PARTIE IV-C

MAXIMISATION-DERIVATION

1 Recherche des extrema

- **Exemple de la cartouche de chasse**
- **Extremum d'une fonction**

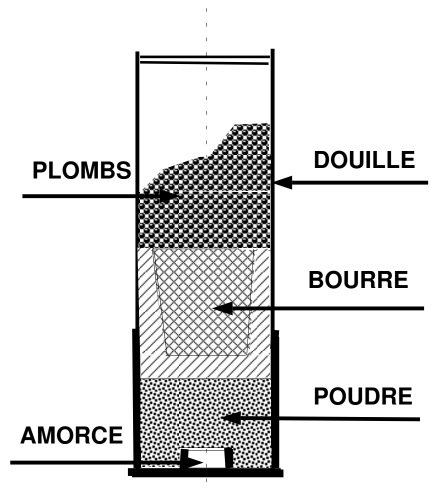
2 Dérivation

- **Dérivée première**
- **Exemple**
- **Dérivée seconde**

3 Recherche des extrema

- **Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques**
- **Maximisation d'une forme quadratique**

1 Recherche des extrema
Exemple de la cartouche de chasse



Cartouche de chasse

Variables considérées :

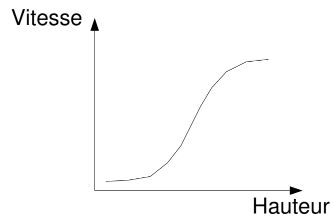
- hauteur de poudre
- hauteur de bourre
- vitesse des plombs à 30 mètres

Problème pour le fabricant :

- maximiser la vitesse des plombs à 30 mètres

1 Recherche des extrema
Exemple de la cartouche de chasse

- Pour la hauteur de poudre (h_p) puis la hauteur de la bourre (h_b) prise séparément on sait faire. On a une courbe du type :



$$V = f\,(h_p) \quad \text{ou} \quad V = g\,(h_b)$$

Au delà d'une certaine hauteur, $\cdots$

"tout pète à la figure"

- Or ce que l'on veut, c'est maximiser la vitesse en fonction de h_p et h_b simultanément. Soit :

$$V = F(h_p, h_b)$$

$$\mathrm{F} : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_p \\ h_b \end{bmatrix} \longrightarrow V = F\,(H) = F\,(h_p, h_b)$$

On veut $\max(V)$ en fonction de H.

Extremum d'une fonction

$$f : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Calcul de $f'(x)$

  f admet un extremum en $x_0 \iff f'(x_0) = 0$

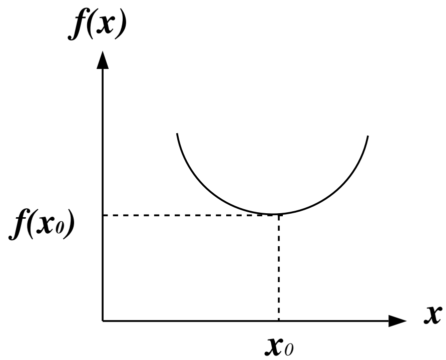
- Calcul de $f"(x)$

$$\begin{cases} f\left(x_0\right) \text{ est minimum si } f''\left(x_0\right) > 0 \\ f\left(x_0\right) \text{ est maximum si } f''\left(x_0\right) < 0 \end{cases}$$

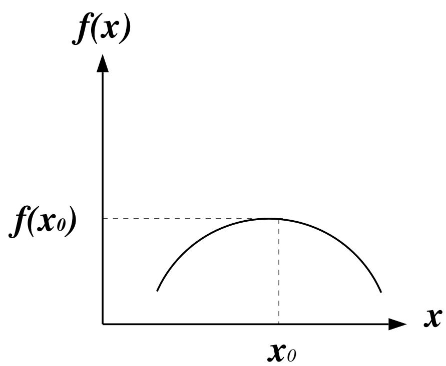
- Pour une fonction $F : I\!\!R^n \rightarrow I\!\!R$ on applique la même méthode.

Extremum d'une fonction

$f(x_0)$ est un minimum si $f''(x_0) > 0$



$f(x_0)$ est un maximum si $f''(x_0) < 0$



2 Dérivation
Dérivée première

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow f(X)$$

$$= \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2 Dérivation
Dérivée première
(*cf.* paragraphe 5.2)

- Définition de la dérivée d'une application linéaire de $I\!R^n$ dans $I\!R$.
- Définition du gradient :

$$\frac{\partial f\,(X)}{\partial X} \text{ est le gradient}$$

Exemple

Soit f une application linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R$:

$$f\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow f(X) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow f(X) = [b_1 b_2 b_3] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow f(X) = B^{'}.X$$

$$\text{donc } \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = B}$$

Quelques dérivées premières

$$\text{Soient} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Si pour tout X $\boxed{f(X) = B'.X = X'.B}$

  alors $\boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = B}$

- Si pour tout X $\boxed{f(X) = \text{Constante}}$

  alors $\boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$

Quelques dérivées premières

- Si pour tout X, $f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

$$\text{soit} \quad f(X) = [x_1 x_2 \cdots x_n] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X'.X$$

$$\text{alors} \quad \boxed{\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \frac{\partial \left(X'.X\right)}{\partial X} = 2.X}$$

Quelques dérivées premières

- Si pour tout X, $f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_i.x_j$

$$\begin{aligned} f(X) = {} & a_{11}.x_1^2 + a_{12}.x_1.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_1.x_n \\ & + a_{21}.x_2.x_1 + a_{22}.x_2^2 + \cdots + a_{2n}.x_2.x_n \\ & + \cdots + a_{nn}.x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(X) = [x_1 x_2 \cdots x_n] . \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(X) = X'.A.X}$$

Quelques dérivées premières

$$\boxed{f(X) = X^{'}.A.X}$$

alors $\boxed{\dfrac{\partial f(X)}{\partial X} = \dfrac{\partial \left(X^{'}.A.X\right)}{\partial X} = A.X + A^{'}.X}$

si de plus A est symétrique : $(A = A^{'})$

alors $\boxed{\dfrac{\partial f(X)}{\partial X} = 2.A.X}$

Dérivée seconde

Quand $f\,(X)$ est une forme quadratique

$$f\,(X) = X^{'}.A.X$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = A.X + A^{'}.X$$

alors $\boxed{\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \frac{\partial\left(A.X+A^{'}.X\right)}{\partial X} = A^{'} + A}$

si de plus A est symétrique, soit : $A = A^{'}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = 2.A}$$

C'est une matrice appelée :
matrice **HESSIENNE** (H)

3 Recherche des extrema

Condition nécessaire pour obtenir un maximum ou un minimum de $f(X)$ au point $X = X_0$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = 0 \text{ en ce point}$$

Condition suffisante pour avoir un :

- 1 - **Maximum :** matrice hessienne évaluée en X_0 définie négative.
- 2 - **Minimum :** matrice hessienne évaluée en X_0 définie positive.

Recherche des extrema
(*cf.* paragraphe 5.3)

- On résout l'équation : $\frac{\partial f(X)}{\partial X} = 0$

- On présente deux exemples de résolution.

  (Les deux exemples doivent être traités car on a besoin de ces résultats par la suite).

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques

Soient A et B deux matrices symétriques, de même taille. On suppose que B est inversible.

Alors le rapport : $\boxed{\frac{U'.A.U}{U'.B.U}}$ est maximal pour U, vecteur propre de $B^{-1}A$, associé à la plus grande valeur propre λ.

λ est alors la valeur du maximum.

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques

(*cf.* paragraphe 5.3.4)

On prend cet exemple car on l'utilise par la suite.

Remarques :

- Une matrice symétrique et réelle est :
  - Diagonalisable.
  - Ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres sont orthogonaux.

- Une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont positives est définie positive.

- Une matrice A est définie positive si $X'AX > 0$ quelque soit X.

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques (*démonstration*)

Un extremum de $\frac{U'.A.U}{U'.B.U}$ s'obtient en annulant sa dérivée :

$$\frac{\left(U'.B.U\right)(2A.U)-\left(U'.A.U\right)(2B.U)}{\left(U'.B.U\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(U'.B.U\right).A.U=\left(U'.A.U\right).B.U$$

$$A.U=\left(\frac{U'.A.U}{U'.B.U}\right).B.U \qquad (1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vecteur}\\ \text{propre}}}{B^{-1}.\ A\ .\ U} \quad = \underbrace{\left(\frac{U'.A.U}{U'.B.U}\right)}_{\substack{\uparrow\\ \text{valeur}\\ \text{propre}}}.\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vecteur}\\ \text{propre}}}{U} \qquad (2)$$

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques (*démonstration*)

- On rappelle la formule de la dérivée d'un quotient puis on annule cette dérivée :

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = 0$$

$$\left(\frac{U'.A.U}{U'.B.U}\right) \text{ est un scalaire}$$

- (2) est obtenue à partir de (1) en multipliant par B^{-1} à gauche, dans les deux termes de l'égalité.

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques (*démonstration*)

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{vecteur}\\\text{propre}}}{B^{-1}.\ A\ .\ U} \quad = \underset{\substack{\uparrow\\\text{valeur}\\\text{propre}}}{\underbrace{\left(\frac{U'.A.U}{U'.B.U}\right)}}. \quad \underset{\substack{\uparrow\\\text{vecteur}\\\text{propre}}}{U}$$

Donc :

- U est le vecteur propre de $B^{-1}.A$ associé à la valeur propre $\frac{U'.A.U}{U'.B.U}$.
- Le maximum est donc atteint par la valeur propre maximale.
- Après avoir trouvé la valeur propre, on peut choisir un vecteur propre particulier, par exemple U tel que : $U'.B.U = 1$.
- Les autres sont obtenus par multiplication par un nombre quelconque.

Maximisation du quotient de 2 formes quadratiques (*démonstration*)

Remarques :

- Si U_1 réalise le maximum $(U_1'.B.U_1 \neq 0)$ tous les $k.U_1$ $(\forall k \in \mathbb{R})$ aussi. En effet :

$$\frac{(k.U_1)'\,A\,(k.U_1)}{(k.U_1)'\,B\,(k.U_1)} = \frac{k^2.\left(U_1'.A.U_1\right)}{k^2.\left(U_1'.B.U_1\right)} = \frac{U_1'.A.U_1}{U_1'.B.U_1}$$

- Parmi tous ces vecteurs, il en existe un U_0 tel que $U_0.B.U_0 = 1$.
  C'est le vecteur $U_0 = \frac{U_1}{\sqrt{U_1'.B.U_1}}$ car :

$$\left(\frac{U_1}{\sqrt{U_1'.B.U_1}}\right)'.B.\left(\frac{U_1}{\sqrt{U_1'.B.U_1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{U_1'.B.U_1}}\right)^2\left(U_1'.B.U_1\right) = 1$$

- $U'.B'.U = 1$ est la condition habituellement utilisée.

Maximisation d'une forme quadratique

Maximiser $X'AX$:

- Sous la contrainte $X'X = 1$ (la norme de X est égale à 1).
- Avec A une matrice symétrique définie positive (telle que : $< A.X, X >= X'AX > 0$).

revient à maximiser :

$$\left(\frac{X'.A.X}{X'.I.X}\right) = \left(\frac{X'.A.X}{X'.X}\right)$$

avec $B = I$ la matrice unité.

C'est le même problème que celui vu précédemment.

Maximisation d'une forme quadratique

Remarque : On passe rapidement sur la maximisation d'une forme quadratique car l'exemple (iris *setosa*) va être présenté immédiatement après.

L'intérêt de ce qui vient d'être dit réside dans le fait que l'exemple iris *setosa* est traité en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange (*cf.* paragraphe 5.3.1) et non la méthode présenté ici (*cf.* paragraphe 5.3.4).

La méthode présentée ici n'est qu'un cas particulier de la maximisation sous la contrainte $X'.X = 1$ du rapport de 2 formes quadratiques avec $B = I$.

La solution est le vecteur propre de longueur 1 ($X'.X = 1$) associé à la valeur propre maximale de $B^{-1}.A = I.A = A$.