PARTIE I

1 ESPACE VECTORIEL

- Addition de 2 vecteurs
- Multiplication par un scalaire
- Propriétés de l'addition
- Propriétés de la multiplication par un scalaire
- Propriétés déduites des précédentes

1.1 Sous espace vectoriel

1.2 Combinaison linéaire

1.3 Indépendance linéaire

1.4 Base d'un espace vectoriel

PARTIE I

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire

- **Intérêt du produit scalaire**
- **Propriétés du produit scalaire**

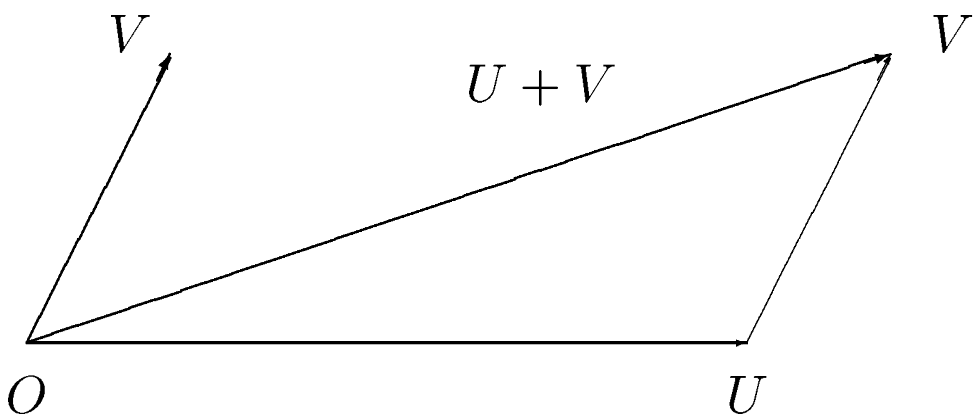
1.6 Décomposition en somme directe

2 PROJECTIONS

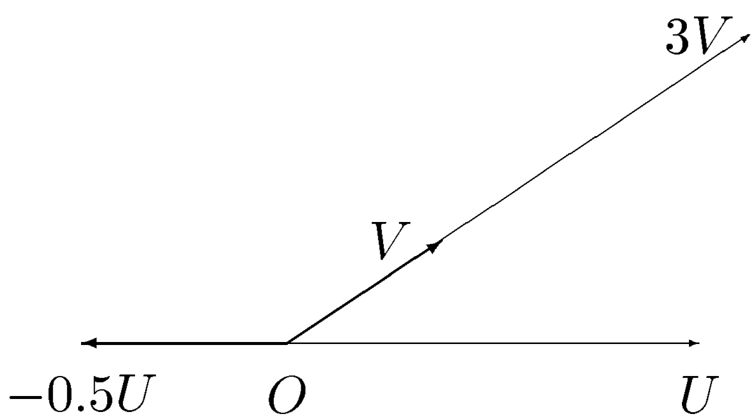
3 COORDONNEES DANS $\mathbb{R}^3$

1 ESPACE VECTORIEL

- **Addition de 2 vecteurs**



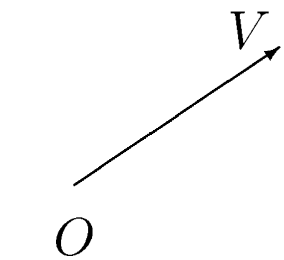
- **Multiplication par un scalaire**



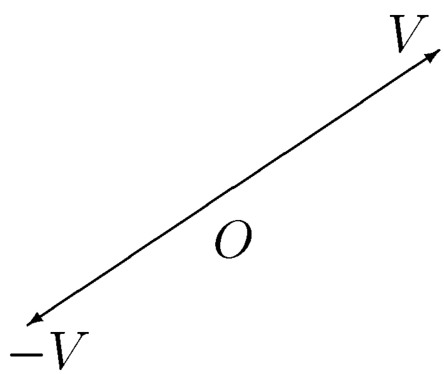
1 ESPACE VECTORIEL

- On définit géométriquement un vecteur comme un segment de droite caractérisé par une longueur, une direction et un sens (*cf.* paragraphe 1.1).
- On représente géométriquement l'addition de 2 vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire.
- On fait des digressions (au tableau) sur :
  - L'égalité de 2 vecteurs (*cf.* paragraphe 1.1.1).
  - La différence de 2 vecteurs (*cf.* paragraphe 1.1.3).
- On donne la définition d'un espace vectoriel : collection d'éléments, appelés vecteurs, qui peuvent être additionnés et multipliés par des scalaires.

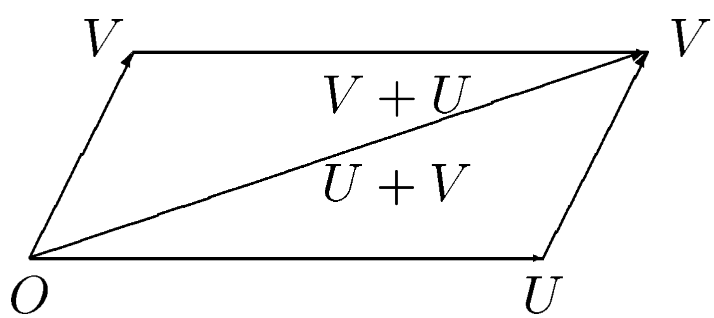
- **Propriétés de l'addition**



$$\boxed{\phi + V = V + \phi = V}$$



$$\boxed{V + (-V) = \phi}$$



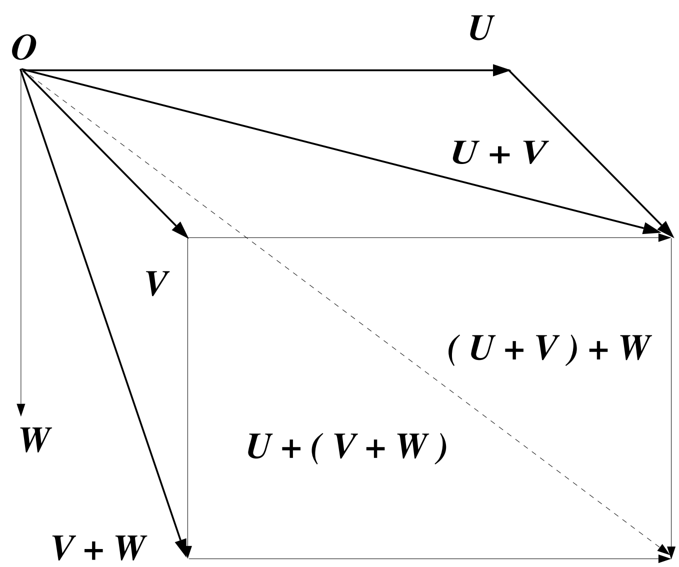
$$\boxed{U + V = V + U}$$

Propriétés de l'addition

Les propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont données au paragraphe 3.1.

- Existence d'un vecteur nul (ϕ).
- Existence du vecteur $-V$ (l'opposé de V).
- Commutativité de l'addition.

Propriétés de l'addition

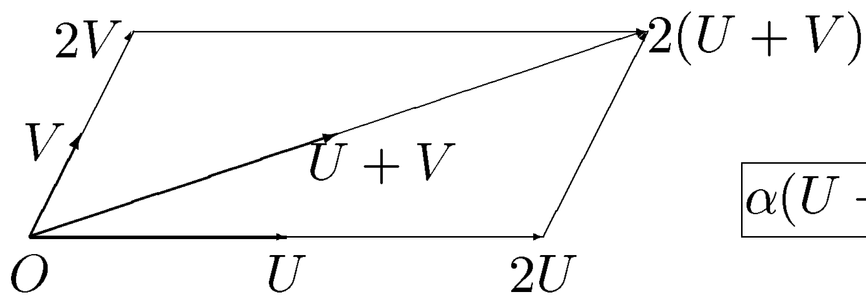


$$\boxed{U\,(V+W) = (U+V)+W}$$

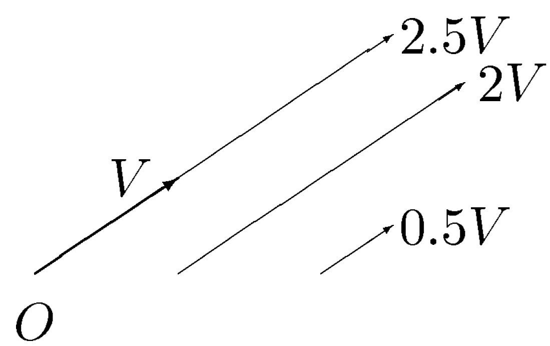
Propriétés de l'addition

- Associativité de l'addition.

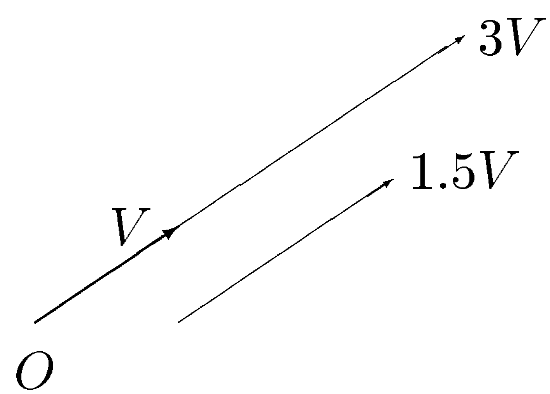
Propriétés de la multiplication par un scalaire



$$\boxed{\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V}$$



$$\boxed{(\alpha+\beta)V = \alpha V + \beta V}$$



$$\boxed{(\alpha\beta)V = \alpha(\beta V)}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire

- Associativité de l'addition par rapport à la multiplication :
  - Des vecteurs.
  - Des scalaires.
- Associativité de la multiplication.

Propriétés déduites des précédentes

- $(\alpha+\beta)U = \alpha U + \beta U$

$$si\ \beta = -\alpha \implies \begin{cases} (\alpha+\beta)U = o.U \\ \alpha U + \beta U = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{o.U = \phi}$$

- $\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V$

$$si\ V = -U \implies \begin{cases} \alpha(U+V) = \alpha \vee \\ \alpha U + \alpha V = \alpha U + (-\alpha U) = \phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha\phi = \phi}$$

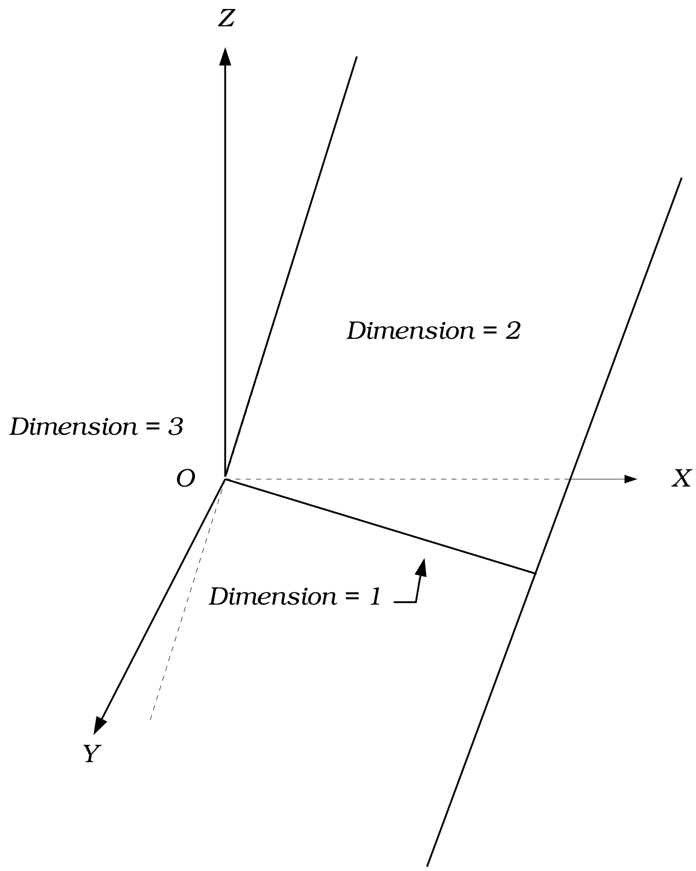
- $\boxed{(-1)V = -V}$

Propriétés déduites des précédentes
(*cf.* paragraphe 3.1)

L'objectif est de montrer qu'il est possible de déduire des règles de travail à partir des propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire. On montre que :

- La multiplication d'un vecteur par zéro donne le vecteur nul.
- La multiplication d'un scalaire par le vecteur nul donne le vecteur nul.
- La multiplication d'un vecteur par -1 donne le vecteur opposé.

1.1 Sous espace vectoriel



1.1 Sous espace vectoriel

Un sous espace vectoriel est un sous ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel, tel que les opérations (addition, multiplication par un scalaire) sur les vecteurs du sous espace donnent des vecteurs appartenant eux-mêmes au sous espace vectoriel.

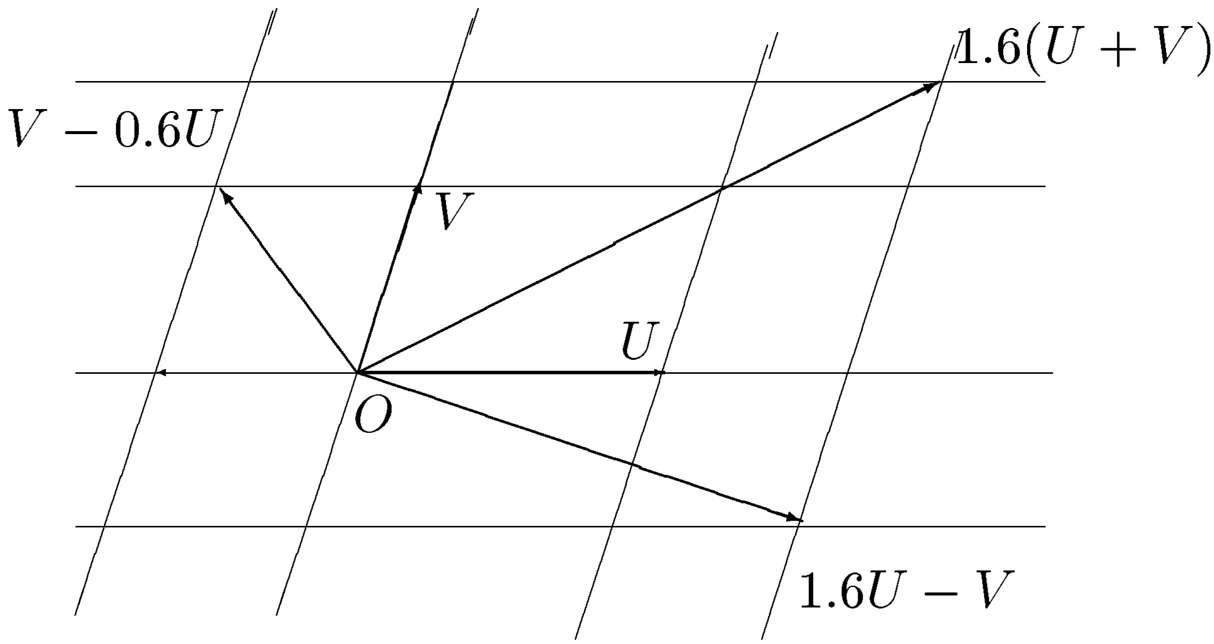
Exemples :

- Le sous espace dont le seul élément est ϕ.
- Une droite passant par l'origine est un sous espace vectoriel du plan.
- Un plan contenant l'origine est un sous espace vectoriel de l'espace à trois dimensions.

Remarque :

Un sous espace qui ne contient pas l'origine n'est pas un sous espace vectoriel. C'est un sous espace **affine** (*cf.* paragraphe 3.7).

1.2 Combinaison linéaire



1.2 Combinaison linéaire

- Soient U et V deux vecteurs, non colinéaires, du plan.

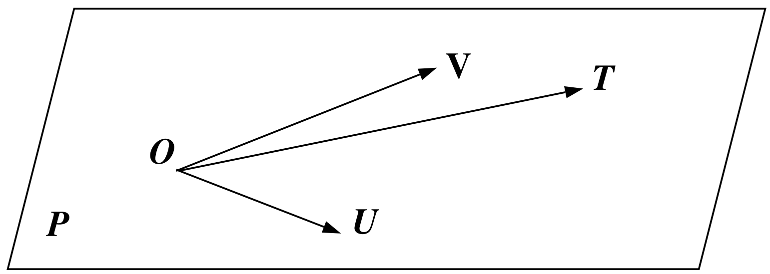
  On indique que les vecteurs $V-0.6U$, $1.6(U+V)$ et $1.6U - V$, construits à partir des opérations de multiplication par un scalaire et d'addition, sont des combinaisons linéaires des vecteurs U et V.

- On donne la définition d'une combinaison linéaire (*cf.* paragraphe 3.2) :

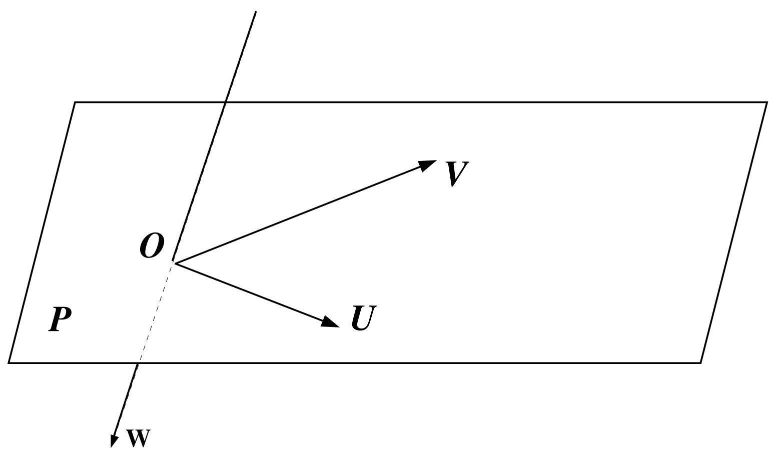
  V est une combinaison linéaire des vecteurs U_1, U_2, $\cdots$, U_n s'il existe des scalaires α_1, α_2, $\cdots$, α_n tels que :

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + ... + \alpha_n U_n$$

1.3 Indépendance linéaire



Ces vecteurs sont-ils indépendants ?



U, V et W sont-ils indépendants ?

1.3 Indépendance linéaire

On définit l'indépendance linéaire (*cf.* paragraphe 3.4) :
Aucun vecteur ne peut être exprimé comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

- Dans le premier cas de figure, chaque vecteur représenté dans le plan peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des deux autres. Ces vecteurs sont linéairement dépendants.
- Dans le deuxième cas de figure, aucun vecteur ne peut être représenté comme une combinaison linéaire des deux autres, ils sont linéairement indépendants.

1.4 Base d'un espace vectoriel

- Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent l'espace dans sa totalité.
- Tout vecteur est défini de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base.
- Un espace vectoriel a toujours une base (mais elle n'est pas unique).
- Chaque base a le même nombre d'éléments, ce nombre représente la dimension de l'espace.

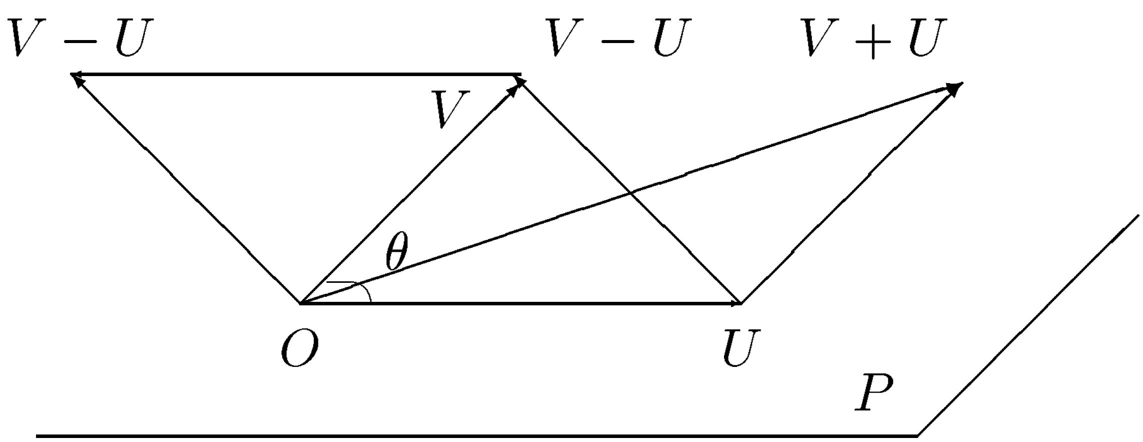
1.4 Base d'un espace vectoriel

- **Exemple :** deux vecteurs U et V non colinéaires forment une base du plan.
- On montre (au tableau) que tout vecteur est défini de façon unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de base.
  - Soit (U, V) une base du plan P.
  - On suppose que : $T = \alpha U + \beta V = \alpha' U + \beta' V$
  - On déduit que :

$$\begin{aligned} T - T &= \alpha U + \beta V - \alpha' U - \beta' V \\ &= (\alpha - \alpha')U + (\beta - \beta')V \\ &= \phi \end{aligned}$$

$$U \text{ et } V \text{ indépendants} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$$

1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire



1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire

(*cf.* paragraphe 1.1.5)

- **Notations** :
  La longueur du vecteur U est notée $|U|$
  La distance de U à V est notée $|V - U|$
- Soit θ l'angle entre U et V. Soit le triangle de sommets O, U et V, la règle du cosinus permet d'écrire :
  $$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2 + 2|U||V|cos\theta \quad (1)$$
  Si l'angle θ est droit :
  $$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$
- La liaison entre U et V est décrite par $2|U||V|cos\theta$. C'est cette quantité (au coefficient 2 près) qui est appelée **produit scalaire** des vecteurs U et V, elle est notée : $< U, V >$
  $$\boxed{< U, V >= |U||V|cos\theta}$$
  $$(1) \Longleftrightarrow |U+V|^2 \;= \|U|^2 \; \|V|^2 + \; 2 < U, V >$$

Intérêt du produit scalaire

- Longueur :

$$|U|^2 =< U,U >$$

- Distance :

$$|V - U|^2 =< U,U > + < V,V > -2 < U,V >$$

- Angle :

$$cos\theta = \frac{< U,V >}{|U||V|} = \frac{< U,V >}{(< U,V >< V,V >)^{1/2}}$$

Intérêt du produit scalaire

On montre que le produit scalaire permet de calculer des longueurs, des distances, des angles. Ces propriétés sont énoncées au paragraphe 1.1.5.

Propriétés du produit scalaire

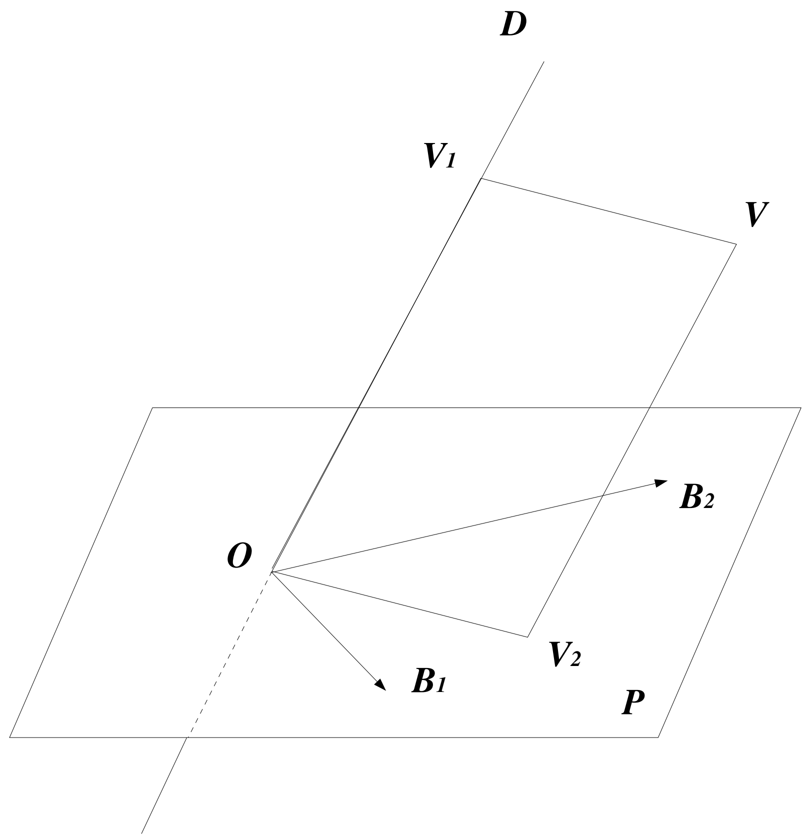
- $< U,V > = < V,U >$
- $< U,U > \ \geq 0$
- $< U,U > = 0$ si et seulement si $U = 0$
- $< \alpha U + \beta V, W > = \alpha < U,W > + \beta < V,W >$
- U et V sont orthogonaux si et seulement si :

$$< U,V > = 0$$

Propriétés du produit scalaire

Les propriétés du produit scalaire sont énoncées au paragraphe 1.1.5.

1.6 Décomposition en somme directe



1.6 Décomposition en somme directe
(*cf.* paragraphe 3.8)

Soit l'espace vectoriel $I\!R^3$.

Cet espace peut être considéré comme la résultante des deux sous espaces vectoriels suivants : la droite D et le plan P.

Dans ce cas, on écrit que :

$$I\!R^3 = D \oplus P$$

On dit que $I\!R^3$ est **somme directe** de D et de P.

On dit aussi que les sous espaces D et P sont **complémentaires**.

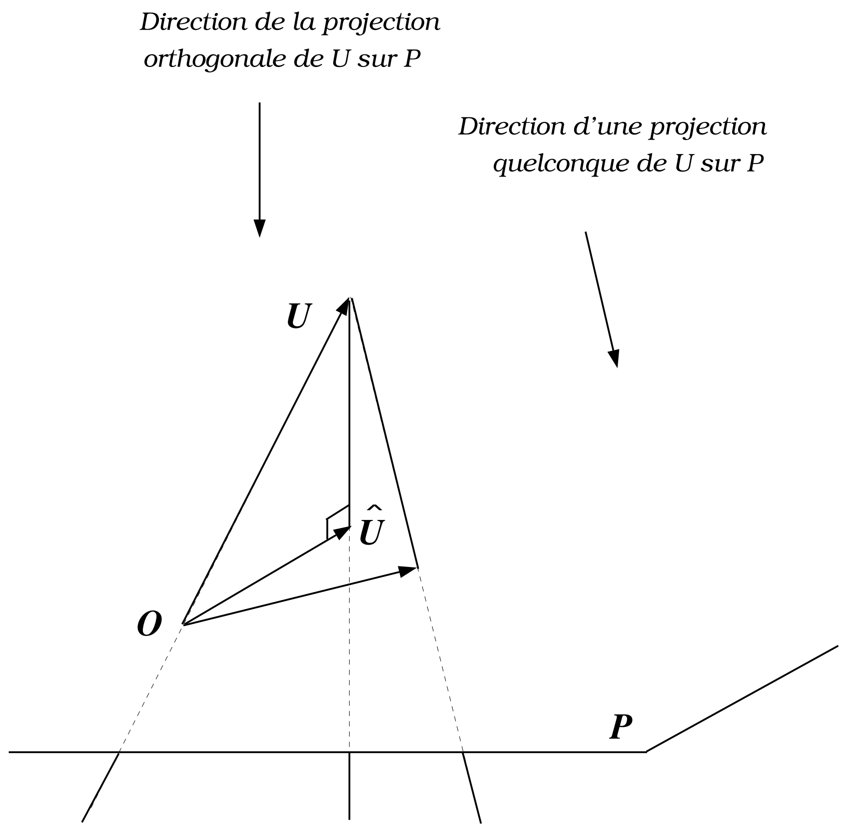
On aurait aussi pu écrire que ;

$$I\!R^3 = D \oplus B_1 \oplus B_2$$

avec B_1 et B_2 deux vecteurs linéairement indépendants (B_1 et B_2 constituent une base) de P.

Ces notions se généralisent à plus de 3 dimensions.

2 PROJECTIONS



2 PROJECTIONS
(*cf.* paragraphe 1.3)

Soit $\hat{U}$ le projeté orthogonal de U sur le plan P.

Propriétés des projections orthogonales

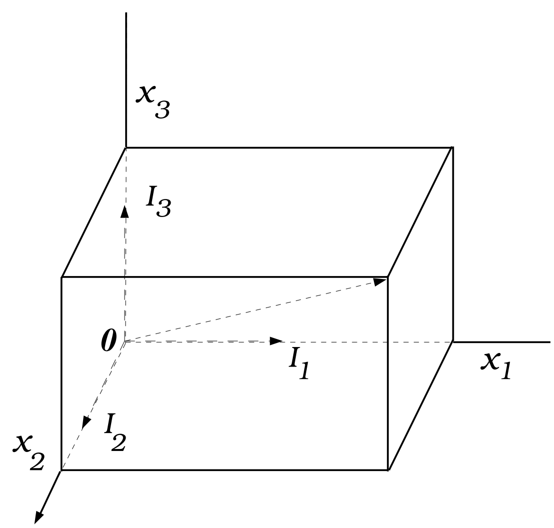
- $\hat{U}$ est dans le plan P.
- $U - \hat{U}$ est orthogonal à tout vecteur V de P.
  $U - \hat{U} \perp V \Longleftrightarrow < U - \hat{U}, V >= 0$

Autres propriétés

- $\hat{U}$ est dans P si et seulement si $\hat{U} = U$.
- U est orthogonal à P si et seulement si $\hat{U} = 0$.
- La projection de $\hat{U}$ sur P est égale à $\hat{U}$
- $|U|^2 = |\hat{U}|^2 + |U - \hat{U}|^2$
- De tous les vecteurs de P, $\hat{U}$ est le plus proche de U.
- $\widehat{\alpha U + V} = \alpha\hat{U} + \hat{V}$

3 COORDONNEES DANS $\mathbb{R}^3$

Base orthonormée : $\begin{cases} |I_1| = |I_2| = |I_3| = 1 \\ <I_1, I_2> = <I_1, I_3> = <I_2, I_3> = 0 \end{cases}$



3 COORDONNEES DANS $I\!R^3$

(*cf.* paragraphe 1.4)

On considère 3 vecteurs unitaires :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ces vecteurs sont orthogonaux :

$$< I_1, I_2 >=< I_1, I_3 >=< I_2, I_3 >= 0$$

- Ils constituent une base. Tout vecteur X peut s'écrire :

$$X = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3$$

- x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées de X pour le système d'axes défini par I_1, I_2 et I_3.

Ces notions se généralisent à plus de 3 dimensions.