PARTIE III

1 MATRICES

- **Ranger des données**
- **Traiter des données**
- **Faire une transformation**

2 MATRICES PARTICULIERES

- **Matrice carrée**
- **Matrice nulle**
- **Matrice diagonale**
- **Matrice identité** I
- **Matrice** J
- **Matrice transposée :** A' **transposée de** A
- **Matrice symétrique**

PARTIE III

3 OPERATIONS MATRICIELLES

- **Addition**
- **Multiplication par un scalaire**
- **Multiplication de deux matrices**
- **Transposée d'un produit de matrices**
- **Trace**
- **Matrice idempotente**
- **Matrice inverse**
- **Notion de rang**
- **Déterminant d'une matrice**

1 MATRICES
Ranger des données

- **Exemple :** âge, poids et taille de 5 individus

$$\begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix}$$

une ligne = un individu
une colonne = une variable

Matrice (5×3)

- **Notation**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \qquad A_{(n \times p)} \; ou \; A_{(n,p)}$$

$$A = [a_{ij}]$$

1 MATRICES
Ranger des données
(*cf.* paragraphe 1)

- On montre sur un exemple que des observations faites sur des individus peuvent être rangées dans un tableau. Les lignes se réfèrent aux individus et les colonnes aux variables.
- On rappelle que le tableau ainsi construit s'appelle une **matrice** et que les lignes et les colonnes du tableau sont des **vecteurs lignes** et des **vecteurs colonnes**.
- On donne les notations couramment utilisées.

Traiter des données

- **Exemple :** âge, poids, taille de 5 femmes

$$F = \begin{bmatrix} 15 & 50 & 160 \\ 20 & 65 & 152 \\ 25 & 63 & 175 \\ 22 & 55 & 180 \\ 30 & 70 & 167 \end{bmatrix} \qquad\qquad F_{(5\times 3)}$$

- **Exemple :** âge, poids, taille de 5 hommes

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 82 & 187 \\ 20 & 65 & 179 \\ 25 & 78 & 175 \\ 22 & 78 & 175 \\ 22 & 68 & 180 \\ 30 & 70 & 187 \end{bmatrix} \qquad\qquad H_{(5\times 3)}$$

- Rechercher les liaisons âge, poids, taille chez les femmes et chez les hommes.

  Comparer les résultats.

Traiter des données

- On prend l'exemple de trois variables observées sur deux groupes distincts d'individus, des femmes et des hommes. Les observations sont rangées dans deux matrices H et F. On précise les dimensions de ces matrices.
- On dit que cette présentation des données est pratique pour calculer, indépendamment sur chaque groupe d'individus, des variables statistiques telles que des moyennes, des coefficients de corrélation, *etc.*
- On aurait pu superposer les deux tableaux. Dans ce cas, les 5 premières lignes se seraient référées aux femmes et les 5 suivantes aux hommes. La matrice ainsi écrite aurait 10 lignes et 5 colonnes.

Faire une transformation

Exemple : Faire correspondre à chaque homme X d'âge (x_1), de poids (x_2) et de taille (x_3) :

- Un indice y_1 de risque de cancer.
- Un indice y_2 de risque d'infarctus du myocarde.

- Le produit de la matrice R des risques par unité d'âge, de poids et de taille par X permet d'obtenir le vecteur Y des risques y_1 et y_2.

$$Y_{(2\times 1)} = R_{(2\times 3)} \times X_{(3\times 1)}$$

- La transformation qui à chaque individu fait correspondre les deux indices de risque est une **application linéaire**.
- R est la **matrice associée** de l'application linéaire.

Faire une transformation

(*cf.* paragraphe 3.9.4)

- E l'ensemble des hommes sur lesquels on a observé l'âge x_1, le poids x_2 et la taille x_3. Soit

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- F l'espace des couples Y avec y_1 le risque de cancer et y_2 le risque d'infarctus du myocarde.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

- r_{11}, r_{12}, r_{13} respectivement les risques de cancer associés à une unité d'âge, de poids et de taille. r_{21}, r_{22}, r_{23} respectivement les risques d'infarctus du myocarde associés à une unité d'âge, de poids et de taille.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{bmatrix}$$

La matrice R telle que $Y = R.X$ est la matrice associée à l'application linéaire f de E dans F qui, à chaque vecteur de E, fait correspondre un et un seul vecteur de F.

2 MATRICES PARTICULIERES

Matrice carrée : $M_{(n \times n)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice nulle : $a_{ij} = 0 \; \forall \, i, \; j$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 MATRICES PARTICULIERES

(*cf.* paragraphe 4.1)

Matrice identité I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice J : $a_{ij} = 1 \; \forall \, i, \; j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice transposée : A' transposée de A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée ($A = A'$).

On n'écrit en général que la partie triangulaire haute ou basse. Soit :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 OPERATIONS MATRICIELLES

Addition

Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ des matrices de **même dimension**. La somme de A et de B est une matrice C telle que :

$$C = A + B \text{ a pour éléments : } c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple :

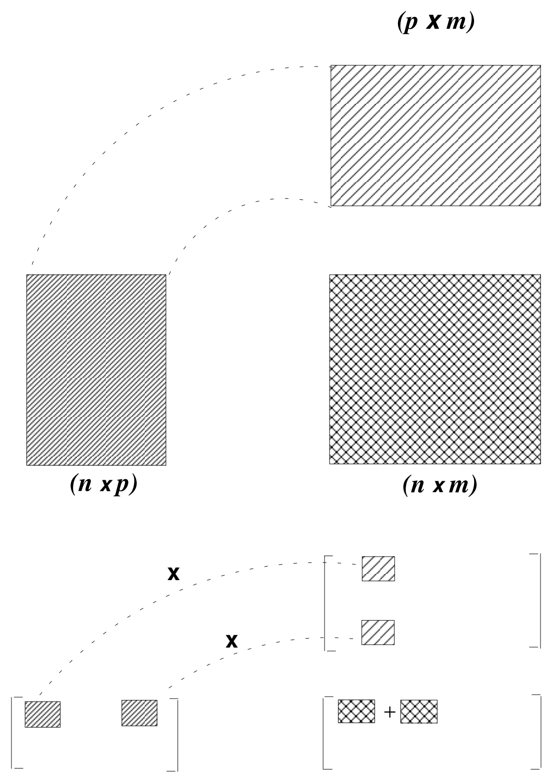
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+6 \\ 5+3 & 4+1 \\ 8+2 & 4+5 \\ 3+2 & 2+2 \end{bmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad = \qquad ?$$

3 OPERATIONS MATRICIELLES
(*cf.* paragraphe 4.2)

Multiplication de deux matrices



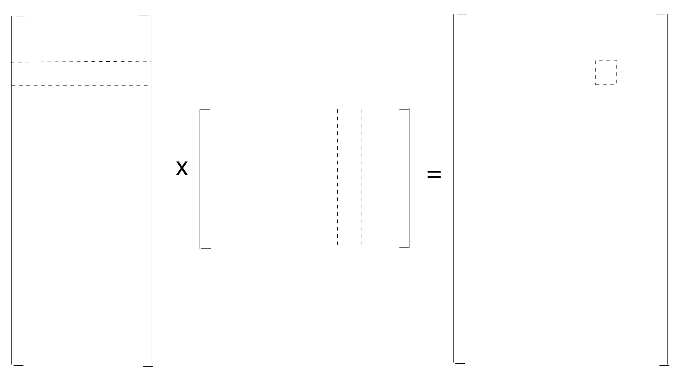
$$A_{(n \times p)} \qquad B_{(p \times m)} \qquad \rightarrow \qquad C = A \times B$$

Les éléments de $C_{(n \times m)}$ sont :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \; b_{kj}$$

Multiplication de deux matrices

- Un autre dessin plus classique peut être fait au tableau, c'est le dessin suivant :



- Multiplier **ligne par colonne**, c'est faire la somme des produits des termes de **même rang** dans la ligne et la colonne considérée.
- Préciser la contrainte sur les dimensions : le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.

Multiplication de deux matrices

Exercices : effectuer les produits

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Multiplication de deux matrices
Solutions

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 15 & 11 \\ 2 & 8 & 18 & 34 & 28 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 & 11 \\ 6 & 12 & 22 & 10 & 26 \\ 10 & 29 & 40 & 18 & 47 \\ 11 & 11 & 12 & 6 & 15 \\ 17 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemple du repas du laboratoire

6 personnes ont récapitulé leur consommation :

personne 1 :	1 bière + 2 verres de vin
personne 2 :	1 apéritif + 1 bière + 1 digestif
personne 3 :	jus d'orange + eau
personne 4 :	2 bières + 4 verres de vin + 1 digestif
personne 5 :	eau
personne 6 :	1 bière

Sachant que :

- Les titres des différentes boissons sont :

apéritif	20 °
bière	5 °
vin	13 °
digestif	30 °

- 1 degré alcoolique : 10g/l

Quelle quantité d'alcool (g) ont-elles avalées ?

Solution

1 verre d'apéro	: 20 cl et 20 °	$\Rightarrow$	40 g
1 demi	: 25 cl et 5 °	$\Rightarrow$	12,5 g
1 verre de vin	: 20 cl et 13 °	$\Rightarrow$	26 g
1 verre digestif	: 10 cl et 30 °	$\Rightarrow$	30 g

Personne **Consommation** **g alcool**

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{bmatrix} 40 \\ 12,5 \\ 26 \\ 30 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 64,5 \\ 82,5 \\ 0 \\ 159 \\ 0 \\ 12,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Transposée d'un produit de matrices

$$(A.B)' = B.A'$$

Exemple :

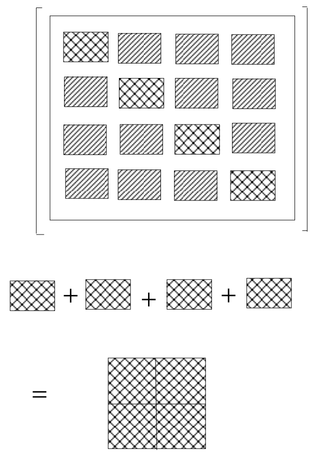
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'.A' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (A.B)'$$

Trace



$$\text{Donner la trace de } : A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrice idempotente

Une matrice $A_{(n \times n)}$ est idempotente si :

$$AA = A$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice idempotente

L'idempotence est un concept important lié à la notion de projecteurs associés à une décomposition en somme directe (*cf.* paragraphe 4.5).

Matrice inverse

On appelle matrice inverse de A la matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

si A^{-1} existe, elle est unique, A est dite non singulière

si A^{-1} n'existe pas, A est dite singulière

Exemple : Inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ 2a + c & = & 0 \\ 2b + d & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse d'une matrice diagonale ?

Matrice inverse
(*cf.* paragraphe 4.2)

- L'exemple traité ici pourra être repris après avoir vu le calcul d'un déterminant.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (matrice adjointe)}$$

$$A^{*'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (matrice adjointe transposée)}$$

$$det(A) = 1 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.A^{*'} = A^{*'}$$

- L'inverse d'une matrice diagonale D est une matrice diagonale D^{-1} avec pour éléments diagonaux les inverses des éléments diagonaux de D.

NOTION DE RANG

Nombre de vecteurs linéairement indépendants

Vecteurs-ligne (si $n < p$)

Vecteurs-colonne (si $n > p$)

Si tous vecteurs sont linéairement indépendants alors la matrice est de plein rang.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} Rang = 3 \\ \Longleftrightarrow \text{matrice} \\ \text{de plein rang} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad Rang = 2$$

NOTION DE RANG

(*cf.* paragraphe 4.2)

DETERMINANT D'UNE MATRICE

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

on l'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$AX = B$$

Si A est inversible alors le système d'équations admet une solution :

$$X = A^{-1}B$$

Pour savoir si A^{-1} existe, on calcule son déterminant. Si $det(A) \neq 0$ alors A^{-1} existe.

DETERMINANT D'UNE MATRICE
(*cf.* paragraphe 4.2)

- On donne au tableau la notation suivante :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

- On rappelle les définitions suivantes :
  - Le **mineur** de l'élément a_{ij} de A est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A.
  - Le **cofacteur** de a_{ij} est le mineur multiplié par $(-1)^{i+j}$.
  - La matrice A^* des cofacteurs de A est appelée **matrice adjointe**.
- On écrit (au tableau) le mineur de l'élément $a_{11} = 3$, le cofacteur de l'élément $a_{12} = 5$ puis, on en fait calculer un ou deux autres par les stagiaires.

Calcul du déterminant

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) = \ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 24 + 25 + 4 - 4 - 30 - 20 = -1$$

$$A \text{ non singulière} \iff \begin{array}{l} \text{1- } A \text{ de plein rang} \\ \text{2- } det(A) \neq 0 \\ \text{3- } A^{-1} \text{ existe} \end{array}$$

Calcul du déterminant

- On peut montrer (au tableau) le calcul du déterminant par la méthode des mineurs. Soit :

$$det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 3 \times (-2) - 5 \times (-1) + 1 \times (0) = -1$$

- On demande aux stagiaires de calculer le déterminant par la méthode des mineurs associés aux éléments d'une colonne.