3 Formalisation des concepts

3.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel de dimension p sur le corps des réels $\mathbb{R}$ est une construction mathématique dont les éléments sont des *vecteurs*. Il est défini par deux opérations :

- *L'addition*. Soient U et V deux vecteurs de l'espace, $W = U + V$ est unique et appartient à l'espace.
- *La multiplication par un scalaire*. Soit U un vecteur et λ un nombre réel (*scalaire*), $Z = \lambda U$ est unique et appartient à l'espace.

L'addition et la multiplication par un scalaire obéissent aux règles suivantes :

- *L'addition*

  1- Il existe un vecteur nul (noté ϕ) tel que :

  $\phi + V = V + \phi = V$ pour tout V.

  2- Pour chaque V, il existe un vecteur opposé $-V$ tel que :

  $V + (-V) = \phi$

  3- Le vecteur addition est commutatif :

  $U + V = V + U$ pour tout U et tout V.

  4- L'addition est associative :

  $(V + U) + W = V + (U + W)$ pour tout U, V et W.

- *La multiplication par un scalaire*

  Pour tout scalaire α, β et tout vecteur U, V, les multiplications de vecteurs par des scalaires obéissent à :

  $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$.

  $(\alpha + \beta)V = \alpha V + \beta V$.

  $(\alpha\beta)V = \alpha(\beta V)$.

  $\mathbf{1}V = V$ (où $\mathbf{1}$ est la constante $\mathbf{1}$).

- De ces axiomes de base on peut déduire des règles de travail telles que :

$0V = \phi$ pour tout V.

$\alpha\phi = \phi$ pour tout α.

$(-1)V = -V$ pour tout V.

3.2 Sous espace vectoriel

Un sous ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel est un *sous espace vectoriel* si pour les opérations définies sur tout l'espace il forme un espace vectoriel (exemple : le sous espace dont le seul élément est ϕ).

3.3 Combinaison linéaire

Le vecteur V est une *combinaison linéaire* des vecteurs $U_1, U_2, \cdots, U_r$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ tels que :

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_r U_r$$

3.4 Indépendance linéaire

Les vecteurs U_1, U_2, ..., U_r sont dits *linéairement indépendants* si la relation :

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_r U_r = \phi$$

implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Autrement, ils sont linéairement dépendants et au moins l'un d'entre eux peut être exprimé comme une combinaison des autres.

3.5 Base d'un espace vectoriel

1- Une *base* d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent l'espace dans sa totalité.

2- Tout vecteur est défini de façon *unique* comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base donnée.

3- Un espace vectoriel a toujours une base (elle n'est pas unique).

4- Chaque base a le *même* nombre d'éléments. Si ce nombre est fini, c'est la *dimension* de l'espace.

3.6 Le langage géométrique

Souvent il est naturel d'abandonner le langage des espaces vectoriels et de lui préférer celui de la géométrie dans lequel on associe bijectivement un *point* à un vecteur ; un *hyperplan* de dimension r passant par l'origine à un sous espace P (cf. § 2.1.3) de dimension r (la droite et le plan sont des hyperplans de dimensions 1 et 2 respectivement). Dans ces conditions, une base $B_1, \ B_2, \ \cdots, \ B_p$ détermine un système de coordonnées au sens de la géométrie analytique. Les segments de droites OB_1, OB_2, $\cdots$, OB_p sont les axes de coordonnées et le point $U = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_p B_p$ a pour coordonnées $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_p$.

Considérons un plan de la géométrie ordinaire (la feuille de papier). On veut représenter géométriquement un espace vectoriel de dimension 2 dans la base B_1, B_2. Pour cela, on choisit un point du plan que l'on appelle *origine*. Deux droites du plan sont alors choisies pour représenter les axes déterminés par OB_1 et OB_2. Avec ces choix, la correspondance entre les vecteurs de l'espace et les points du plan est définie. Pour construire le point correspondant au vecteur $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ on a seulement besoin des notions de multiplication d'un segment par un scalaire et de translation d'un segment parallèlement à lui-même (figure 3.1). Multiplication d'un segment par un scalaire et translation sont les expressions géométriques des opérations fondamentales sur les vecteurs (multiplication par un scalaire et addition).

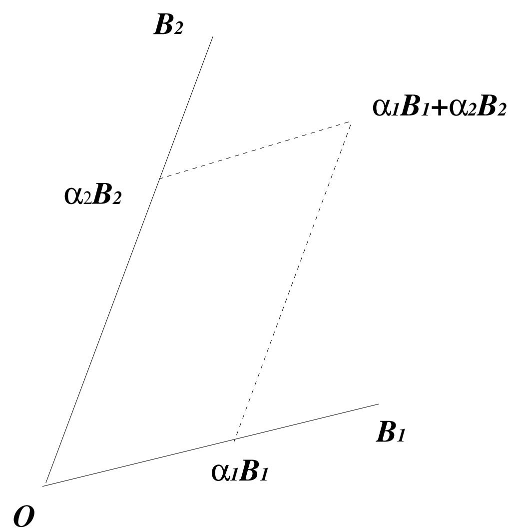

Figure 3.1 : Construction du vecteur $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$.

Ce qui vient d'être dit peut être généralisé à plus de deux dimensions.

Dans ce contexte de représentation, l'origine O est un sous espace vectoriel de dimension 0, toute droite passant par l'origine est un sous espace vectoriel de dimension 1. Une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas un sous espace vectoriel, c'est un sous espace *affine*.

3.7 Sous espace affine

Soit E un espace vectoriel, E_1 un sous espace vectoriel de E et M un élément quelconque de E. L'ensemble des vecteurs MV_2 colinéaires aux vecteurs OV_1 de E_1 appartiennent au sous espace affine E_2. En d'autres termes, le sous espace affine E_2 se déduit du sous espace vectoriel E_1 par une *translation*. Sur la figure 3.2 sont représentés, dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension 2, le sous espace vectoriel E_1 et le sous espace affine E_2.

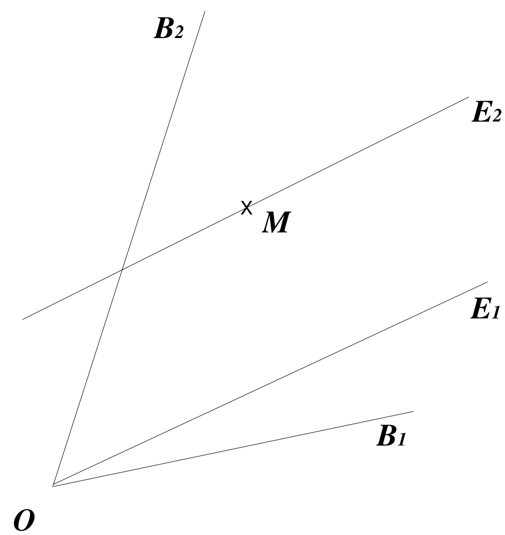

Figure 3.2 : Sous espace vectoriel (E_1) et sous espace affine (E_2) de l'espace vectoriel E de dimension 2.

Les concepts d'espace vectoriel et d'espace affine sont différents. Cependant, on peut identifier un espace affine, dans lequel on a choisi une origine, à un espace vectoriel.

3.8 Décomposition en somme directe

Une base $B = [B_1,\ B_2, \cdots,\ B_p]$ d'un espace vectoriel E est telle que tout vecteur V de E s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i B_i$. Le vecteur $\alpha_i B_i$ appartient au sous espace vectoriel E_i engendré par le vecteur de base B_i.

On dit que E est *somme directe* des sous espaces vectoriels $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_p$ et l'on écrit que :

$$E \ = \ E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

En particulier, quand E est somme directe des sous espaces vectoriels E_1 de dimension p_1 et E_2 de dimension p_2 tels que $E = E_1 \oplus E_2$ $(p = p_1 + p_2)$, on dit que E_1 et E_2 sont *complémentaires*.

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le plan P et la droite D non contenue dans P. La droite D et le plan P sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ respectivement de dimensions 1 et 2 (figure 3.3).

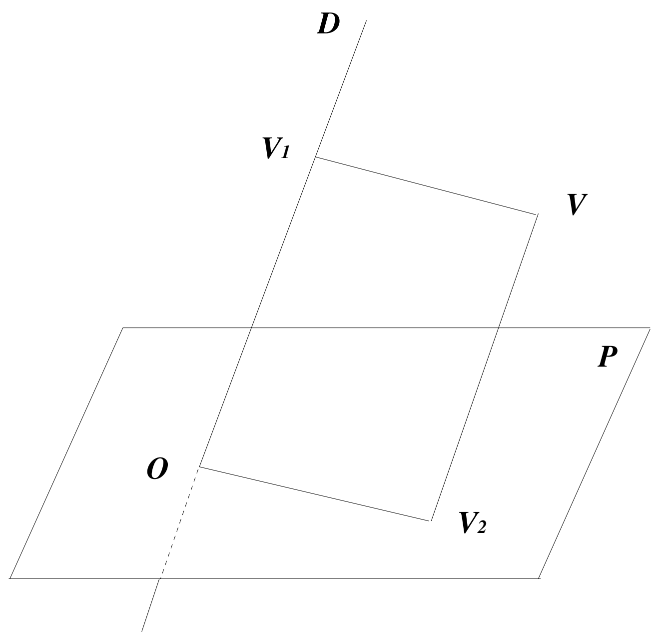

Figure 3.3 : Représentation dans $\mathbb{R}^3$ des sous espaces complémentaires D et P.

$$\mathbb{R}^3 \ = \ D \oplus P$$

De façon unique, on a la décomposition $V = V_1 + V_2$ avec $V_1 \in D$ et $V_2 \in P$. Nous avons déjà rencontré ce type de décomposition au paragraphe 2.1.1.

3.9 Exemples

3.9.1 Exemple 1 : représentations dans l'espace des variables

Soit T la variable température exprimée en degrés centigrades.

1- Les températures exprimées en degrés centigrades, en degrés Fahrenheit ($32 + 1.8T$) et en degrés Kelvin ($T - 273$) sont-elles dans le même espace des variables ?

2- Si tel n'est pas le cas, comment peut-on définir l'espace des variables pour qu'il contienne les trois variables températures ?

3- On suppose que chaque vecteur température est à n composantes.

- 3.1- Comment peut-on représenter les moyennes, les sommes des carrés d'écart à la moyenne et les corrélations de ces expressions différentes de la température ?
- 3.2- Quelle est la dimension du sous espace des variables centrées ?
- 3.3- Qu'est-ce qui caractérise les variables centrées dans ce sous espace ?

Réponses

1- Non car on ne peut pas passer d'une expression de la température à une autre par le jeu des définitions données.

2- Il faut ajouter à l'espace des variables la variable T_0 dont la valeur observée est toujours égale à 1. Ainsi, les températures en degrés centigrades, Fahrenheit et Kelvin s'écrivent :

$$0T_0 + 1T,\ 32T_0 + 1.8T\ et\ -273T_0 + T$$

3.1- Moyennes : Projections des vecteurs température sur J. Somme des carrés d'écart à la moyenne et corrélations : Projections sur le sous espace des variables centrées orthogonal à J.

3.2- Dimension du sous espace des variables centrées : $n - 1$.

3.3- Caractéristique des variables centrées : la colinéarité.

3.9.2 Exemple 2 : base d'un espace vectoriel

En première approximation, la valeur d'un engrais est caractérisée par sa concentration dans les trois principaux éléments fertilisants N, P, K (Cailliez et Pages, 1976 : pp 48). On désigne les engrais en indiquant les quantités d'éléments fertilisants dans l'ordre azote, acide phosphorique et potasse contenus dans 100 kilogrammes d'engrais. Les diverses compositions possibles d'engrais forment un espace vectoriel de dimension 3. Parmi les listes d'engrais ci-après, quelles sont celles qui forment une base de cet espace vectoriel ?

1- (10,0,0), (0,12,0) et (0,0,20)

2- (20,20,0) et (0,12,12)

3- (0,12,12), (0,12,18) et (0,20,10)

4- (3,6,9), (4,8,8) et (4,15,0)

5- (10,10,10), (15,15,15) et (3,6,9)

Réponse

En appliquant la définition : 1 et 4 forment une base de l'espace vectoriel.

3.9.3 Exemple 3 : indépendance linéaire

Supposons (Cailliez et Pages, 1976 : pp 49) qu'il n'existe que trois sociétés dont les actions sont cotées en Bourse :

1- La Compagnie Egyptienne des Automobiles (C.E.A)

2- Les Industries Navales de la Region Aquitaine (I.N.R.A)

3- La Compagnie de Navigation Romande Suisse (C.N.R.S)

Un portefeuille formé des actions de ces diverses sociétés est un point d'un espace vectoriel si on admet :

1- La possibilité de posséder n'importe quelle fraction de titre.

2- La possibilité de devoir, aussi bien que de posséder, une action.

La question qu'on peut se poser est de savoir s'il est plus avantageux de "boursicoter" soi-même (en achetant ou en vendant, suivant ses pronostics sur les cours, des actions de chacune des trois sociétés) ou d'acheter des titres de sociétés d'investissements. Supposons (tableau 3.1) qu'on trouve sur le marché six sociétés d'investissements dont les portefeuilles sont composés des titres des trois grandes compagnies dans les proportions ci-après (en %).

	C.E.A	I.N.R.A	C.N.R.S
Compagnie pour la **S**écurité des **I**nvestissements	40	40	20
Centrale d'**I**nvesti**S**seurs	70	10	20
Société **I**nterprofessionnelle des **C**ommerçants	30	50	20
Société **C**entrale d'**I**nvestissements	60	30	10
Intergroupe des **S**ociétés de **C**rédit	50	30	20
Institut **C**oopératif de **S**ouscription	50	20	30

Tableau 3.1 : Sociétés d'investissements dont les portefeuilles sont composés des titres de trois grandes compagnies (C.E.A, I.N.R.A, C.N.R.S).

1- Qu'est-ce qui peut bien pousser le "boursicoteur" à rechercher trois sociétés d'investissements dont les portefeuilles forment une base de l'espace vectoriel des portefeuilles de titres des trois compagnies C.E.A, I.N.R.A et C.N.R.S ?

2- Quels sont les ensembles de trois sociétés d'investissements qui sont les plus intéressants pour le "boursicoteur" ?

Réponse

1- Maximiser ses gains (ou minimiser ses pertes) en jouant (en fonction des fluctuations du marché) sur le nombre de titres en sa possession de chacune des trois sociétés d'investissement.

Si les portefeuilles d'une société d'investissement forment une combinaison linéaire des portefeuilles des deux autres sociétés d'investissement, il est bien évident qu'elle n'apporte rien au "boursicoteur". Par contre, si les portefeuilles des trois sociétés d'investissement sont linéairement indépendants le "boursicoteur" a plus de possibilités en jouant sur les ventes et les achats des titres de ces trois sociétés (il a plus de degrés de liberté).

2- Toutes les combinaisons de trois sociétés d'investissement à *l'exception* des combinaisons :

(**CSI, CIS, SIC**) ; (**CSI, CIS, ISC**) ; (**CSI, SIC, ISC**) ; (**CIS, SIC, ISC**)

sont intéressantes pour le "boursicoteur".

Par exemple les trois sociétés d'investissements (**CSI, CIS, SIC**) sont des vecteurs de l'espace des trois sociétés (C.E.A, I.N.R.A, C.N.R.S) dont les actions sont cotées en bourse. Pour que ces vecteurs forment une base de cet espace vectoriel, il faut qu'ils soient linéairement indépendants. On peut facilement vérifier que tel n'est pas le cas puisque les trois vecteurs sont liés par la relation : 4**CSI** - 3**SIC** = **CIS**.

On utilise une démarche identique pour montrer que (**CSI, CIS, ISC**) ; (**CSI, SIC, ISC**) ; (**CIS, SIC, ISC**) ne forment pas des bases de l'espace vectoriel des trois sociétés C.E.A, I.N.R.A et C.N.R.S.

3.9.4 Exemple 4 : application linéaire et représentation matricielle

Cet exemple a pour objectifs de récapituler les concepts présentés, introduire l'addition et la multiplication matricielle (Cailliez et Pages, 1976 : pp 72-74).

1- Soit E l'ensemble des sacs d'engrais contenant N, P et K. Soit X un sac :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in E$$

x_1 : quantité de nitrate

x_2 : quantité de phosphate

x_3 : quantité de potasse

On peut définir :

Le sac "somme" de deux sacs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 \end{bmatrix}$$

Le sac "homothétique" de deux sacs

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

Si on admet la possibilité de quantités d'engrais négatives ou nulles, E est un espace vectoriel de dimension 3.

2- E est muni de la *base* :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B_1 est le sac qui contient la quantité unité de N, etc $\cdots$. Si un sac X contient x_1 unités de N, x_2 unités de P et x_3 unités de K, on écrit que $X = x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3$. On dit aussi que :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in I\!R^3$$

3- A chaque X, associons son prix y_1 et son rendement y_2, c'est-à-dire un élément Y de l'espace F des couples (prix, rendement). Soit :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in F$$

On peut définir sur F une addition et une multiplication par un scalaire. Si prix et rendement peuvent être négatifs ou nuls, F est un espace vectoriel de dimension 2, il a pour base :

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ : sac de prix 1 et de rendement 0}$$

$$B'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ : sac de prix 0 et de rendement 1}$$

A un sac d'engrais de composition donnée, on peut associer son prix et son rendement. Si on suppose que prix et rendements sont additifs :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

a_{11}, a_{12}, a_{13} sont respectivement les prix d'une unité de N, de P, de K.

a_{21}, a_{22}, a_{23} sont respectivement les rendements d'une unité de N, de P, de K.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes ($A(2 \times 3)$), on écrit matriciellement que $Y = AX$. Chaque composante de $Y = AX$ est obtenue en multipliant la ligne correspondante de A par la colonne X.

Multiplier "ligne par colonne", c'est faire la somme des produits des termes de même rang dans la ligne et la colonne considérée.

Dans cet exemple, on a supposé qu'à un sac ne correspondent qu'un prix et qu'un rendement :

$E \xrightarrow{f} F$

$X \longrightarrow Y = f(X)$

A chaque vecteur de E, f fait correspondre un et un seul vecteur de F. On dit :

1- Que f est une *application* de E dans F.

2- Que cette application est linéaire (on suppose que prix et rendements sont additifs).

Des bases ayant été choisies dans E et F, on a associé une matrice A à 2 lignes et 3 colonnes. Ce résultat est général :

Pour écrire des "modèles linéaires", pour faire des "calculs", on associe une matrice à chaque application linéaire (une fois précisées les bases des espaces de départ et d'arrivée).

3.9.5 Exemple 5 : représentation de sous espaces engendrés par les colonnes d'une matrice

On considère la matrice :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est telle que la somme des deux premières colonnes est égale à la somme des deux dernières colonnes. Le résultat de ces sommations est égal au vecteur J.

Par ailleurs, les colonnes de X sont des vecteurs colonnes non colinéaires. Ainsi, les deux premières colonnes définissent un plan P_1 et les deux dernières colonnes un plan P_2. Ces deux plans sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, ils ont le vecteur J en commun.

Si on veut représenter ces deux sous espaces, il faut déterminer la position de P_1 par rapport à P_2 et pour cela chercher la valeur de l'angle de ces deux plans.

Le vecteur J commun à P_1 et à P_2, est à l'intersection de ces deux plans. Soit U un vecteur quelconque de P_1 et V un vecteur quelconque de P_2, l'angle des plans P_1 et P_2 est égal à l'angle des vecteurs $U - U_J$ et $V - V_J$ avec U_J et V_J les projections de U et V sur J.

Les deux premières colonnes de X sont des vecteurs de base pour P_1, les deux dernières colonnes sont des vecteurs de base pour P_2. Les vecteurs U et V sont donc de la forme :

$$U = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$V = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

avec a_1, b_1, a_2 et b_2 des scalaires.

On déduit que :

$$U_J = \begin{bmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_1 + b_1}{2} \end{bmatrix} \qquad V_J = \begin{bmatrix} \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$U - U_J = \begin{bmatrix} \frac{a_1 - b_1}{2} \\ \frac{a_1 - b_1}{2} \\ -\frac{a_1 - b_1}{2} \\ -\frac{a_1 - b_1}{2} \end{bmatrix} \quad V - V_J = \begin{bmatrix} \frac{a_2 - b_2}{2} \\ -\frac{a_2 - b_2}{2} \\ \frac{a_2 - b_2}{2} \\ -\frac{a_2 - b_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$< U - U_J, V - V_J > = \left(\frac{a_1 - b_1}{2}\right)\left(\frac{a_2 - b_2}{2}\right)[1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Le produit scalaire $< U - U_J, V - V_J >$ étant égal à zéro, on déduit que P_1 et P_2 sont orthogonaux. On a donc la représentation de la figure 3.4.

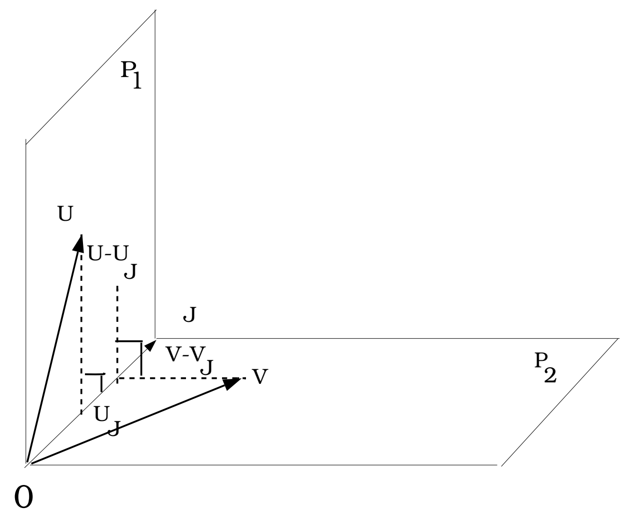

Figure 3.4 : Sous espaces P_1 et P_2 engendrés par les colonnes de la matrice X.

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à la matrice suivante :

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et que, comme nous venons de le faire avec X, nous cherchions à représenter les sous espaces P'_1 et P'_2 engendrés respectivement par les deux premières colonnes et les deux dernières colonnes de X'. En désignant par U' un vecteur quelconque de P'_1 et par V' un vecteur quelconque de P'_2 on vérifie facilement que le produit scalaire $< U' - U'_J, V' - V'_J >$ est différent de zéro (U'_J et V'_J sont les projections de U' et de V' sur J). On déduit que les plans P_1' et P_2' ne sont plus orthogonaux, on a la représentation de la figure 3.5.

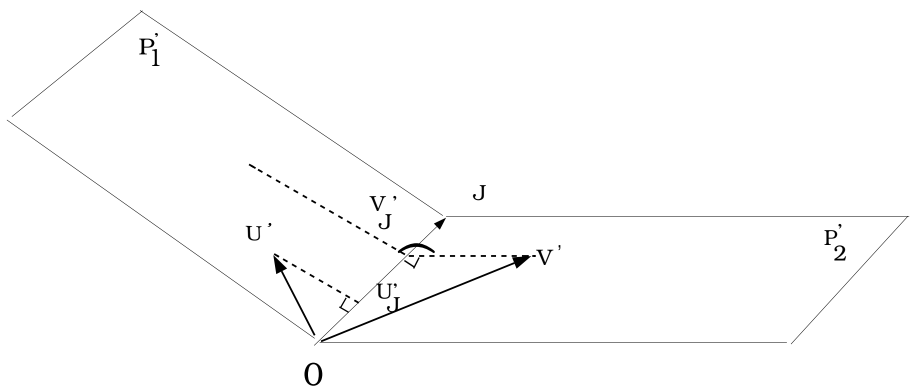

Figure 3.5 : Sous espaces P_1' et P_2' engendrés par les colonnes de la matrice X'.

La matrice X' a été obtenue en supprimant la dernière ligne de X. Cette suppression a rompu l'équilibre de X qui était caractérisé par le nombre de 0 et de 1 et par la disposition des zéros et des uns dans les colonnes. Cette rupture est traduite graphiquement par la non orthogonalité des deux sous espaces vectoriels P_1' et P_2'. Cette représentation est intéressante pour visualiser et comprendre ce que sont des sommes des carrés ajustées et non ajustées en analyse de la variance par exemple.