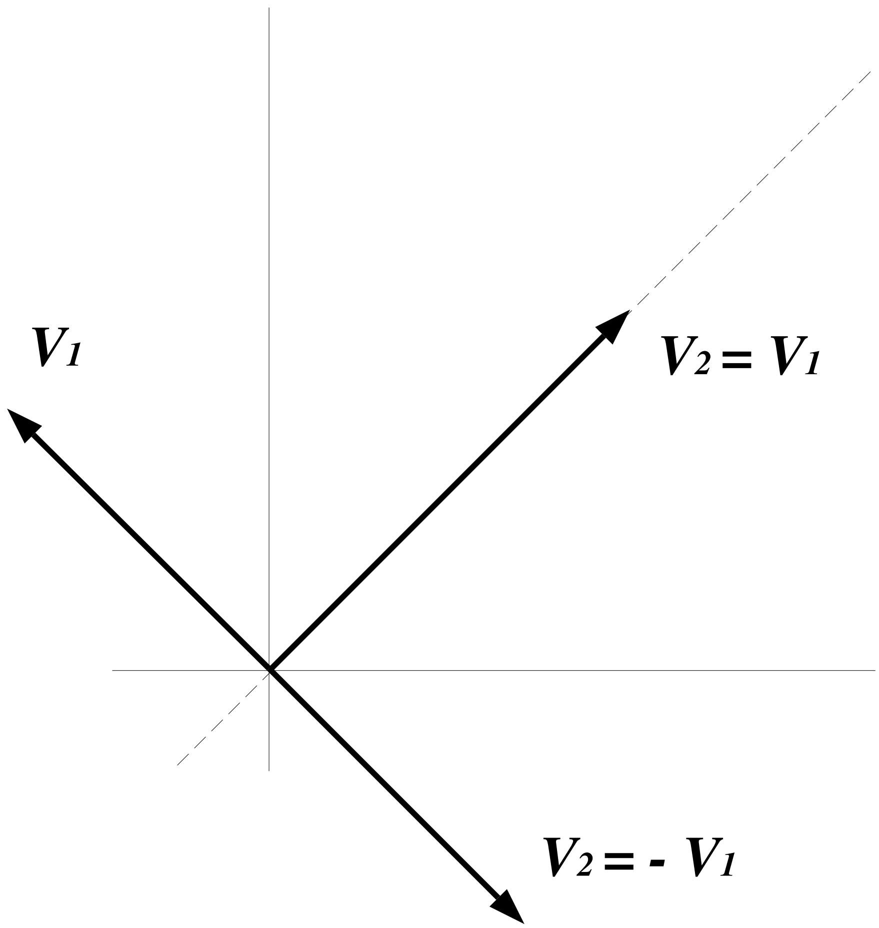


La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Quels sont les vecteurs V_1 non nuls du plan tels que :

$$A_1.V_1 \;=\; \lambda V_1 \text{ avec } \lambda \in I\!R \; ?$$

Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice



Généralisation

Soit :

- E un espace vectoriel de dimension n.
- A matrice.

$V \in E$, non nul, est un **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $A.V = \lambda V$.

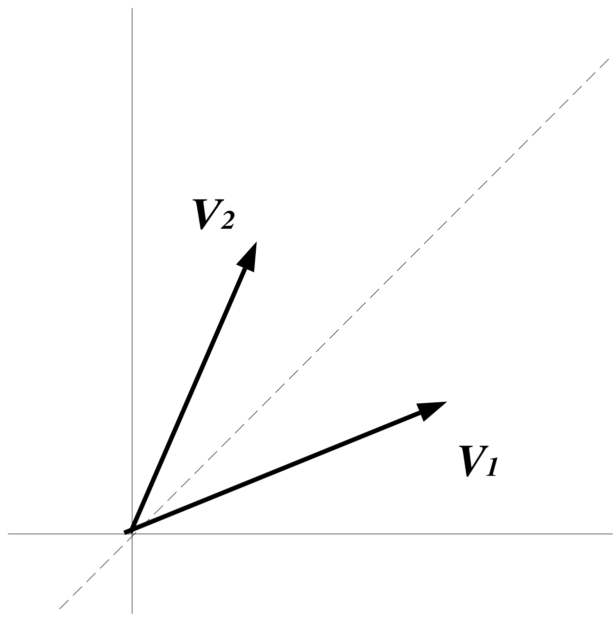
2 Propriétés

1. A une matrice carrée A d'ordre n sont associées au plus n valeurs propres réelles.
2. Les valeurs propres sont les racines d'un polynôme de degré n appellé **polynôme caractéristique**. Elles satisfont à l'équation : $\det(A - \lambda I) = 0$ avec I = matrice identité.
3. Si A est une matrice **symétrique** (cas des matrices d'inertie et de variance-covariance) :
   - toutes les racines du polynôme caractéristique sont **réelles**.
   - Si toutes les racines sont positives la matrice A est dite **définie positive**.
   - Si λ_i et λ_j sont deux valeurs propres distinctes les vecteurs propres associés sont **orthogonaux**.

3 Exercices
Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

Soit l'application $f_1 \ : \ I\!R^2 \to I\!R^2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{avec} \begin{cases} x_2 = y_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$



La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rechercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A_1?

PARTIE V

MAXIMISATION-DERIVATION

1 Recherche des extrema

- **Extremum d'une fonction**

2 Dérivation

- **Dérivée première**
- **Exemple**
- **Dérivée seconde**

3 Recherche des extrema

- **Exemples**

Extremum d'une fonction d'une variable

$$f : [a, b] \longrightarrow I\!R$$

1. dérivable deux fois.
2. Calcul de $f'(x)$
   f admet un extremum en $x_0 \in]a, b[\Longrightarrow \ f'(x_0) = 0.$
3. Calcul de $f"(x)$

$$\begin{cases} f(x_0) \text{ est minimum si } f''(x_0) > 0 \\ f(x_0) \text{ est maximum si } f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Contre exemples :

- $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, pas d'extremum en 0
- $f(x) = x^4 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$, minimum en 0
- $f(x) = x$ sur [0,1] , 0 est un minimum mais $f'(0) \neq 0$
- $f(x) = |x|$, 0 est un minimum mais f non dérivable en 0

2 Dérivation
Dérivée première

$$f \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow f(X)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Exemple

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow f(X) = a_1 x_1^2 + a_2 \sin(x_2) + a_3$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 2a_1 x_1 \\ a_2 \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

Quelques dérivées premières

Soient

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

– Si pour tout X, $f(X) = B'.X = X'.B$ alors :

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = B$$

– Si pour tout X, $f(X) = \text{Constante}$, alors :

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quelques dérivées premières

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

soit

$$f(X) = [x_1 x_2 \cdots x_n] \, . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X'.X$$

alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \frac{\partial (X'.X)}{\partial X} = 2.X$$

Quelques dérivées premières

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_i.x_j$$

$$\begin{aligned} f(X) = \quad & a_{11}.x_1^2 + a_{12}.x_1.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_1.x_n \\ & + a_{21}.x_2.x_1 + a_{22}.x_2^2 + \cdots + a_{2n}.x_2.x_n \\ & + \cdots \ + a_{nn}.x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(X) = [x_1 x_2 \cdots x_n] \,.\, \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \,.\, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$f(X) = X'.A.X$$

Quelques dérivées premières

$$f(X) = X'.A.X$$

alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \frac{\partial (X'.A.X)}{\partial X} = A.X + A'.X$$

si de plus A est symétrique $(A = A')$ alors

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = 2.A.X$$

Dérivée seconde

Quand $f(X)$ est une forme quadratique

$$f(X) = X'.A.X$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = A.X + A'.X$$

alors

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \frac{\partial(A.X + A'.X)}{\partial X} = A' + A$$

si de plus A est symétrique $(A = A')$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = 2.A$$

C'est une matrice appelée :
matrice **HESSIENNE** (H)

3 Recherche des extrema

$f \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fois dérivable

vecteur gradient : $\begin{bmatrix} \vdots \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} \\ \vdots \end{bmatrix}$ et matrice hessienne : $\left[\dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$

Condition nécessaire pour obtenir un extremum de $f(X)$ au point $X = X_0$.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} \\ \vdots \end{bmatrix}_{X=X_0} = 0$$

Condition suffisante pour avoir un :

1. **Maximum :** matrice hessienne évaluée en X_0 définie négative.
2. **Minimum :** matrice hessienne évaluée en X_0 définie positive.

Exemples

Déterminer les extrema s'ils existent :

1. Soit f une application de $I\!R^2$ dans $I\!R$:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

2. Soit f une application de $I\!R^2$ dans $I\!R$:

$$f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 7$$

3. Soit f une application de $I\!R^2$ dans $I\!R$:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Exemple 1

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie positive, le point $(0,0)$ est un minimum.

Exemple 2

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+2 \\ -2y+4 \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (1,2)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie négative , le point $(1,2)$ est un maximum.

Exemple 3

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Calcul de la matrice hessienne :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne n'est ni définie positive ni définie négative.

Application : Modèle linéaire

Construction de la droite des moindres carrés sur une régression linéaire simple

équation de la régression :

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i \quad i = 1, \ldots n$$

On cherche a et b minimisant $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$

$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$

on pose $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2]$

Application : Modèle linéaire (suite)

Calcul du gradient :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} [-2y_i x_i + 2x_i(ax_i + b)] \\ \sum_{i=1}^{n} [-2y_i + 2(ax_i + b)] \end{bmatrix}$$

Recherche d'un extremum :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial b} \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b) = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) = 0 \end{cases}$$

Application : Modèle linéaire (suite)

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i + a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1} x_i = 0 \\ -n\bar{Y} + na\bar{X} + nb = 0 \end{cases}$$

Calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - 2x_i\bar{X} + \bar{X}^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i - x_i\bar{Y} - y_i\bar{X} + \bar{X}\bar{Y}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y} - n\bar{X}\bar{Y} + n\bar{X}\bar{Y} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y} \end{aligned} \tag{2}$$

Application : Modèle linéaire (suite)

En utilisant les équations (1) et (2), le système devient :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})-n\bar{X}\bar{Y}+a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2+an\bar{X}^2 \\ \qquad +nb\bar{X}=0 \\ \qquad b=\bar{Y}-a\bar{X} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})-n\bar{X}\bar{Y}+a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2+an\bar{X}^2 \\ \qquad +n(\bar{Y}-a\bar{X})\bar{X}=0 \\ \qquad b=\bar{Y}-a\bar{X} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})} \\ b=\bar{Y}-a\bar{X} \end{cases}$$