PARTIE IV-D

L'EXEMPLE DES IRIS

1 Description de la population : iris *setosa*

- **Projections sur les axes X et Y**
- **Recherche de l'axe qui maximise la dispersion**
- **Résumé**

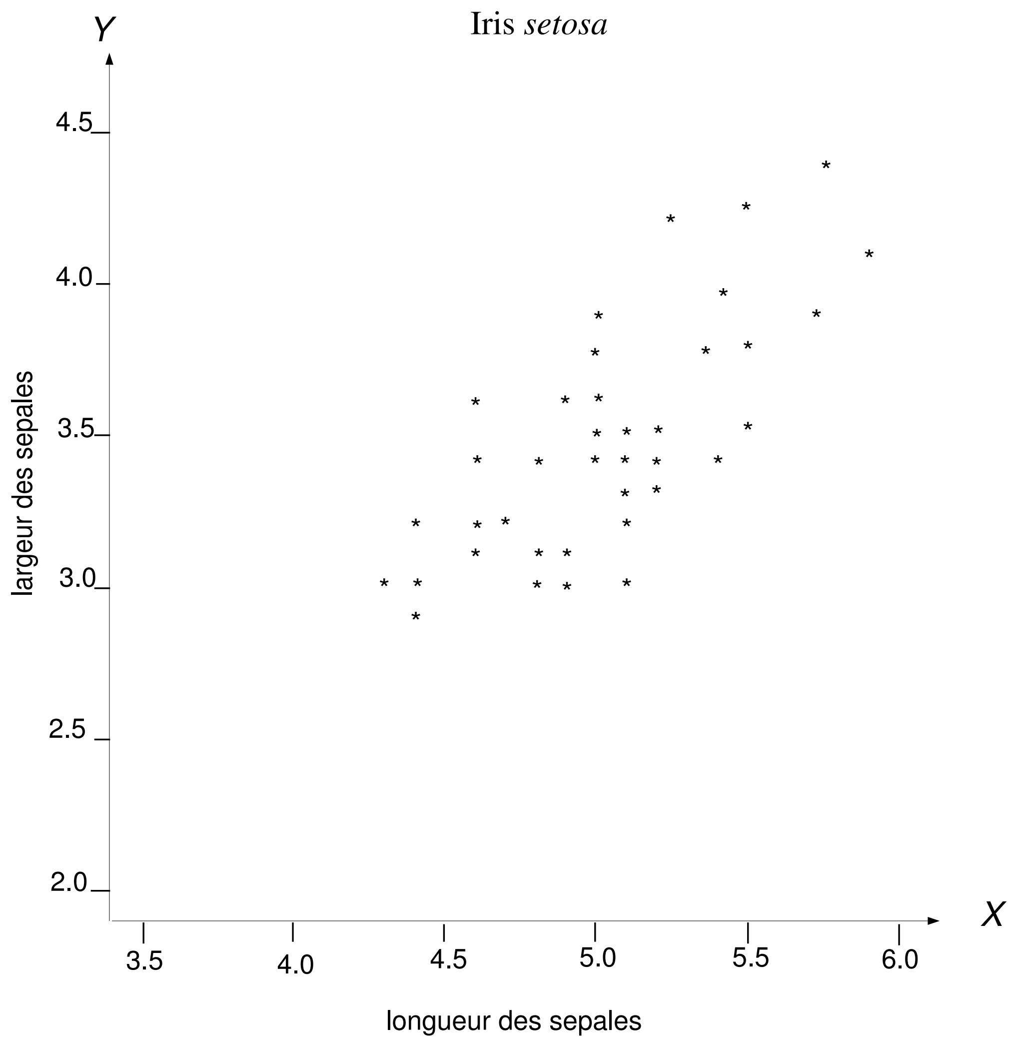
2 Description des populations iris *setosa* et iris *versicolor*

- **Estimation des paramètres de position et de dispersion**
- **Première direction propre de chaque population**
- **Matrice d'inertie commune aux deux populations**

PARTIE IV-D

- **Première direction propre commune aux deux populations**
- **Ellipses d'inertie des populations**
- **Matrice d'inertie des points moyens des populations**
- **Direction propre de la matrice d'inertie des points moyens**
- **Positions relatives des ellipses d'inertie intra et inter populations**
- **Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations**

1 Description de la population : iris *setosa*



1 Description de la population : iris *setosa*

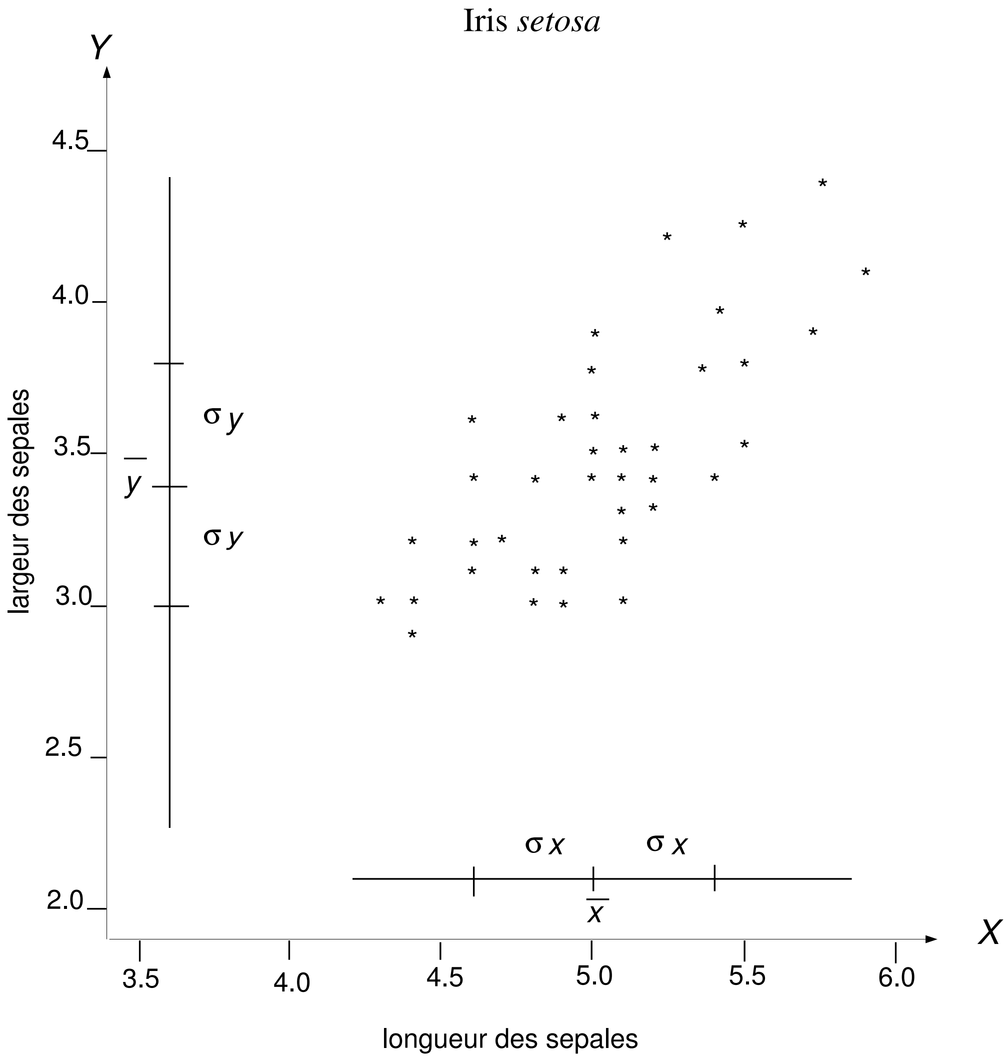
- On considère dans l'exemple des iris de Fisher l'espèce d'iris *setosa* ou **population** iris *setosa*, caractérisée par 2 variables :

  X = Longueur des sépales.
  Y = Largeur des sépales.

- On se propose de condenser l'information, contenue sur les 2 axes du plan, sur un espace de dimension inférieure. Ici, un espace de dimension 1.
  Cet espace est **1 droite**, combinaison linéaire de X et Y.

- Condenser l'information signifie en perdre :
  la projection des données sur 1 droite se traduira par une diminution de la dispersion des données. On souhaite que cette diminution soit la plus faible possible.

Projections sur les axes X et Y



Projections sur les axes X et Y

- On projette les données sur l'axe X :
  La projection de chacun des points est sa valeur de longueur de sépale. L'ensemble des points est représenté par une ligne reliant le minimum et le maximum.

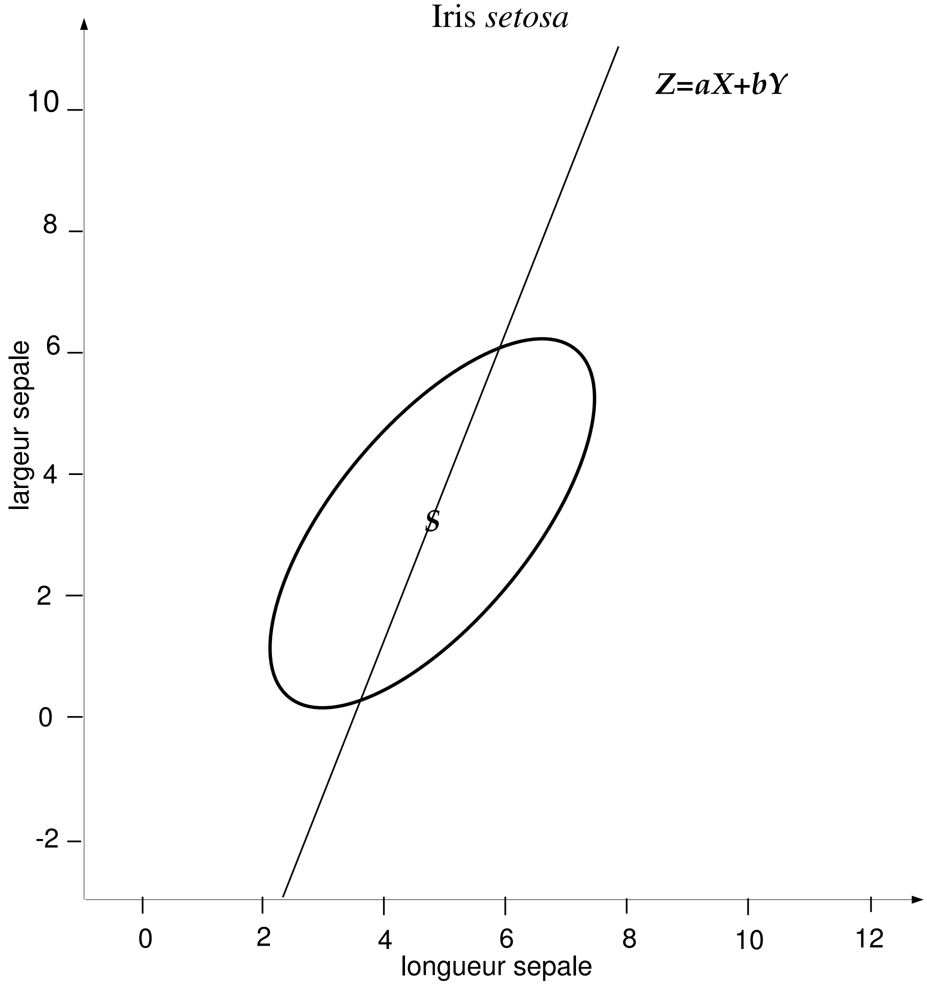
- La dispersion des projections est évaluée par l'écart-type σ_X de X.

- De même, on projette les points sur Y, la dispersion est évaluée par l'écart-type σ_Y de Y.

- Les deux droites sur lesquelles on a projeté les points (X et Y) ne sont pas celles qui maximisent la dispersion des données.

- Comment trouver la droite (**la combinaison linéaire** de X et Y) sur laquelle la projection des points a une dispersion maximum ?

Recherche de l'axe qui maximise la dispersion



Recherche de l'axe qui maximise la dispersion

On cherche l'axe $Z = aX + bY$ avec $a^2+b^2= 1$ qui maximise la dispersion du nuage.
Soit $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

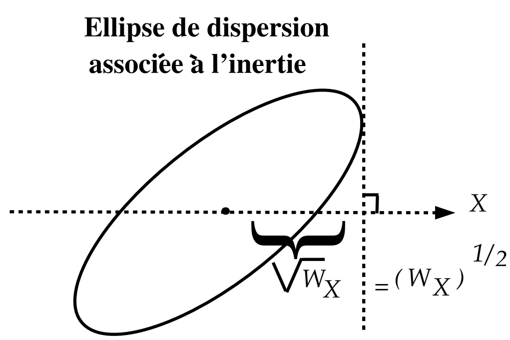
$$var\left(Z\right) = var\left(V'.\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = V'.var\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right).V = V'.\Sigma.V$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - z_.\right)^2 = V'.\left(\frac{1}{n-1}W\right).V$$

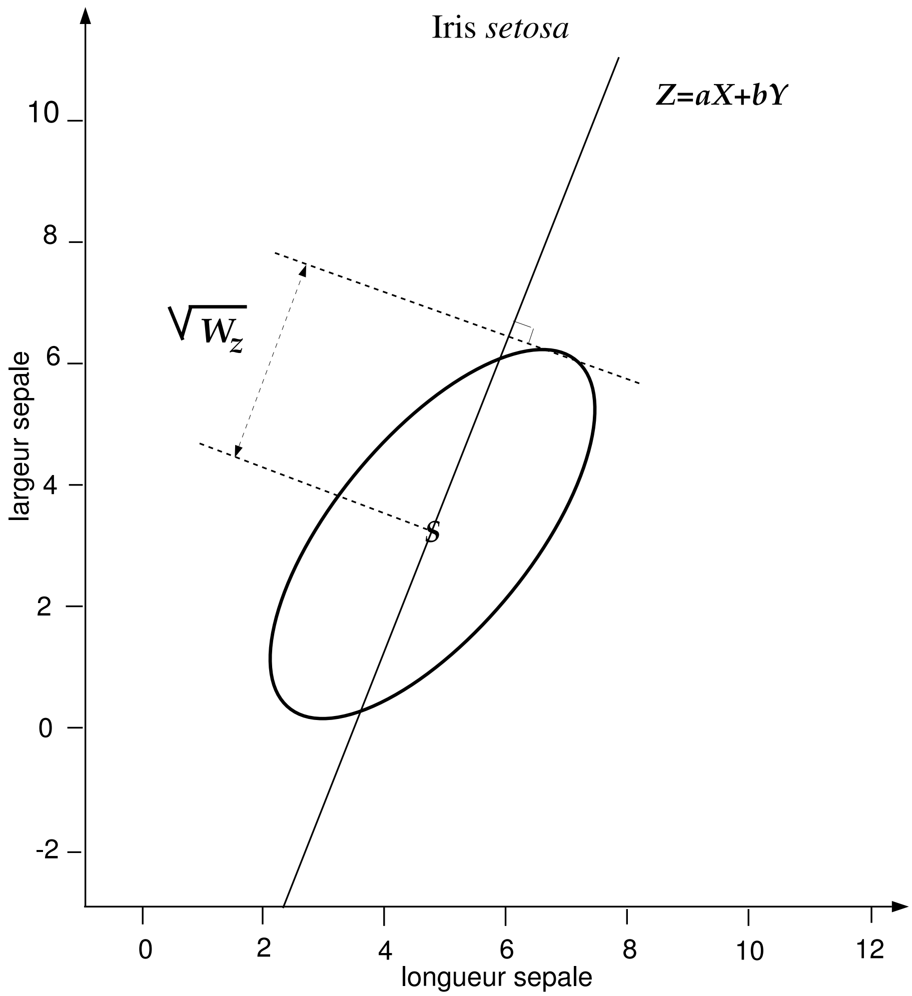
Inertie du nuage sur Z : $\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - z_.\right)^2 = V'.W.V = W_Z$

Exemple : Cas ou $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ soit $Z = X$

$$\text{on a } W_X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}'.W.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_.\right)^2$$



Recherche de l'axe qui maximise la dispersion



Recherche de l'axe qui maximise la dispersion

- Donc pour un axe quelconque

$$Z = aX + bY$$
$$W_z = V^{'}.W.V$$

W_Z est l'inertie du nuage sur l'axe Z.

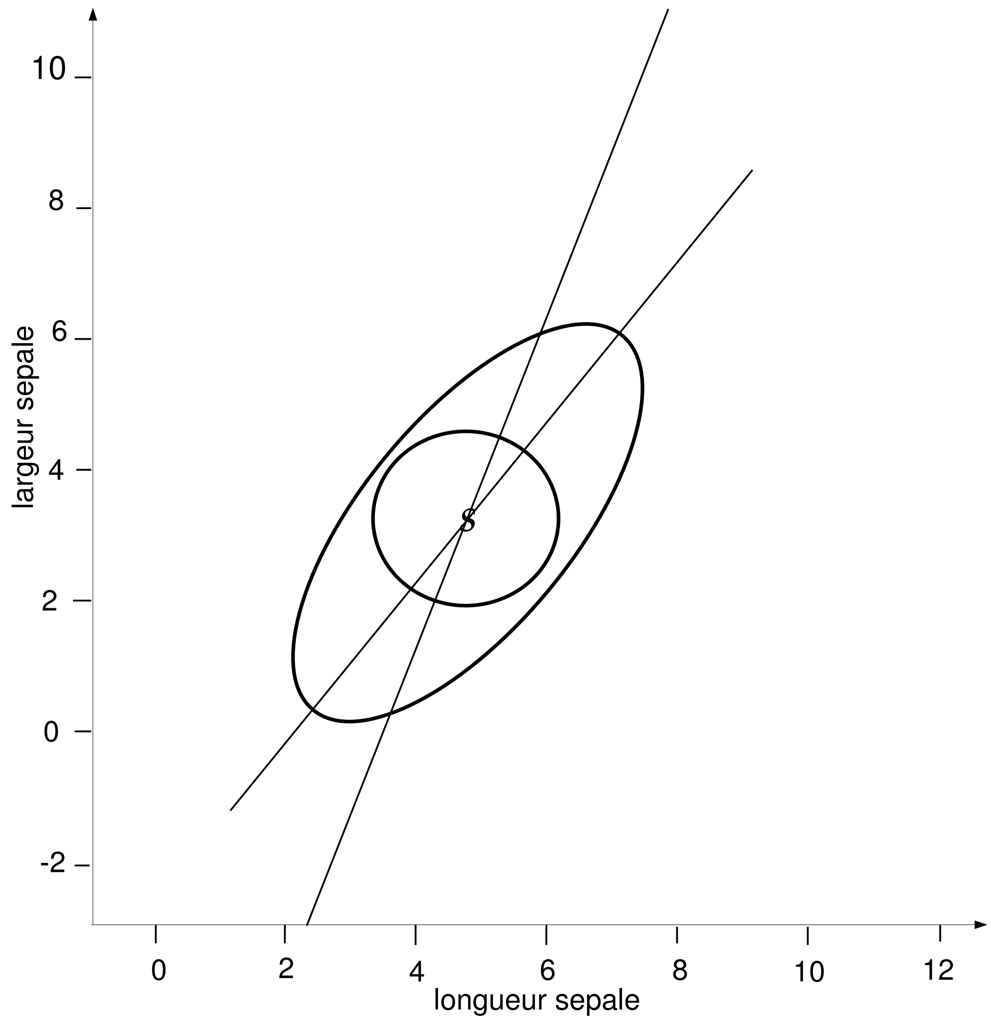
$\sqrt{W_z}$ est représenté sur l'axe Z en prenant la tangente à l'ellipse orthogonale à Z.

- Chercher V tel que la variabilité du nuage sur Z soit maximale, revient à chercher V tel que $\sqrt{W_z}$ ou W_Z soit maximal (car $W_Z > 0$).

On cherche une direction $\Longleftrightarrow$ un vecteur de longueur unité (tel que $V'.V = 1$).

Recherche de l'axe qui maximise la dispersion

Iris *setosa*



Recherche de l'axe qui maximise la dispersion

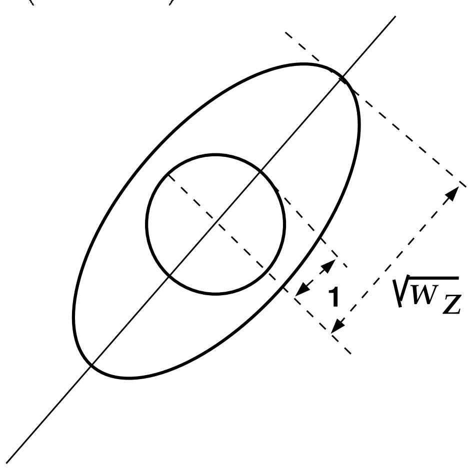
Prendre $V'.V = 1$ a aussi une autre raison :

$$V^{'}.V = 1 \Leftrightarrow V^{'}.I.V = 1 \Leftrightarrow V^{'}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.V = 1$$

est l'équation d'un cercle, donc correspond à une inertie unité répartie sans direction privilégiée.

L'inertie de référence = hasard

On compare $V'.W.V$ à la référence $V'.I.V$. On cherche V tel que $\max\left(\frac{\sqrt{W_Z}}{\sqrt{V'.I.V}}\right) \Leftrightarrow \max\left(\frac{W_z}{V'.V}\right) \Leftrightarrow \max\left(\frac{V^{'}.W.V}{V^{'}.I.V}\right)$ avec $V^{'}.V = 1$



V_1 est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $I^{-1}.V$

Résumé

$$Z = aX + bY$$

Maximiser $SCE_z = SCE(aX+bY)$?

Si $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$SCE(aX+bY) = V'WV$$

où W matrice d'inertie de la population Setosa

$$W = \begin{bmatrix} 6,088 & 4,865 \\ 4,865 & 7,046 \end{bmatrix}$$

Comment trouver le vecteur V pour que $V'WV$ soit maximum ?

Résumé

- On cherche $Z = aX + bY$. Les coefficients a et b sont inconnus.

  On estime a et b de telle sorte que la projection des observations sur Z ait la dispersion ou l'inertie maximale (SCE_Z maximum).

  Ce résultat est admis.

- On peut le vérifier pour $a = 1$ et $b = 0$.

- On peut le montrer avec la variance :

  $$\text{Var}\,(Z) = \text{Var}\left(V'.\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = V'.\text{Var}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right).V = V'.\Sigma.V$$

  par la recherche du maximum d'une fonction.

  Laisser répondre les stagiaires....

Résumé

Maximiser la forme quadratique $V'WV$ sous la contrainte $V'V = 1$.

$V'V = 1 \Longleftrightarrow$ le vecteur V a pour norme 1.

V est le **premier vecteur propre normé** de W associé à la plus grande valeur propre (λ) de W.

$$\lambda = 11.455 \;\text{ et }\; V = \begin{bmatrix} 0.671 \\ 0.741 \end{bmatrix}$$

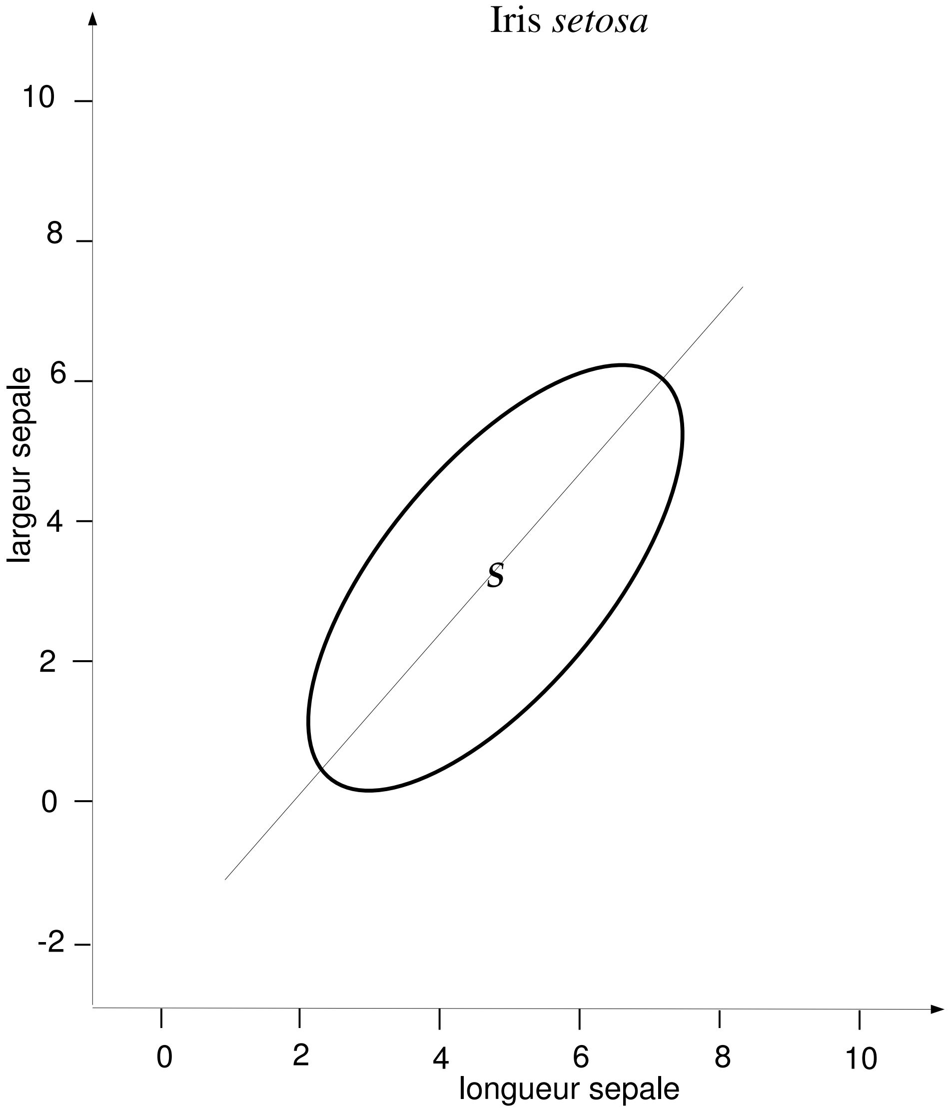
Résumé

- On exprime la recherche du maximum.

- On constate que ce problème n'est autre qu'un problème de recherche de valeurs et de vecteurs propres.

- On rappelle que ce résultat a été établi en recherchant un maximum sous contrainte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (*cf.* paragraphe 5.3.1) ou par la méthode de dérivation (*cf.* paragraphe 5.3.4).

Résumé



Iris *setosa*
10
8
6
4
2
0
-2
largeur sepale
S
0
2
4
6
8
10
longueur sepale

Résumé

- L'axe de plus grande variabilité de W est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de W.

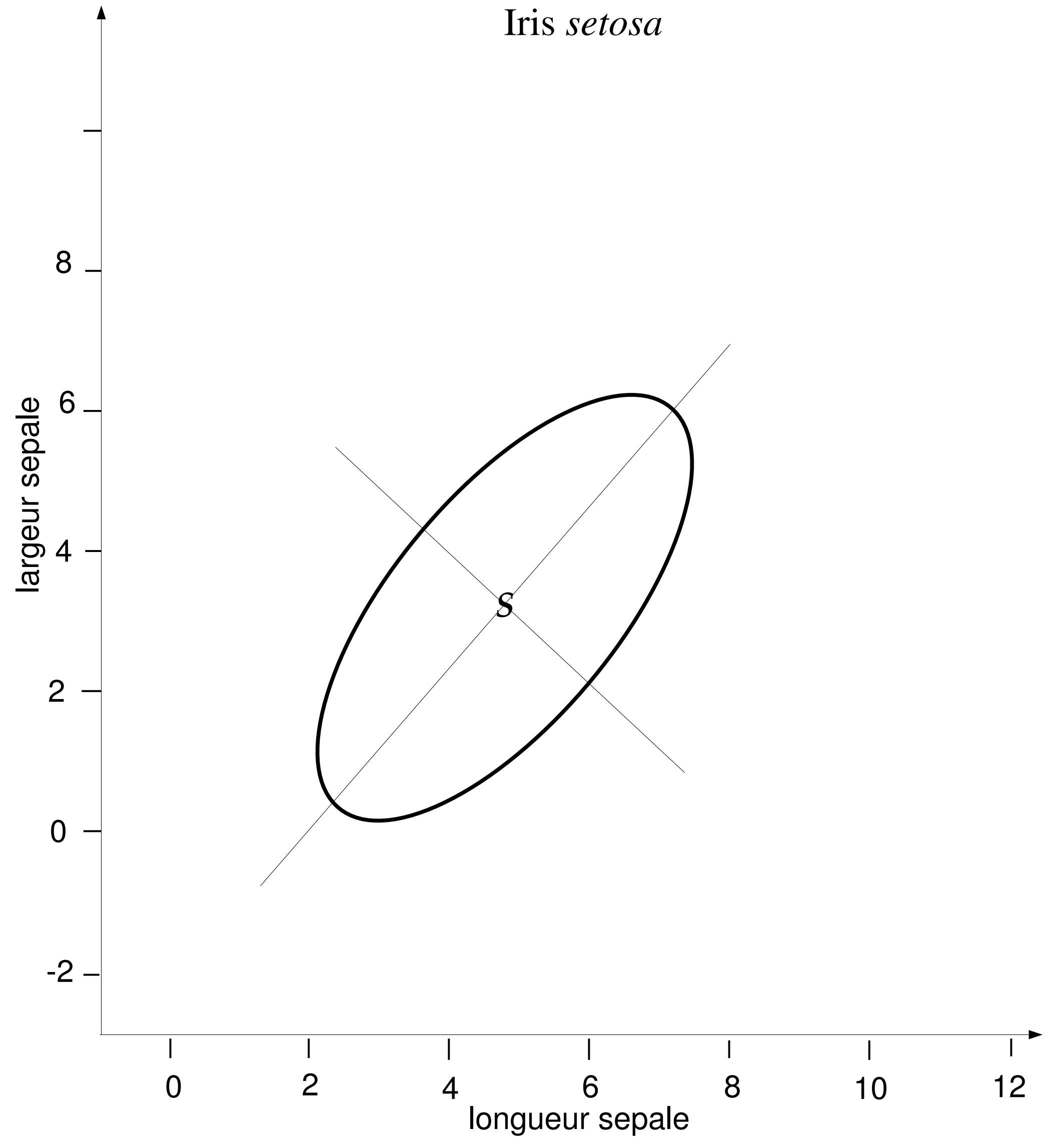
- Soit V_1' tel que $V_1'.V_1 = 1$ le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.
  L'axe de variabilité maximum est donc :
  $Z = V_1'.\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

- On a vu que :
  $W_Z = V_1^{'}.W.V_1 = V_1^{'}.\lambda_1.V_1 = \lambda_1.V_1^{'}.V_1 = \lambda_1$

  car $W.V_1 = \lambda_1.V_1$

  on en déduit que le demi grand axe de l'ellipse vaut :
  $$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{W_Z}$$

Résumé

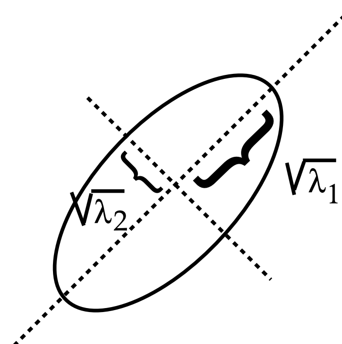


Iris *setosa*
8
6
4
2
0
-2
largeur sepale
S
0
2
4
6
8
10
12
longueur sepale

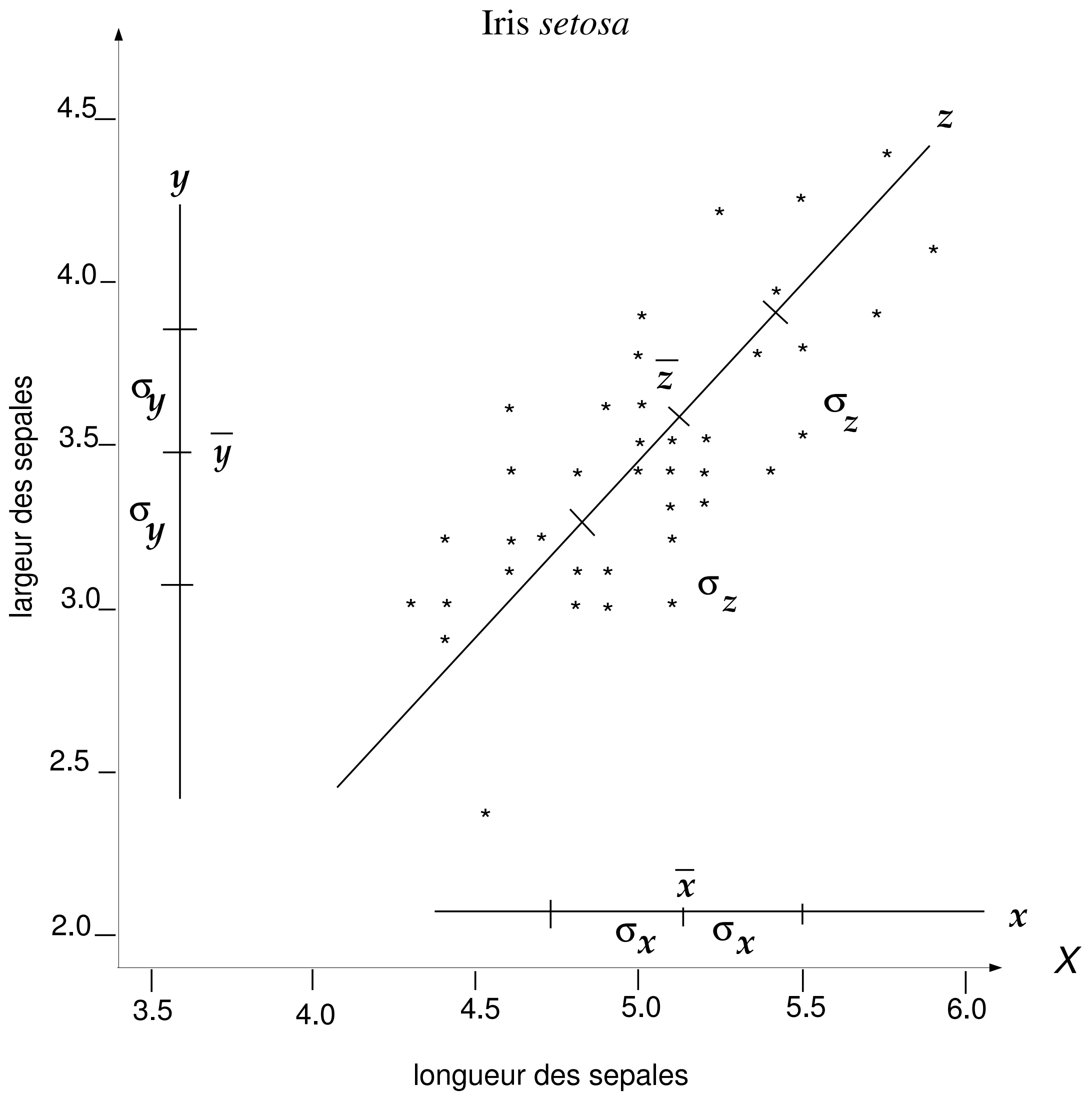
Résumé

Dans l'exemple présenté on ne considère que deux variables (X et Y).

- L'espace des individus est donc de dimension 2.
- On ne peut trouver au maximum que deux valeurs propres et deux vecteurs propres distincts.
- Le 2*ième* vecteur propre est orthogonal au premier vecteur propre (*cf.* paragraphe 4.2.2), c'est le petit axe de l'ellipse.
  La longueur du demi petit axe de l'ellipse est égale à la racine carrée de la deuxième valeur propre.
  Les deux vecteurs propres sont bien $\perp$.



Résumé



Iris *setosa*
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
largeur des sepales
y
σy
ȳ
σy
z
z̄
σz
σz
x̄
x
σx
σx
X
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
longueur des sepales

Résumé

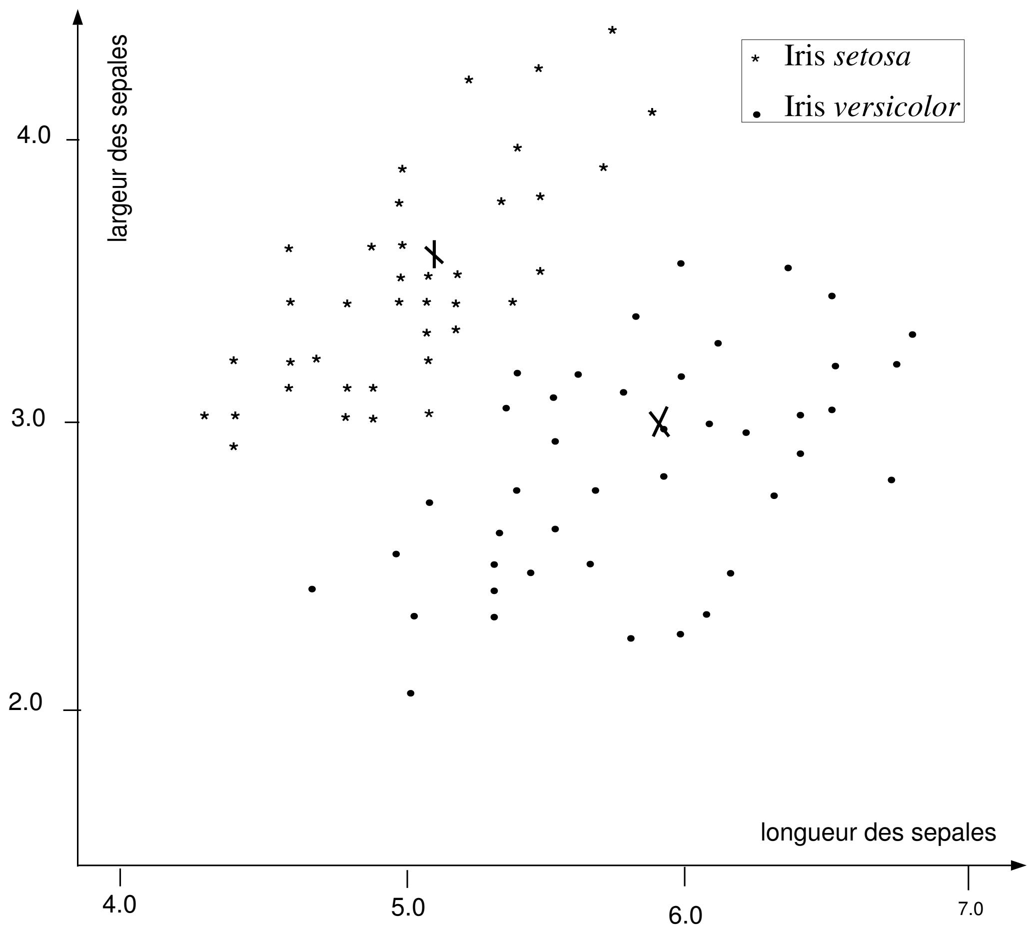
- La droite trouvée (le premier vecteur propre) est dessinée sur la figure, c'est l'axe Z.

  Cet axe Z est représenté par le segment de droite limité par le minimum et le maximum des projections orthogonales sur Z.

- De même on a représenté :
  - Le point moyen $\bar{Z}$, c'est le **centre de gravité** du nuage.
  - Les dispersions sur les axes X, Y et Z par les écarts types σ_X, σ_Y et σ_Z. Avec : $\sigma_Z = \sqrt{\frac{W_Z}{n}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{n}}$ et λ_1 la plus grande valeur propre associée au vecteur propre Z.

- On observe que c'est bien la droite Z qui prend le mieux en compte la dispersion des données.

2 Description des populations iris *setosa* et iris *versicolor*



2 Description des populations iris *setosa* et iris *versicolor*

(*cf.* paragraphe 5.6)

- On présente l'ensemble des données iris *setosa* et iris *versicolor* dessinées dans le plan des variables X (longueur des sépales) et Y (largeur des sépales).
- On décrit les deux nuages de points :
  - Ils sont orientés approximativement dans la même direction.
  - Ils ont approximativement la même longueur et la même largeur.
- On en déduit que les matrices d'inertie de ces deux populations ne sont pas très différentes.

Estimation des paramètres de position et de dispersion

	Iris Setosa	Iris Versicolor
Longueur sépales	5.006	5.936
Largeur sépales	3.426	2.770

Matrices d'inertie W_1 et W_2.

$$\begin{bmatrix} 6.088 & 4.865 \\ 4.865 & 7.046 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13.055 & 4.175 \\ 4.175 & 4.825 \end{bmatrix}$$

Plus grande valeur propre (λ_1) et vecteur propre associé (V_1).

$$\lambda_1 \quad : \quad 11.455 \qquad 14.802$$

$$V_1 \quad : \quad \begin{bmatrix} 0.671 \\ 0.741 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.922 \\ 0.386 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1.103 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$

Estimation des paramètres de position et de dispersion

- On rappelle les résultats obtenus pour la population d'iris *setosa* :

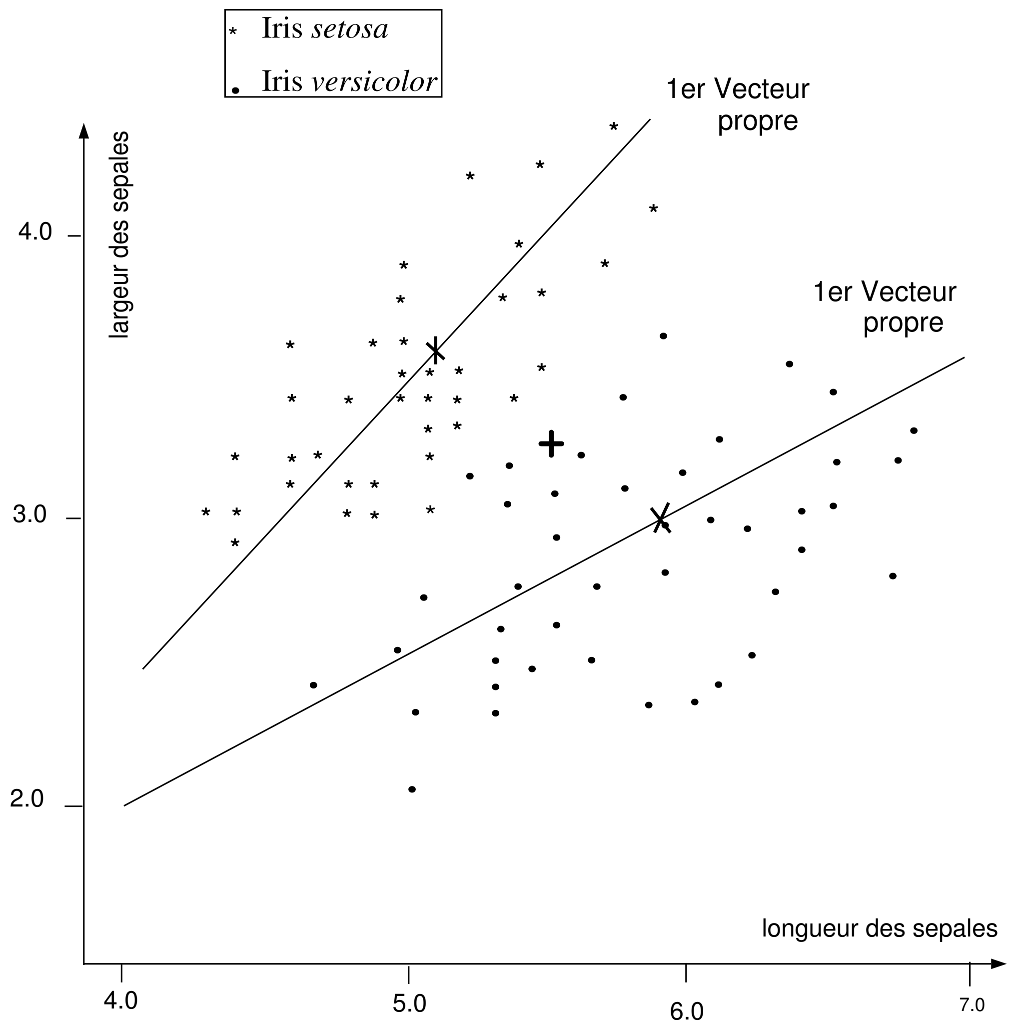
  - Les valeurs moyennes des 2 caractères considérés.

  - La matrice d'inertie calculée avec les sommes de carrés d'écarts (sur la diagonale) et les sommes de produits d'écarts (hors diagonale).

  - La plus grande valeur propre (λ_1) associée à la matrice W_1 et le vecteur propre V_1 correspondant.

- On explique que la même démarche a été suivie pour la deuxième population d'iris *versicolor*.

Première direction propre de chaque population



Première direction propre de chaque population

- On place, dans un espace à 2 dimensions, l'ensemble des individus des 2 populations et on représente la direction de plus grande variabilité (V_1) associée à chaque population.

- On rappelle que la plus grande valeur propre (λ_1) donne une idée de la dispersion des individus de chaque populations le long de l'axe V_1.

- On constate (à l'œil) que les dispersions et les directions de plus grande variabilité des 2 populations ne sont pas très différentes. D'où l'idée de regrouper l'ensemble des résultats dans une seule population.

Matrice d'inertie commune aux deux populations

- Inertie des populations :

W_1 : iris *setosa* et W_2 : iris *versicolor*.

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})^2 & \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})(y_{ij} - y_{i.}) \\ \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})(y_{ij} - y_{i.}) & \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{i.})^2 \end{bmatrix}$$

- Somme inerties populations : $W = W_1 + W_2$.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})^2 & \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})(y_{ij} - y_{i.}) \\ \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{i.})(y_{ij} - y_{i.}) & \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{i.})^2 \end{bmatrix}$$

Matrice d'inertie commune aux deux populations

- Soient x_{ij} et y_{ij} les coordonnées du j*ième* individu de la population i.

- Soient $x_{i.}$ et $y_{i.}$ les valeurs moyennes des 2 caractères, dans la population i.

- La matrice d'inertie W_i associée à la i*ème* population est construite à partir des sommes de carrés des écarts entre les valeurs individuelles (respectivement x_{ij} et y_{ij}) et les moyennes (respectivement $x_{i.}$ et $y_{i.}$) de la population.

  Idem pour les sommes de produits d'écarts.

- La matrice d'inertie W est la somme des matrices d'inertie W_1 et W_2.

Matrice d'inertie commune aux deux populations

- Somme inerties populations : $W = W_1 + W_2$

$$\underbrace{W_1 = \begin{bmatrix} 6.088 & 4.865 \\ 4.865 & 7.046 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 13.055 & 4.175 \\ 4.175 & 4.825 \end{bmatrix}}$$

(iris *setosa*) (iris *versicolor*)

$$\Downarrow$$

$$W = \begin{bmatrix} 19.143 & 9.036 \\ 9.036 & 11.866 \end{bmatrix}$$

- Détermination de la plus grande valeur propre de W et du vecteur propre associé.

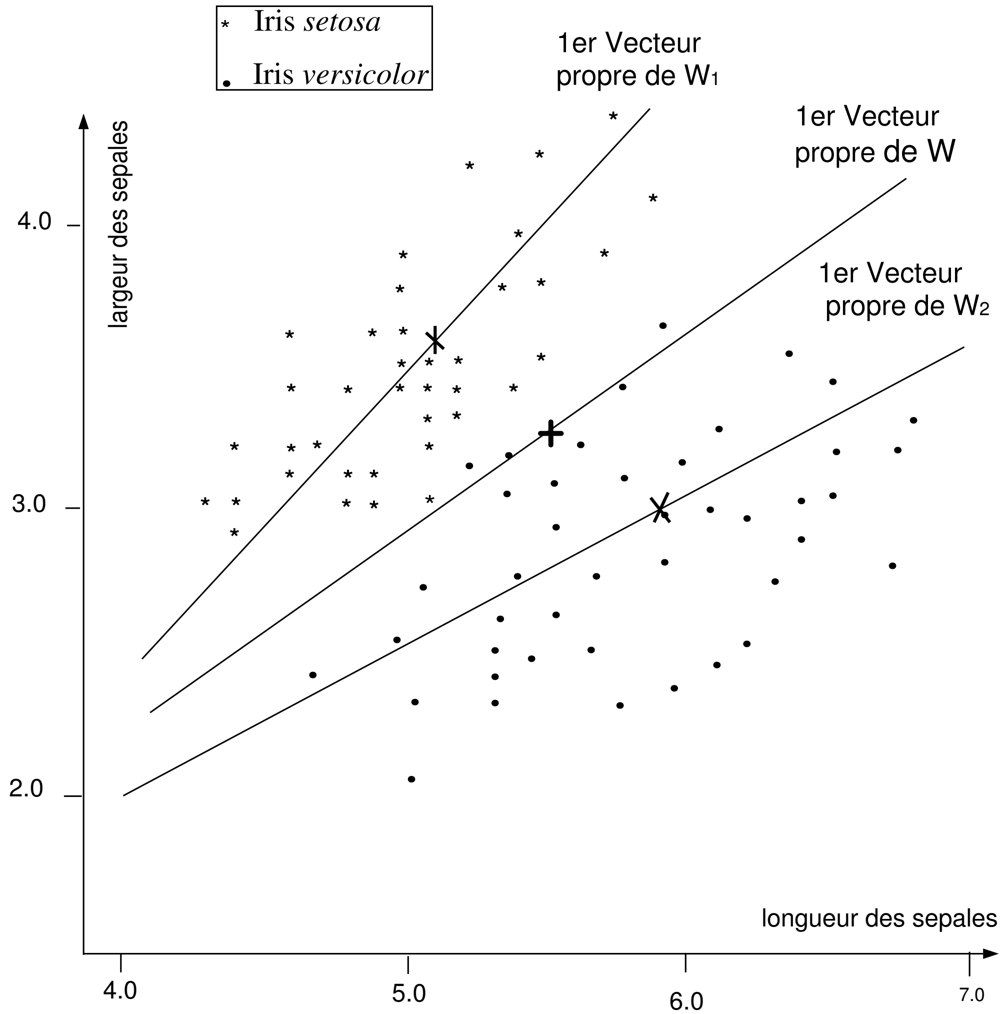
Matrice d'inertie commune aux deux populations

- En supposant l'homogénéité des 2 populations, on calcule l'inertie globale de l'ensemble des individus, en **sommant terme à terme** les inerties de chacune des populations.

- On reprend la démarche précédente, à partir de la matrice d'inertie globale : $W = W_1 + W_2$.

- Recherche de la plus grande valeur propre (λ_1) et de la direction propre associée V_1 de la matrice d'inertie W.

Première direction propre commune aux deux populations



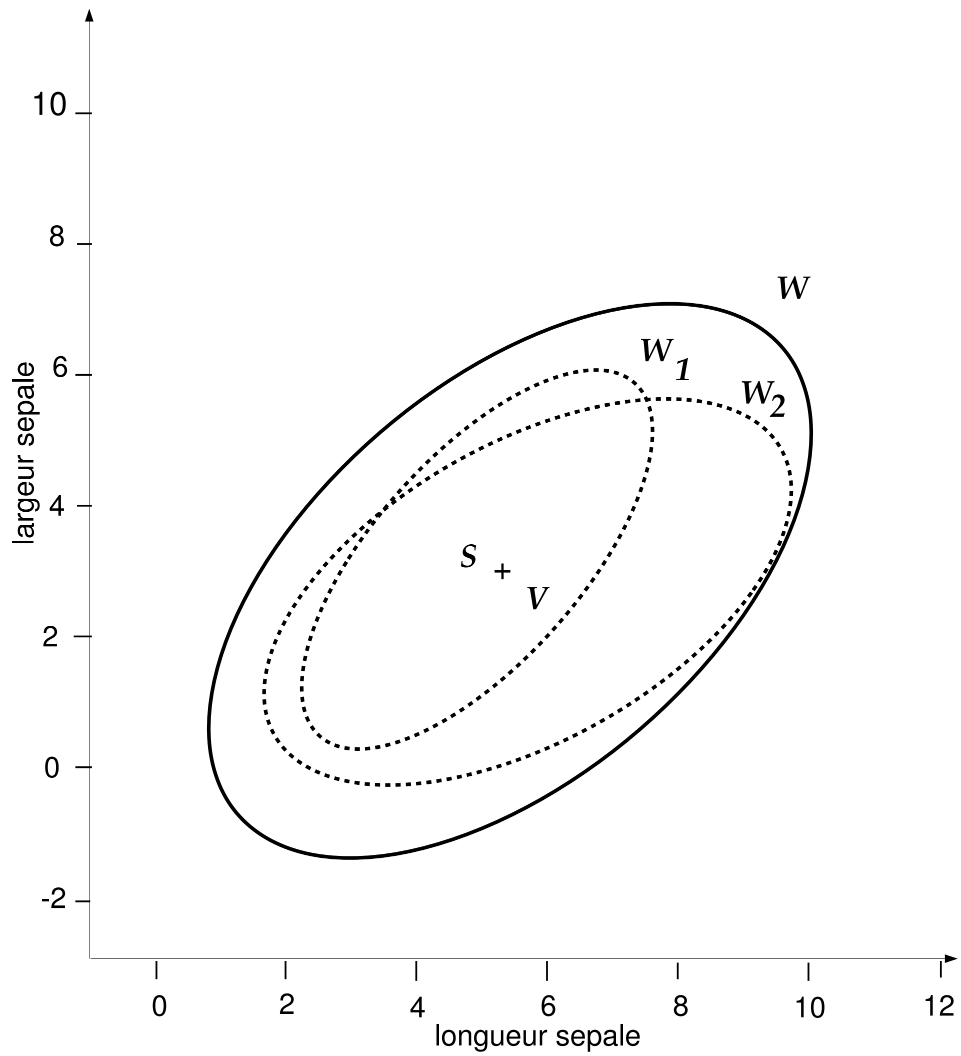
Première direction propre commune aux deux populations

- Soit le tableau :

	W1	W2	W
Valeur propre	11.455	14.802	25.246
Vecteur propre	[1] [1.103]	[1] [0.418]	[1] [0.675]

- On remarque que :
  - la dispersion λ est voisine de la somme des dispersions des 2 populations (λ_1 et λ_2).
  - la direction de plus grande variabilité de (W) associée à la valeur propre λ se situe entre les 2 directions associées à W_1 et W_2.
- On montre le transparent ci-contre donnant une représentation simultanée des directions propres associées aux matrices d'inertie W, W_1 et W_2.

Les ellipses d'inertie des populations



Les ellipses d'inertie des populations

- Sur le dessin ci-contre, S (*setosa*) et V (*versicolor*) sont les centres des ellipses d'inertie. Ils représentent respectivement les points moyens des populations d'iris *setosa* et *versicolor*.

- Les matrices d'inertie sont W_1 pour S, W_2 pour V et W pour la somme des inerties des 2 populations. Cette dernière matrice est appelée ellipse d'inertie **intra commune** aux deux populations.

- Sur le graphique, W_1, W_2 et W désignent aussi les ellipses d'inertie.

Matrice d'inertie des points moyens des populations

La matrice d'inertie des points moyens des populations est notée B.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2} n_i \left(x_{i.} - x_{..}\right)^2 & \sum_{i=1}^{2} n_i \left(x_{i.} - x_{..}\right)\left(y_{i.} - y_{..}\right) \\ \sum_{i=1}^{2} n_i \left(x_{i.} - x_{..}\right)\left(y_{i.} - y_{..}\right) & \sum_{i=1}^{2} n_i \left(y_{i.} - y_{..}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} \begin{bmatrix} \left(x_{1.} - x_{2.}\right)^2 & \left(x_{1.} - x_{2.}\right)\left(y_{1.} - y_{2.}\right) \\ \left(x_{1.} - x_{2.}\right)\left(y_{1.} - y_{2.}\right) & \left(y_{1.} - y_{2.}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 21.623 & -15.299 \\ -15.299 & 10.824 \end{bmatrix}$$

Matrice d'inertie des points moyens des populations

Après avoir caractérisé la dispersion interne aux populations, on s'intéresse à la **dispersion entre** les populations d'iris.
Chaque population est caractérisée, pour chaque caractère, par une valeur moyenne. On peut donc construire la matrice des points moyens des populations (B) à partir :

- Des sommes de carrés d'écarts entre les valeurs moyennes des populations (respectivement $x_{i.}$ et $Y_{i.}$) et les moyennes générales (respectivement $x_{..}$ et $y_{..}$), pondérées par leurs effectifs (n_i). Soit : $\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i.} - x_{..})^2$ et $\sum_{i=1}^{n} n_i(y_{i.} - y_{..})^2$ respectivement.
- Des sommes de produits d'écarts entre les valeurs moyennes des populations (respectivement $x_{i.}$ et $Y_{i.}$) et les moyennes générales (respectivement $x_{..}$ et $y_{..}$), pondérées par leurs effectifs (n_i). Soit : $\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i.} - x_{..})(y_{i.} - y_{..})$.

Direction propre de la matrice d'inertie des points moyens

Direction de plus grande variabilité de B

$$\Updownarrow$$

Trouver λ et V tel que $(B - \lambda I).V = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

Deux variétés d'iris (*setosa, versicolor*)

$$\Downarrow$$

Une seule valeur propre non nulle

$$\Downarrow$$

$$\lambda = 32.44 \;\Rightarrow\; V = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.707 \end{bmatrix}$$

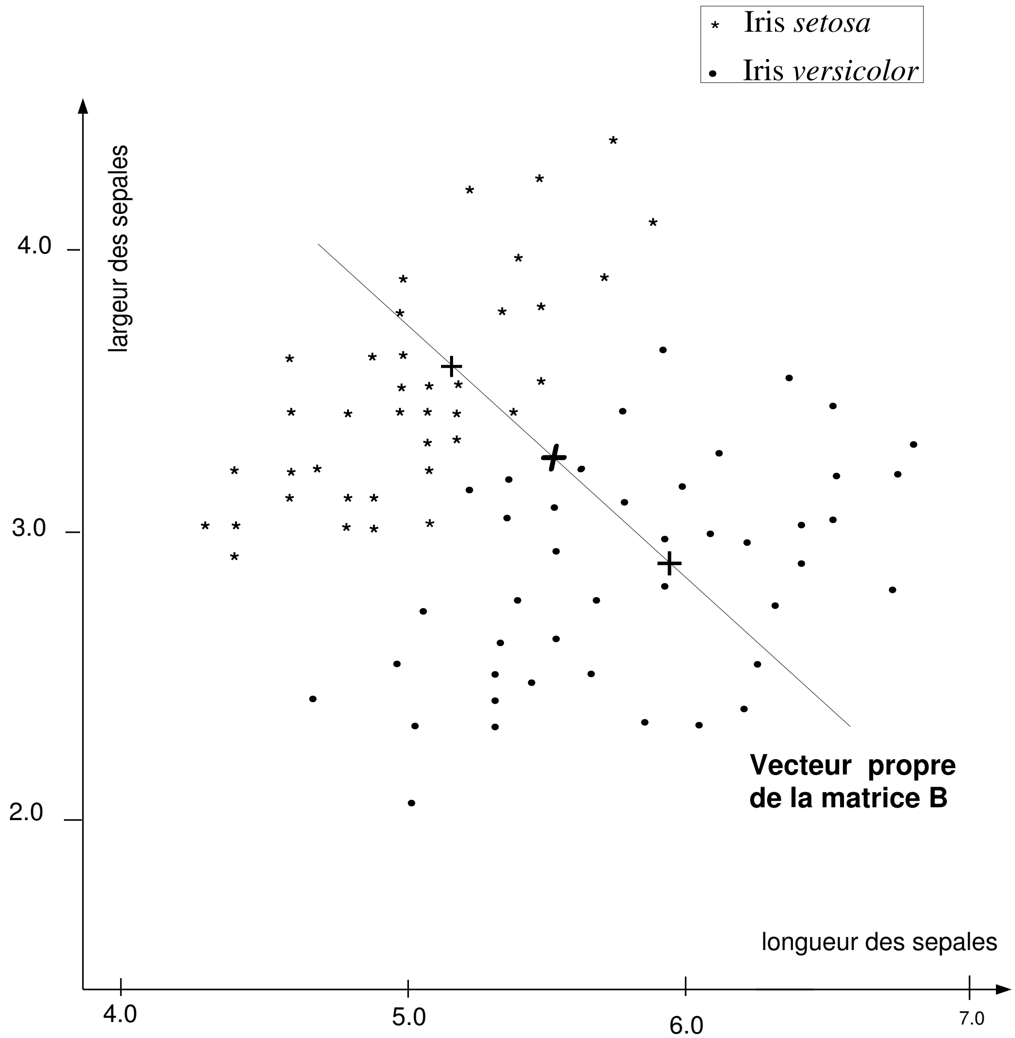
Direction propre de la matrice d'inertie des points moyens

- On cherche la plus grande valeur propre (λ) et le vecteur propre associé (V) de la matrice d'inertie B.

- On remarque, qu'il n'y a dans le cas étudié, que deux populations. Donc :
  - Deux points moyens seulement (les centres des populations d'iris).
  - Par les deux points moyens il ne passe qu'une seule droite.

  On doit donc s'attendre à ne trouver qu'une valeur propre non nulle et donc un seul vecteur propre.

Direction propre de la matrice d'inertie des points moyens

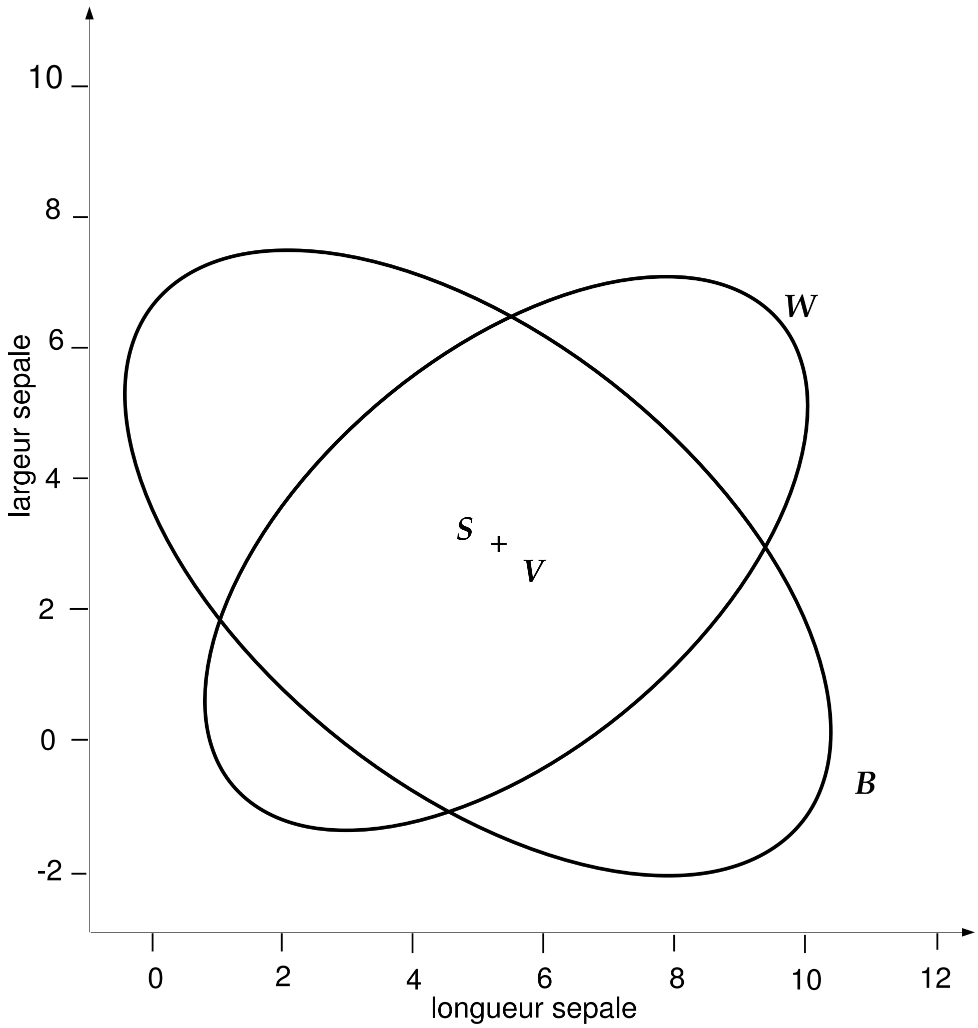


Direction propre de la matrice d'inertie des points moyens

- On montre le tracé du vecteur propre de la matrice B.
- On constate que les points observés, iris *versicolor* et iris *setosa*, se projettent sur la direction propre de part et d'autre du point moyen estimé sur la totalité des observations.
- Cette direction de l'espace sépare les deux populations d'iris. Elle ne prend cependant pas en compte toute l'information disponible. En effet, l'inertie W commune aux deux populations n'est pas utilisée. Peut-on mieux faire ?
- La question est : Existe-t'il une direction du plan (X, Y) sur laquelle, en projection, les populations d'iris sont séparées au maximum ?

  La réponse est OUI, c'est la direction qui prend en compte la variabilité des points moyens et la variabilité intrinsèque de chaque population.

Positions relatives des ellipses d'inertie intra et inter populations



Positions relatives des ellipses d'inertie intra et inter populations

- Les ellipses d'inertie sont notées :

$$W = \text{"Within" ou intra}$$
$$B = \text{"Between" ou inter}$$

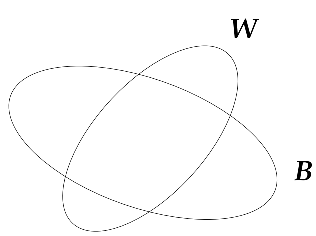
Elles sont centrées au centre de gravité du nuage.

- On note :

"+" pour le centre de gravité du nuage (mélange des 2 populations).

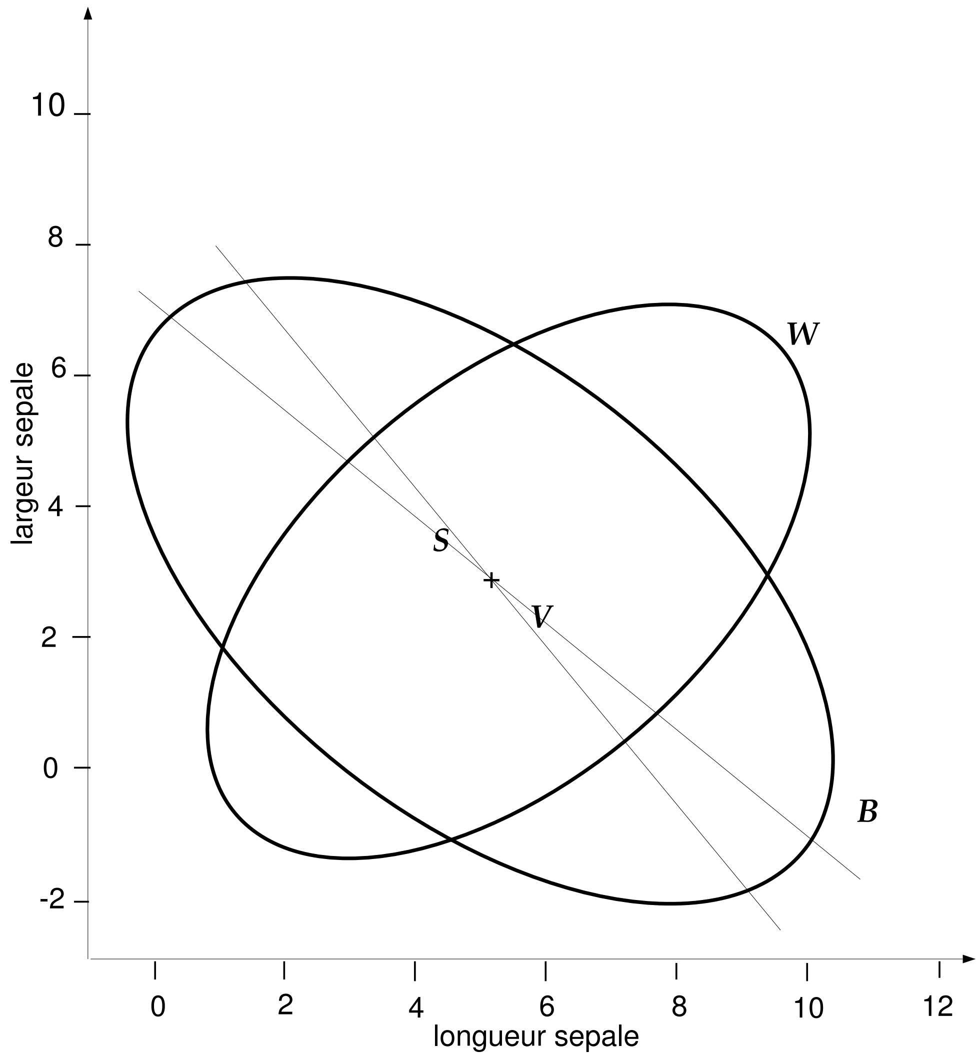
"s" pour le centre de gravité de la population iris *setosa*.

"v" pour le centre de gravité de la population iris *versicolor*.



Le grand axe de B passe par $+$, s et v.

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations



Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

On représente les matrices d'inertie W et B avec :

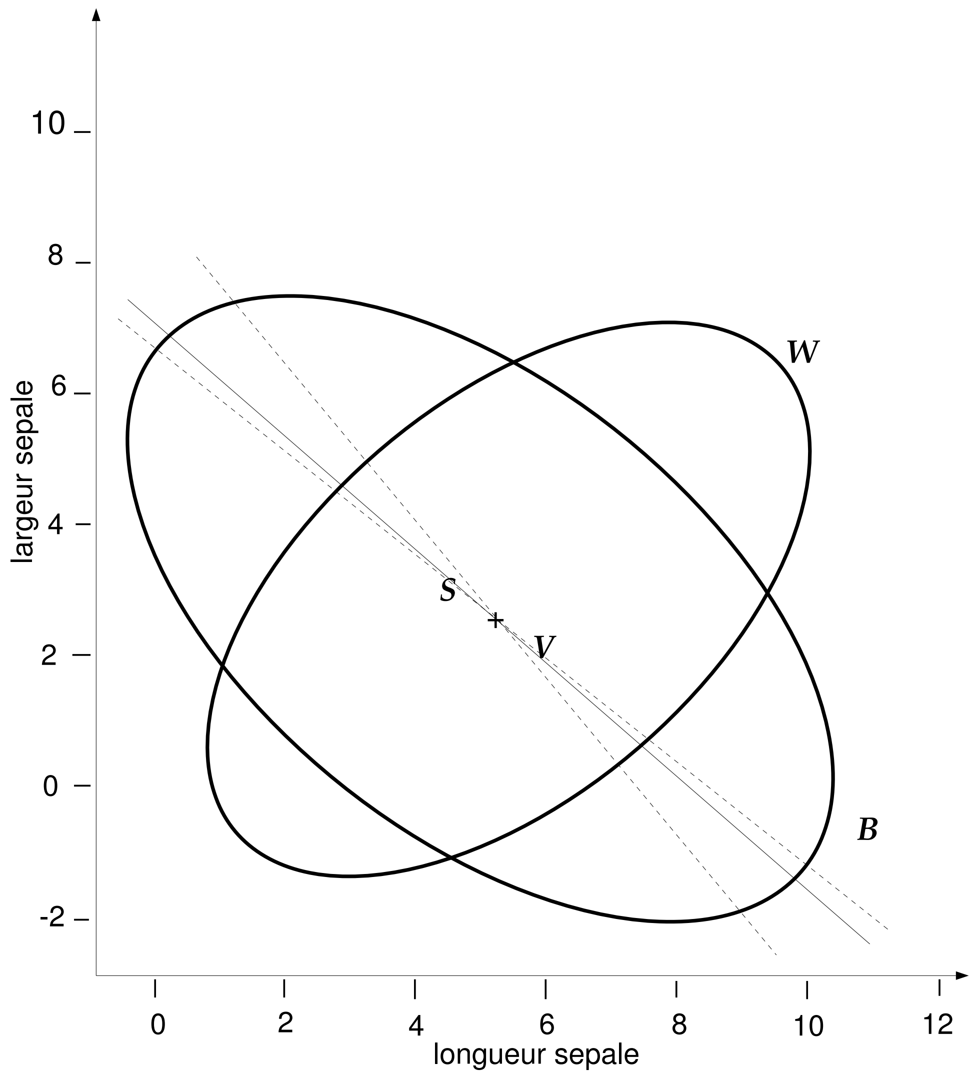
- Pour B, la direction de plus grande variabilité (le 1er vecteur propre).
- Pour W, la direction de plus petite variabilité (le 2$ième$ vecteur propre).

Remarque : L'axe du 1er vecteur propre de B passe par les points moyens "s" et "v". Donc :

- L'axe de plus grande variabilité sur B ne correspond pas à l'axe de plus faible variabilité sur W.
- On trouve l'axe qui sépare au mieux, en projection sur lui, les observations relatives aux deux populations, en choisissant celui qui "maximise B" et qui "minimise W".

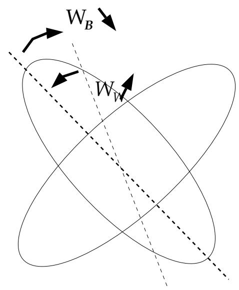
  Cet axe se situe donc entre les 2 axes représentés.

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations



Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

Soit le nouvel axe représenté en trait plein.



Remarque : Plus ce nouvel axe est à droite du $1er$ vecteur propre de B, plus W_B diminue ; par contre, plus il est à gauche du $2ième$ vecteur propre de W et plus W_W augmente. Donc :

- L'axe "idéal" se situe entre les deux directions propres citées.
- Pour trouver cet axe, on cherche $Z = aX + bY$ qui maximise le rapport de la variabilité de B à celle de W.
  Soit $\dfrac{V^{'}.B.V.}{V^{'}.W.V.}$ maximum.

  De plus on utilise $V'.W.V$ comme inertie de référence. Ainsi, V est tel que $V'.W.V = 1$.

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

Recherche de $Z = aX + bY$ qui maximise la distance entre les points moyens, sachant :

- La variabilité **Intra :**

$$W_z = \sum_{j=1}^{n_j} (z_{ij} - z_{1.})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (z_{2j} - z_{2.})^2 = V'.W.V$$

$$\text{avec : } V = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \end{bmatrix}$$

- La variabilité **Inter :**

$$B_z = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (z_{1.} - z_{2.})^2 = V'.B.V$$

Il faut maximiser :

$$\phi = \frac{V'.B.V}{V'.W.V} \text{ sous la contrainte : V'.W.V=1}$$

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

Existe-t-il dans le plan (X, Y) une direction optimale qui sépare les deux populations compte tenu de leur variabilité intrinsèque ?

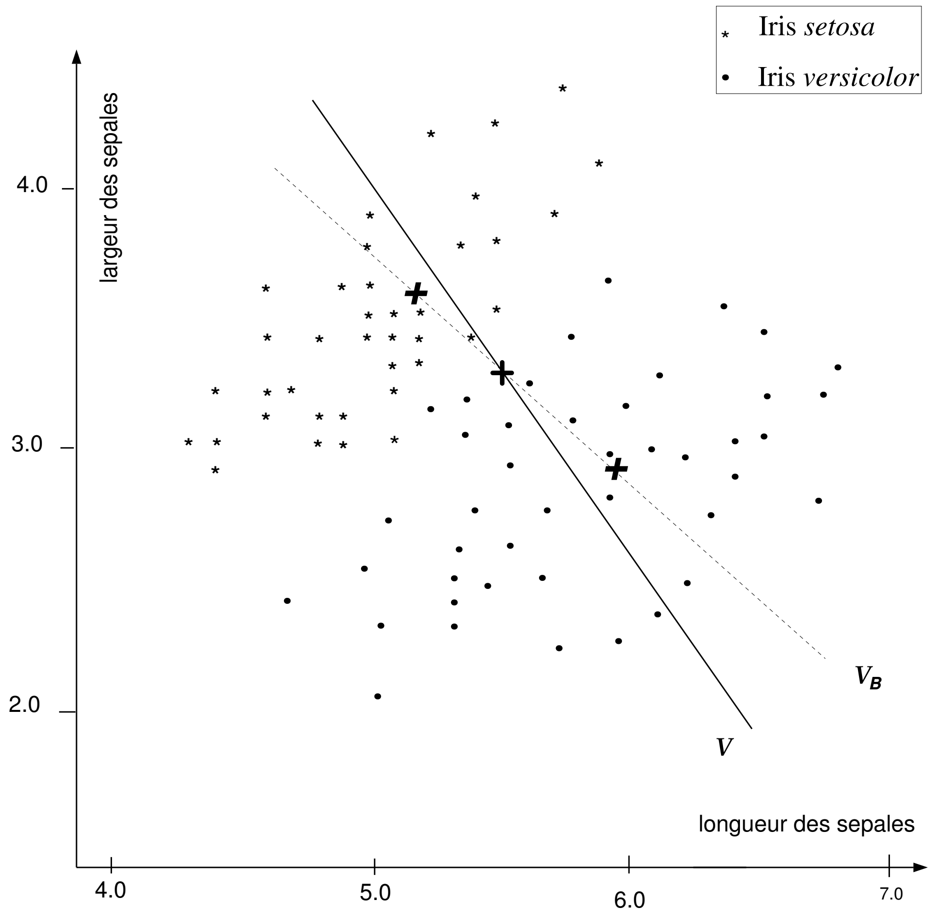
- Pour répondre à cette question, on cherche une combinaison linéaire $Z = aX + bY$ telle que la distance entre les points moyens des populations soit maximum, compte tenu de la variabilité interne commune aux deux populations.

  Autrement dit, on cherche à maximiser l'inertie des points moyens des populations (B) par rapport à l'inertie des populations (W).

- Ce problème a déjà été vu, il s'agit de la maximisation du rapport de deux formes quadratiques sous contrainte.
  Ce problème est équivalent à celui de la recherche des valeurs et des vecteurs propres de $W^{-1}.B$. Soit :

$$det(W^{-1}.B - \lambda I)V = 0$$

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations



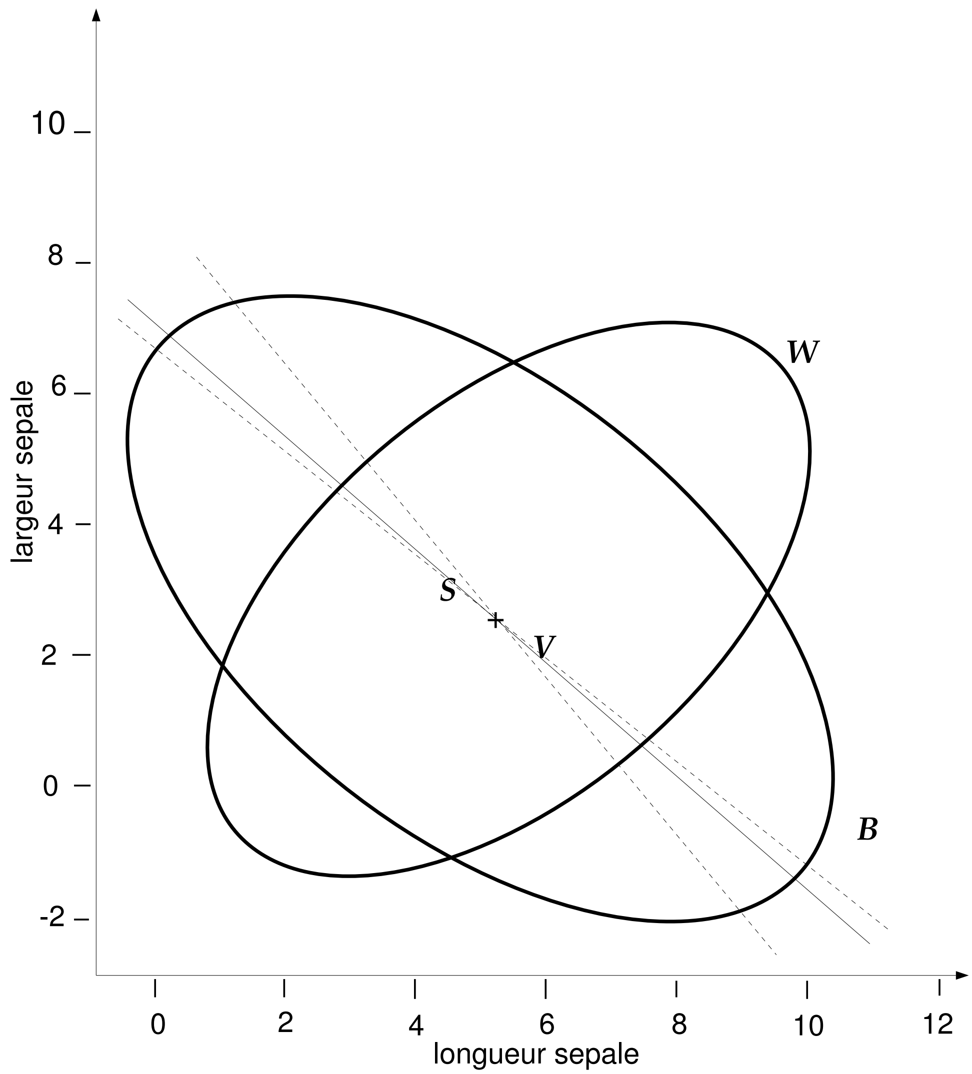
Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

- On retrouve un problème de valeurs et de vecteurs propres.
- On donne (au tableau) la valeur propre et le vecteur propre associés à l'équation caractéristique de la fonction précédente :

$$\lambda = 5.088 \qquad V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.237 \end{bmatrix}$$

- On fait remarquer que la matrice $W^{-1}.B$ n'est pas symétrique.
- On montre la direction V que l'on compare à la direction V_B estimée sans tenir compte de la variabilité intra population.
- En conclusion, on souligne qu'on a obtenu la direction qui maximise la distance inter population, relativement à la distance intra population.

Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations



Recherche de l'axe qui sépare au mieux les deux populations

En guise de conclusion générale, on revient à la représentation des ellipses d'inertie Intra commune aux deux populations et Inter.

- On montre (en trait plein) l'axe qui, en projection sur lui, sépare "au mieux" les observations des deux populations. C'est-à-dire celui qui maximise W_B en minimisant W_W.
- On montre (en pointillé) l'axe qui sépare les points moyens des populations (*1ère* direction propre de la matrice B).