PARTIE IV-B

VALEURS ET VECTEURS PROPRES

1 Notion de valeur et de vecteur propre

- **Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice**
- **Généralisation**

2 Propriétés

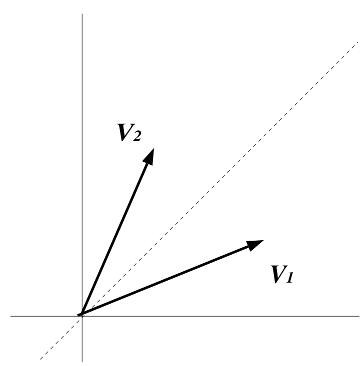
3 Exercices

- **Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice**
- **L'exemple iris *setosa***

1 Notion de valeur et de vecteur propre Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

Soit l'application $f_1 \;:\; I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$

$$f_1 : \quad V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Quels sont les vecteurs V_1 du plan tels que :

$A_1.V_1 \;=\; \lambda V_1$ avec $\lambda \in I\!R$?

1 Notion de valeur et de vecteur propre
Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

(*cf.* paragraphe 4.4)

Soit f_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout vecteur V_1 associe son symétrique par rapport à la 1*ère* bissectrice. Le transformé d'un vecteur V_1 de coordonnées $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ est un vecteur V_2 de coordonnées $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ telles que $\begin{cases} x_2 = y_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$.

A cette application f_1 est associée une matrice :

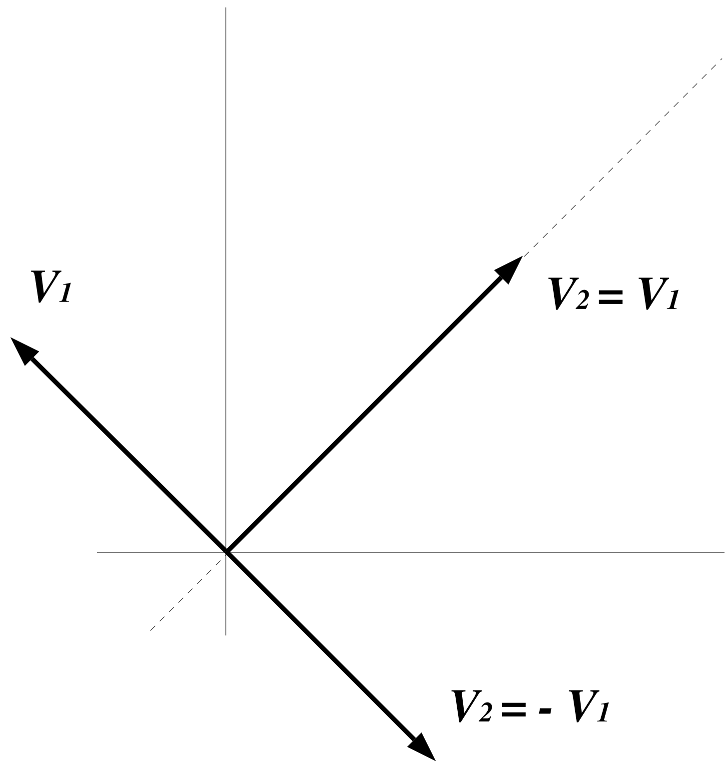
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- On vérifiera au tableau qu'on a bien $V_2 = A_1 . V_1$, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$

- On recherche l'ensemble des vecteurs V_1 du plan dont le transformé par f_1 est un vecteur colinéaire à V_2. Autrement dit tel que :

$$V_2 = \lambda V_1 \ \text{ avec } \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice



Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

Deux ensembles de vecteurs satisfont à cette propriété :

- L'ensemble des vecteurs $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ tels que $y_1 = x_1$. Ces vecteurs sont transformés en eux-mêmes. Pour ces vecteurs, on a $\lambda = 1$.
- L'ensemble des vecteurs $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ tels que $y_1 = -x_1$. Ces vecteurs sont transformés en un vecteur de sens opposé. Pour ces vecteurs, on a $\lambda = -1$.

Ces deux ensembles de vecteurs sont appelés **vecteurs propres** de l'application f_1 (ou de la matrice A_1) associés respectivement aux **valeurs propres** $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

Généralisation

Soit :

- E un espace vectoriel de dimension n.
- A la matrice associée à l'application linéaire f de E dans E.

$V \in E$ est un **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ si $A.V = \lambda V$.

Généralisation

On insiste à nouveau sur l'équivalence entre les valeurs et vecteurs propres d'une application linéaire et les valeurs et vecteurs propres de la matrice associée.

2 Propriétés

- A une matrice carrée A d'ordre n sont associées au plus n valeurs propres réelles.
- Les valeurs propres sont les racines d'un polynôme de degré n appellé **polynôme caractéristique**. Elles satisfont à l'équation :

$$\det\ (A - \lambda I) = 0 \qquad \text{avec } \ I = \text{matrice identité}$$

- Si A est une matrice **symétrique** (cas des matrices d'inertie et de variance-covariance) :
  - toutes les racines du polynôme caractéristique sont **réelles**.
  - Si toutes les racines sont positives la matrice A est dite **définie positive**.
  - Si λ_i et λ_j sont deux valeurs propres distinctes les vecteurs propres associés sont **orthogonaux**.

2 Propriétés
(*cf.* paragraphe 4.4.2)

Soit une matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, λ et $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ une valeur et un vecteur propre de A. Par définition $A.V = \lambda V$. Soit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 = \lambda y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}y_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, y_1 = 0 \end{cases}$$

On a là un système homogène qui admet des solutions non nulles si et seulement si :

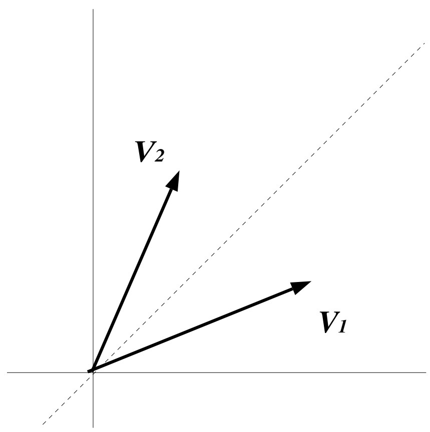
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Les valeurs propres de A sont donc les solutions de l'équation $\det (A - \lambda I) = 0$.

3 Exercices
Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

Soit l'application $f_1 \ : \ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x_2 = y_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$



La matrice A_1 associée à f_1 est $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rechercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A_1 ?

Symétrie par rapport à la *1ère* bissectrice

(On donne la solution au tableau)

- Les valeurs propres de la matrice A_1 sont les solutions de l'équation $det(A_1 - \lambda I) = 0$. Soit :

  $$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

  Il y a donc 2 solutions $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont tels que :

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

  D'où $y_1 = x_1$; $e_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

  De même les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -1$ sont tels que $y_2 = -x_2$; $e_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

  On retrouve bien les valeurs et les vecteurs propres trouvés intuitivement.

L'exemple iris *setosa*

On a appelé W_2 la matrice d'inertie de la population d'Iris Setosa

$$W_2 = \begin{bmatrix} 6.088 & 4.865 \\ 4.865 & 7.046 \end{bmatrix}$$

- Pouvez vous écrire l'équation qui permet de calculer les valeurs et vecteurs propres de W_2 ?

- Qu'observe t'on si on trace dans le plan, à partir du point moyen de la population, deux vecteurs propres associés respectivement aux deux valeurs propres de W_2 ?

L'exemple iris *setosa*
(*cf.* paragraphe 5.6)

On ne demande pas de résoudre entièrement l'équation, mais seulement d'écrire le polynôme caractéristique. On donne la solution au tableau.
On écrit $det(W_2 - \lambda I) = 0$. Soit encore :

$$\begin{vmatrix} 6.088 - \lambda & 4.865 \\ 4.865 & 7.046 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6.088 - \lambda)(7.046 - \lambda) - 4.865^2 = 0$$

Les valeurs propres de W_2 sont solutions de :

$$\lambda^2 - 13.134\lambda + 19.228 = 0$$

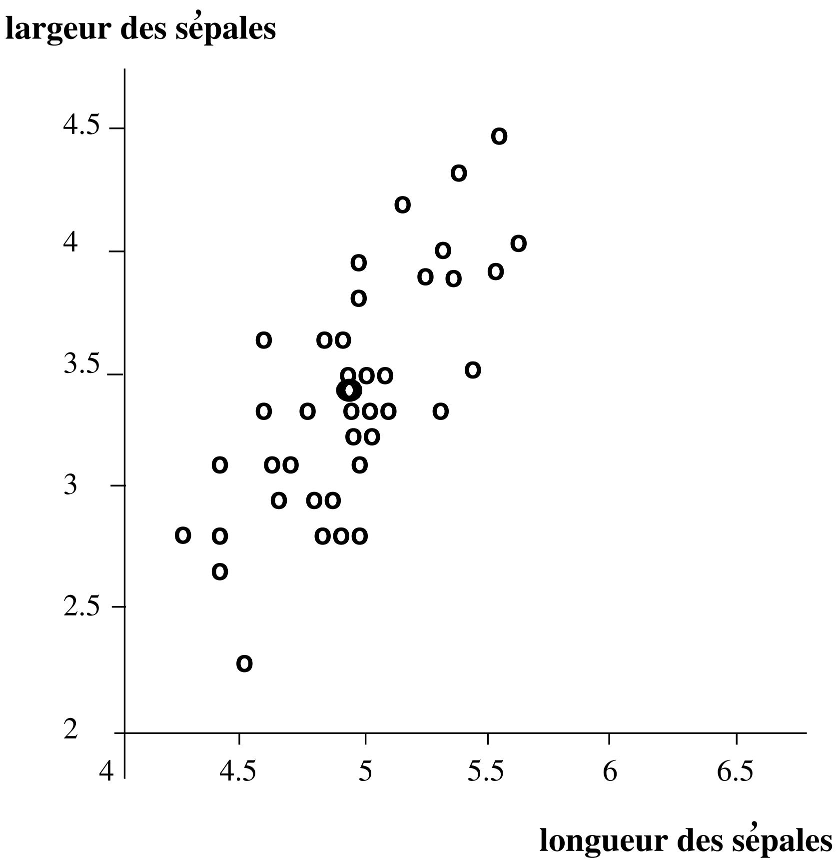
On trouve deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = 11.455 \text{ et } \lambda_2 = 1.679$$

associées respectivement aux groupes de vecteurs propres :

- les vecteurs $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ tels que $y_1 = 1.103x_1$
- les vecteurs $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ tels que $y_2 = -0.906x_2$

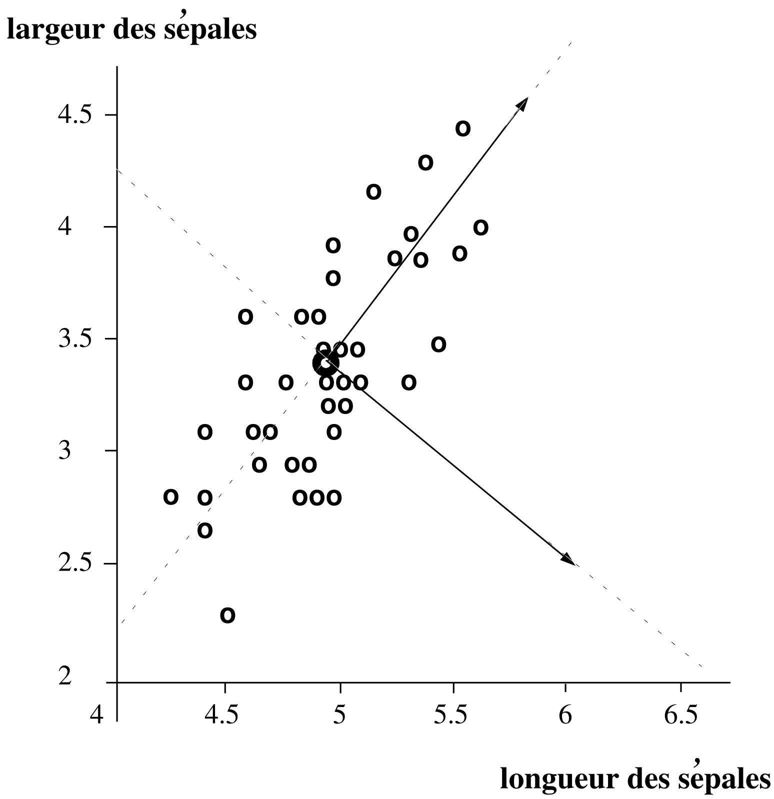
L'exemple iris *setosa*



L'exemple iris *setosa*

On a représenté les données initiales (longueur des sépales et largeur des sépales) de la population iris *setosa* dans un système d'axes orthonormés.

L'exemple iris *setosa*



L'exemple iris *setosa*

Les vecteurs propres associés à la *1ère* valeur propre $\lambda_1 = 11.455$ sont de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1.103x_1 \end{bmatrix}$.

On peut par exemple tracer le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1.103 \end{bmatrix}$.

Les vecteurs propres associés à la *2ième* valeur propre $\lambda_2 = 1.679$ sont de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ -0.906x_1 \end{bmatrix}$.

On peut par exemple tracer le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -0.906 \end{bmatrix}$.

On observe que ces 2 vecteurs sont orthogonaux (on renverra aux propriétés vues au transparent numéro 4).

On observe que les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre de la matrice d'inertie W_2 semblent correspondre à la direction de **plus grande variabilité du nuage**.

C'est une propriété générale qui va être démontrée dans la suite de ce cours.