ANNEXES

Annexe A - Extrait du polycopié $n°$ FPS01 (Algèbre Matricielle, J. Badia.)

1 Espace vectoriel - Géométrie

L'algèbre matricielle est d'un usage courant en statistique, c'est un moyen d'expression à la fois simple et imagé. Simple parce que le formalisme est réducteur et imagé parce qu'il est possible de représenter les objets manipulés.

Qu'est-ce qu'une matrice ?

Quand un échantillon de n individus et p variables est observé, on collecte des données sous la forme de np nombres réels x_{ij}. Chaque x_{ij} est la valeur observée de la j$ème$ variable ($j = 1, 2, \cdots, p$) sur le i$ème$ individu ($i = 1, 2, \cdots, n$).

- Ces valeurs peuvent être rangées dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes dans lequel x_{ij} est l'élément à l'intersection de la i$ème$ ligne et de la j$ème$ colonne.
  Ce tableau rectangulaire constitue la *matrice* X des données, on la représente par :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

- Chaque ligne i de X :

$$X_{i.} = [\, x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{ip} \,]$$

  peut être considérée comme les *coordonnées* d'un point ou comme un *vecteur* dans un espace de dimension p.
  Les n points $i = 1, 2, \cdots, n$ ainsi définis véhiculent la même information que celle qui est contenue dans la matrice des données. Chaque point de l'espace de dimension p représente un *échantillon individuel* et l'espace qui les contient est appelé *espace des individus*.

- Chaque colonne j de X :

$$X_{.j} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

  détermine les coordonnées d'un point ou un vecteur dans un espace de dimension n.

  Les p points ainsi définis correspondent aux variables, l'espace qui les contient est appelé *espace des variables*. Ces p points véhiculent la même information que celle qui est contenue dans le tableau des données.

- L'espace des individus et l'espace des variables sont dits *espaces duaux*. Ainsi, chaque concept ou raisonnement dans l'un de ces espaces a une image duale dans l'autre. L'une de ces images peut paraître plus simple que l'autre, c'est ce qui justifie les représentations ou les raisonnements faits dans l'un ou l'autre de ces espaces.

Les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice sont des vecteurs lignes (resp. colonnes), nous allons nous intéresser à elles. Notre objectif est de montrer qu'un vecteur peut être interprété géométriquement. Habituellement, dans le plan de la feuille, on représente un vecteur par une flèche. Deux flèches de même longueur, de même direction et de même sens représentent des vecteurs égaux que l'on désigne par des lettres surmontées de flèches telles que : $\vec{U} = \vec{V}$. Cette notation est d'autant plus lourde que l'on est parfois amené à préciser l'origine et l'extrémité d'un vecteur en écrivant par exemple le vecteur $\vec{V}$ sous la forme $\vec{OA}$ où O est l'origine et A l'extrémité du vecteur $\vec{V}$. Pour éviter cet écueil et pour simplifier l'écriture :

- Les vecteurs seront représentés soit par des lettres majuscules telles que U, V, W, X, $\cdots$, soit par OU, OV, UV, $\cdots$, si on veut préciser l'origine et l'extrémité de ces vecteurs.

- Les *composantes* d'un vecteur seront désignées par des lettres minuscules indicées. Les k composantes du vecteur U seront : $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$.

Par ailleurs, les *scalaires* et les *angles* seront désignés par des lettres grecques minuscules telles que α, β, γ, $\cdots$, θ.

1.1 Quelques représentations géométriques

Sur la *Figure 1.1*, sont représentés :

- Dans le plan P de la feuille, un point particulier O appelé *origine* du plan.
- Des segments de droites orientés U, V, $U+V$ d'origine commune O et d'extrémités respectives U, V et $U+V$.

Ces segments de droites ont une *longueur*, une *direction* et un *sens*, ce sont les représentations géométriques des vecteurs U, V, $U+V$.

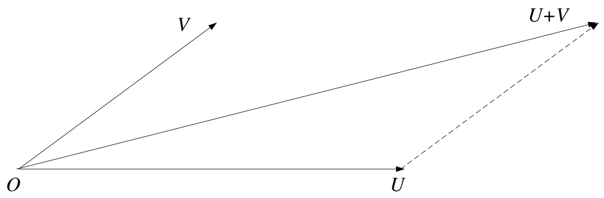

Figure 1.1 : Addition de deux vecteurs.

1.1.1 Egalité de deux vecteurs

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même longueur, même direction et même sens.

1.1.2 Addition de deux vecteurs

- Géométriquement, l'addition de deux vecteurs U et V est réalisée en traçant à l'extrémité de U (resp. de V) un vecteur égal au vecteur V (resp. U) et en reliant l'origine O de U (resp. V) à l'extrémité du vecteur placé après U. Sur la *Figure 1.1* le vecteur somme est noté $U+V$.

1.1.3 Différence de deux vecteurs

- Sur la *Figure 1.2*, sont représentés les vecteurs U, V, $-V$ et $V-U$.

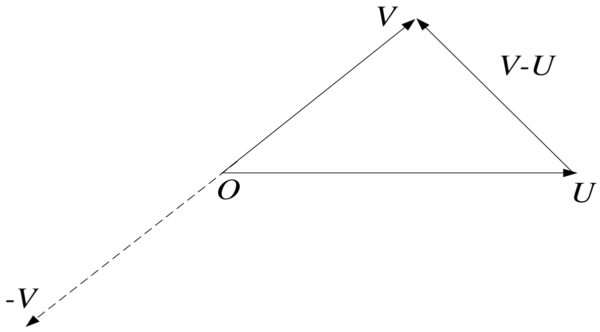

Figure 1.2 : Différence de deux vecteurs.

1.1.4 Multiplication par un scalaire

- Sur la *Figure 1.3* sont représentés différents cas de multiplications de vecteurs (U, V, W, $\cdots$) et de scalaires (α, β, $\cdots$).

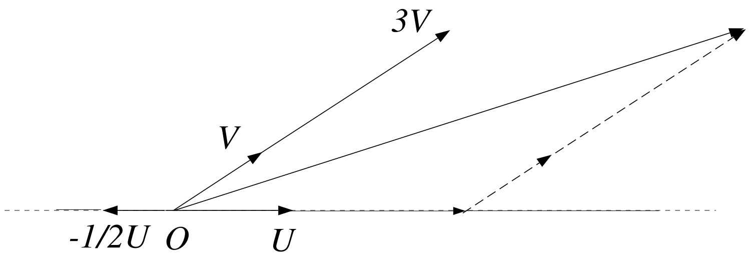

Figure 1.3 : Multiplication par un scalaire.

- Soient U et V deux vecteurs non nuls ayant des directions différentes alors, tout point de P est de la forme $\alpha U + \beta V$.

1.1.5 Longueur, distance, angle, produit scalaire

- C'est à partir des éléments de la *Figure 1.4* que nous rappelons les notions de longueur, de distance, d'angle et de produit scalaire.

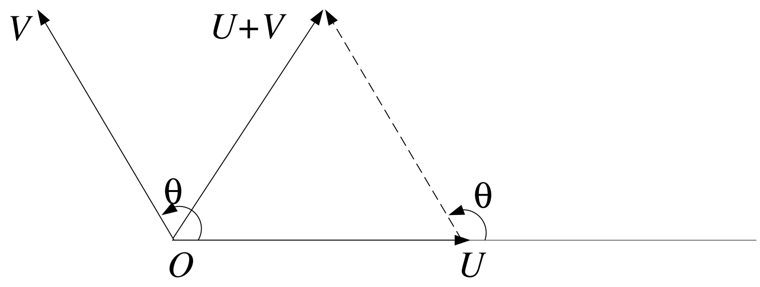

Figure 1.4 : La règle des cosinus.

- On note :

  $|U|$ la *longueur* du vecteur U

  $|V - U|$ la *distance* qui sépare les extrémités U et V des vecteurs OU et OV *(cf Figure 1.2)*

On considère sur la *Figure 1.4* le triangle de sommets O, U et $U + V$. La règle des cosinus dit que :

$$|U + V|^2 = |U|^2 + |V|^2 + 2|U||V|cos(\theta) \tag{1}$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs U et V. Quand l'angle θ est droit, on dit que les vecteurs U et V sont *orthogonaux*. Dans ce cas la formule (1) se réduit à :

$$|U + V|^2 = |U|^2 + |V|^2 \tag{2}$$

on reconnaît le théorème de Pythagore. C'est $2|U||V|cos(\theta)$ qui fait la différence entre les formules (1) et (2). C'est cette quantité qui décrit fondamentalement la relation entre les vecteurs U et V. Cette quantité est (au coefficient 2 près) appelée *produit scalaire* des vecteurs U et V. On la note $< U, V >$:

$$< U, V >= |U||V|cos(\theta) \tag{3}$$

En tenant compte de (3), (1) s'écrit :

$$|U + V|^2 = |U|^2 + |V|^2 + 2 < U, V > \tag{4}$$

qui est l'analogue de l'identité remarquable bien connue : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

L'intérêt fondamental du produit scalaire apparaît clairement quand on sait que sa connaissance implique celles des longueurs, des distances et des angles entre deux vecteurs.

- *Longueur* : $|U| =< U, U >^{1/2}$
- *Distance* : $|V - U| = [< U, U > + < V, V > -2 < U, V >]^{1/2}$
- *Angle* : $cos(\theta) = \dfrac{< U, V >}{(< U, U >< V, V >)^{1/2}}$

Le produit scalaire satisfait aux propriétés suivantes (notées P_1 à P_4) :

- P_1 : $< U, V >=< V, U >$
- P_2 : $< U, U > \geq 0, \qquad < U, U > = 0$ si et seulement si $U = 0$
- P_3 : $< \alpha U + \beta V, W >= \alpha < U, W > + \beta < V, W >$
- P_4 : U et V sont orthogonaux si et seulement si : $< U, V >= 0$

1.2 Notion d'espace vectoriel

La géométrie plane peut s'exprimer en termes de vecteurs, d'addition vectorielle, de multiplication d'un vecteur par un scalaire et de produit scalaire ; deux vecteurs non colinéaires déterminent un plan ; $\cdots$. Toutes ces notions sont généralisables à trois dimensions et au-delà de trois dimensions. Par exemple, trois vecteurs non coplanaires engendrent un espace à trois dimensions. La *dimension* d'un espace est en général égale au nombre minimum de vecteurs requis pour déterminer l'espace.

Un espace vectoriel est une abstraction de cette approche géométrique. On dit qu'on a un espace vectoriel quand :

- on a une collection d'éléments, appelés vecteurs, qui peuvent être additionnés et multipliés par des scalaires.

Dans cette approche, on ne décrit pas ce que sont les vecteurs, on décrit comment ils se comportent. Toute chose qui se comporte de cette façon est un vecteur.

Deux concepts complémentaires émergent :

- Bien que d'inspiration géométrique, les éléments d'un espace vectoriel n'ont pas toujours besoin d'apparaître dans une représentation géométrique. On peut représenter un plan sans représenter les vecteurs qui déterminent ce plan.

- Quand un produit scalaire est donné, on définit une *géométrie*. Dans ce cas, on peut interpréter géométriquement les éléments d'un espace vectoriel quelle que soit leur "vraie" nature.

Par exemple, si l'on considère deux variables aléatoires X et Y, leur somme et leur différence sont aussi des variables aléatoires, il en est de même pour $\alpha X + \beta Y$ où α et β sont des scalaires. Des variables aléatoires peuvent donc être perçues comme des vecteurs et si un produit scalaire approprié est défini, on peut les interpréter géométriquement (des combinaisons linéaires de deux variables aléatoires sont représentées par un plan, $\cdots$).

1.3 Projections

Dans ce paragraphe, nous notons $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{W}$, $\cdots$ les projections de U, V, W, $\cdots$ sur un plan P (représenté par un parallélogramme) contenant une origine O (*Figure 1.5*). Ces projections faites parallèlement à une direction D perpendiculaire au plan P sont dites *projections orthogonales*.

Deux propriétés définissent les projections orthogonales sur le plan P :

- *Propriété A :* la projection orthogonale $\hat{U}$ de U sur le plan P est dans le plan P.
- *Propriété B :* le vecteur $U - \hat{U}$ est orthogonal à tout vecteur de P. Soit :

$$< V, U - \hat{U} >= 0 \text{ pour tout vecteur } V \text{ dans le plan } P.$$

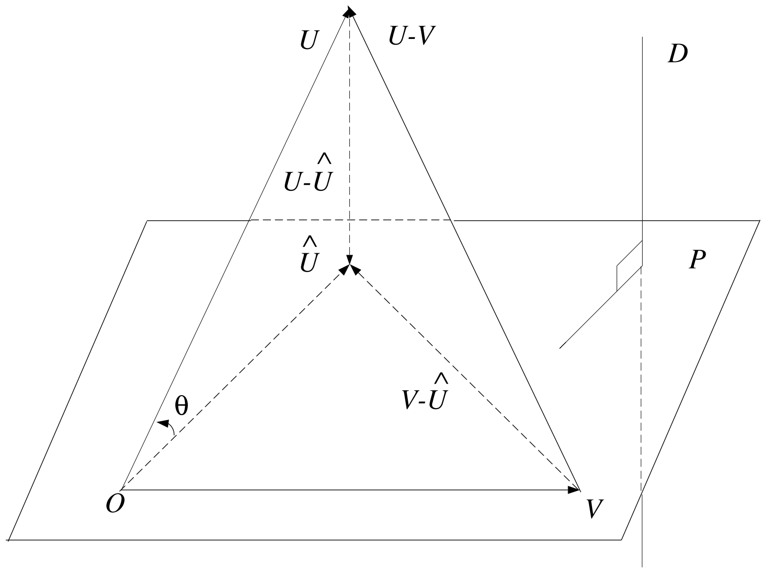

Figure 1.5 : Projections orthogonales.

Les propriétés importantes des projections sont contenues dans les théorèmes suivants (notés T_1 à T_7) :

- T_1 : Le vecteur U est dans le plan P si et seulement si $\hat{U} = U$.
- T_2 : Le vecteur $U \neq 0$ est orthogonal au plan P si et seulement si $\hat{U} = 0$.
- T_3 : La projection sur le plan P du vecteur $\hat{U}$ est égale à $\hat{U}$.
- T_4 : $|U|^2 = |\hat{U}|^2 + |U - \hat{U}|^2$.
- T_5 : Pour tout vecteur U sa projection orthogonale sur le plan P est unique.
- T_6 : Parmi tous les vecteurs du plan P ayant leur origine en O, c'est le vecteur $\hat{U}$ qui est le plus proche de U au sens de la plus petite distance entre l'extrémité U du vecteur OU et l'extrémité $\hat{U}$ du vecteur $O\hat{U}$ contenu dans le plan P.
- T_7 : Les projections sont linéaires : $\alpha\widehat{U + V} = \alpha\hat{U} + \hat{V}$.

1.4 Géométrie analytique

Les notions de vecteurs et de produit scalaire n'ont été utilisées que pour introduire les aspects descriptifs des représentations géométriques. Pour les aspects opératoires, les calculs, il faut traduire ces concepts en termes de <u>*coordonnées*</u>.

Nous allons passer brièvement en revue la notion de coordonnées dans un espace à trois dimensions que nous généraliserons ensuite à des espaces à n dimensions.

Coordonnées

Considérons l'espace vectoriel E de dimension 3 défini de la façon suivante :

- 1- Les vecteurs de E sont définis par les triplets de la forme $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\cdots$. Soit :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

- 2- L'addition de deux vecteurs est définie composante par composante :

$$(U + V) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

- 3- La multiplication par un scalaire α est définie par :

$$\alpha U = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix}$$

- 4- Le produit scalaire de deux vecteurs U et V est défini par :

$$< U, V >= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{5}$$

On peut vérifier que les définitions d'un espace vectoriel de dimension finie sont satisfaites pour E. La longueur d'un vecteur U est alors donnée par :

$$|U|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{6}$$

Considérons les vecteurs :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'après (5) et (6), nous voyons que :

$$|I_1|^2 = |I_2|^2 = |I_3|^2 = 1$$

$$< I_1, I_2 >=< I_1, I_3 >=< I_2, I_3 >= 0 \qquad (7)$$

Les vecteurs I_1, I_2 et I_3 sont des vecteurs *unitaires* mutuellement orthogonaux. Ainsi, tout vecteur U peut s'écrire comme une combinaison de I_1, I_2 et I_3 :

$$U = u_1 I_1 + u_2 I_2 + u_3 I_3 \qquad (8)$$

On dit que I_1, I_2 et I_3 forment une *base* de l'espace vectoriel. La *Figure 1.6* montre géométriquement la relation (8). Les axes I_1, I_2 et I_3 sont mutuellement orthogonaux. Les coefficients de (8) sont les *coordonnées* de U pour ce système d'axes.

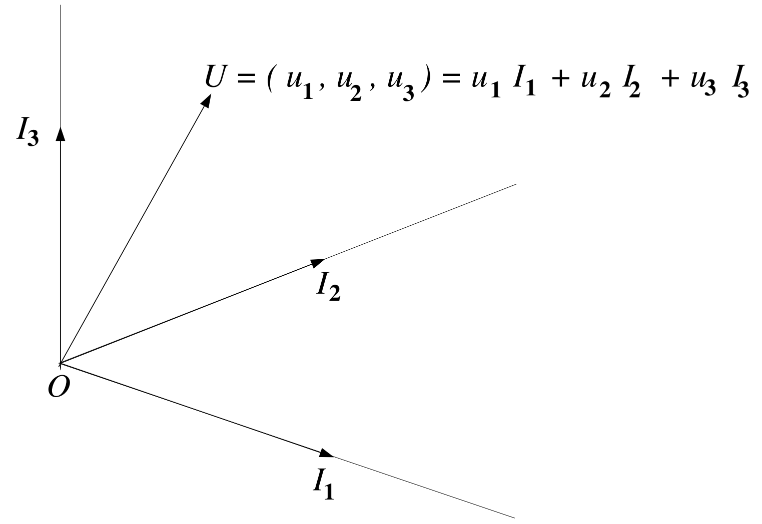

Figure 1.6 : Coordonnées et axes.

Tout triplet de nombres (u_1, u_2, u_3) peut être interprété géométriquement, on peut le considérer comme un vecteur dans un espace déterminé par (8). On peut vérifier que toutes les propriétés qui dérivent du produit scalaire sont en accord avec les concepts de la géométrie ordinaire (géométrie *Euclidienne*).

En particulier, les vecteurs U et V sont orthogonaux quand la relation (5) est égale à zéro ; le résultat classique de géométrie analytique :

$$cos^2(\theta) = \frac{(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} \tag{9}$$

est en accord avec celui que suggère (5).

L'équation (6) est la généralisation à trois dimensions du théorème de Pythagore.

Nous avons vu que des vecteurs et un produit scalaire déterminent une géométrie. De ce point de vue, il n'y a pas de raisons de se limiter à trois dimensions. Toute collection de n nombres u_1, u_2, $\cdots$, u_n peut être considérée comme un vecteur

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies sur les coordonnées.
- Les axes ont pour vecteurs unitaires :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad I_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- L'espace vectoriel à n dimensions est constitué par l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de I_1, I_2, $\cdots$, I_n.
- Le produit scalaire des vecteurs U et V est défini par :

$$< U, V >= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{10}$$

  On peut calculer des produits scalaires au moyen de la formule (10) si l'on connaît les coordonnées. Cette formule correspond à un ensemble particulier d'axes. Si nous étions dans un autre système d'axes orthogonaux, chaque point U aurait un nouvel ensemble de coordonnées qu'il faudrait utiliser pour calculer le produit scalaire et donc, les longueurs, les angles.

Cette formule (10) n'est valable que si l'on est dans un système d'axes orthogonaux, si tel n'était pas le cas , la formule serait plus compliquée.

Les principes géométriques fondamentaux qui découlent du produit scalaire tels que les longueurs, les angles sont indépendants du système d'axes choisi. Par exemple, l'angle que font deux vecteurs entre eux ne dépend pas du système d'axes de référence.

Le produit scalaire (10) est dit produit scalaire *Euclidien* car, pour $n = 3$, il correspond à la géométrie Euclidienne classique. C'est de loin le produit scalaire le plus utilisé pour des $n - uplets$ de nombres, mais beaucoup d'autres produits scalaires peuvent être définis.

Toute fonction des U, V, $\cdots$, qui satisfait à $< \alpha U + \beta V, W >= \alpha < U, W > + \beta < V, W >$ est un produit scalaire convenable.

2 Calcul matriciel

Soit le tableau rectangulaire A à n lignes et p colonnes où a_{ij} est l'élément à l'intersection de la $ième$ ligne et de la $jème$ colonne ; c' est une *matrice*. On la représente par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Chaque ligne i de A est un *vecteur ligne* :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix}$$

Chaque colonne j est un *vecteur colonne* :

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

2.1 Définitions

1. *Dimension* : Le nombre de lignes n et le nombre de colonnes p de la matrice (notation : $A(n \times p)$).
2. *Matrice transposée* : Matrice obtenue en interchangeant les rôles des lignes et des colonnes (notation : $A'(p \times n)$)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

3. *Matrice carrée*: Matrice qui a autant de lignes que de colonnes ($n = p$).

4. *Matrices triangulaires* :

   - *Triangulaire haute* : Matrice carrée dont les éléments au-dessous de la diagonale principale sont égaux à zéro.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   - *Triangulaire basse* : Matrice carrée dont les éléments au-dessus de la diagonale principale sont égaux à zéro.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5. *Matrice symétrique* : Matrice carrée égale à sa transposée ($a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple i, j). En général, on ne représente que la partie triangulaire haute (ou basse), c'est-à-dire les éléments situés sur la diagonale principale et au-dessus (au-dessous) de la diagonale principale.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. *Matrice diagonale* : Matrice carrée dont les seuls éléments éventuellement non nuls sont sur la diagonale principale (notation : $diag(A)$).

$$D = diag(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7. *Matrice identité* : Matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 (notation : I).

8. *Matrice nulle* : Matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro.

9. *Matrice J* : Matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

2.2 Opérations élémentaires

1. *Addition*:

$$C = A + B \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

   C, A et B sont de mêmes dimensions.

2. *Multiplication par un scalaire*:

$$C = \lambda A \Longleftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

   C et A sont de mêmes dimensions

3. *Produit de deux matrices*: Pour que le produit $C = AB$ de deux matrices A et B soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Si A est de dimensions $(n \times p)$ et B de dimensions $(p \times m)$, le résultat C du produit de A par B est de dimensions $(n \times m)$.

$$C = AB \Longleftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

   En général, la multiplication n'est pas *commutative*, c'est à dire que $AB \neq BA$. Pour cette raison, on dit parfois que AB est la *prémultiplication* de B par A ou la *postmultiplication* de A par B.

4. *Matrice idempotente*: Une matrice $A(n \times n)$ est idempotente si : $AA = A$.

5. *Matrice inverse*: On appelle matrice inverse de A la matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

   Si A^{-1} existe, elle est *unique*, on dit alors que A est *non singulière*.

   Si A n'a pas d'inverse elle est dite *singulière*.

   - L'inverse d'une matrice symétrique est symétrique.
   - L'inverse de la transposée de A est la transposée de A^{-1}.
   - $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
   - $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$
   - $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$

6. *Matrice orthogonale*: $A(n \times n)$ est orthogonale si : $AA' = I \Longleftrightarrow A' = A^{-1}$

7. *Rang*: Le nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants si $n \leq p$, le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants si $n > p$ (notation : $rg(A)$).

   - $rg(A') = rg(A)$
   - $rg(A'A) = rg(AA') = rg(A)$
   - $rg(AB) \leq min(rg(A), rg(B))$

8. *Transposée d'un produit de matrices*: $(AB)' = B'A'$.

9. *Trace*: Soit A une matrice carrée. La somme des éléments diagonaux de A s'appelle la trace de A (notation : $tr(A)$).

   - $tr(A) = tr(A')$

   Soient $A(n \times p)$ et $B(p \times n)$ deux matrices, alors :

   - $tr(AB) = tr(BA)$
   - $tr(AA') = tr(A'A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$

2.2.1 Exemple 1 : écriture matricielle

Quand les grandeurs mesurées et les unités sont hétérogènes, on est conduit à transformer les données de telle sorte qu'elles aient une origine commune et une même unité. Pour cela, on centre et on réduit ces grandeurs.

Soit $X(n \times p)$ la matrice des grandeurs mesurées. Comment s'écrit la matrice $Z(n \times p)$ des variables *centrées réduites*?

Réponse

Soient :

- x_{ij} la $j\grave{e}me$ variable observée sur le $i\grave{e}me$ individu
- $\bar{x}_j$ la moyenne de la $j\grave{e}me$ variable
- s_j l'écart type de la $j\grave{e}me$ variable
- $z_{ij} = \dfrac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$ la variable centrée réduite

La matrice X des données s'écrit :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

On définit les matrices D et J de la façon suivante :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s_p} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

L'écriture matricielle de la transformation "centrage, réduction" est alors :

$$Z = (I - \frac{1}{n}J)XD$$

avec I la matrice identité.

Annexe B - Données et macros SAS utilisées dans les travaux pratiques.

1 ACP

1.1 Données forsythia (forsy.txt)

	LP	Lcal	lsep	LTC	PGl	LTP	LTE	LF	Del
C18	6.30	4.45	1.75	21.10	6.50	3.80	5.70	4.10	-3.15
C17	6.95	6.75	2.53	18.30	7.95	3.30	6.70	4.30	-4.20
C16	7.35	6.70	2.42	16.95	7.15	3.30	7.00	4.70	-4.45
C27	8.55	6.20	3.26	26.35	9.30	4.40	6.30	4.25	-3.45
C36	6.20	4.50	1.82	22.30	6.65	4.10	5.90	4.40	-2.95
C26	4.10	3.94	2.32	13.70	5.20	6.00	3.00	1.40	1.70
C29	5.90	5.10	2.04	19.10	6.60	4.00	5.50	3.70	-3.00
C30	4.60	5.10	2.57	16.40	5.75	7.50	3.45	1.45	2.55
C31	3.95	5.05	2.70	14.40	5.20	7.95	3.55	1.75	3.40
C32	4.90	4.85	2.60	20.10	7.45	3.50	5.05	3.55	-2.95
C33	4.05	3.95	2.00	16.35	6.25	9.05	3.60	1.75	4.10
C8	6.00	4.40	2.62	18.75	6.70	3.75	6.00	4.05	-3.05
C9	5.90	5.10	4.00	17.25	8.90	8.50	4.05	2.00	3.20
C37	9.20	6.45	2.55	28.05	8.50	4.05	6.80	4.00	-4.50
C1	12.10	6.55	2.35	24.55	7.75	9.30	4.00	1.70	3.30
C20	7.45	6.10	2.51	21.50	10.45	3.50	5.70	3.95	-3.55
C28	9.05	7.15	3.43	19.95	9.40	4.35	7.05	4.80	-3.90
C2	14.30	7.50	3.95	32.85	13.75	5.55	7.80	5.15	-3.65
C3	10.70	7.10	3.36	23.90	11.35	4.90	7.45	4.85	-3.75
C34	8.25	6.90	3.40	22.20	9.05	9.90	4.55	1.75	2.90
C35	9.10	7.10	2.97	22.45	9.45	4.30	6.75	4.45	-4.00
C15p	7.20	5.50	2.60	16.70	4.40	7.85	3.40	1.55	3.35
C15	7.85	5.05	2.54	20.75	6.35	8.20	3.30	1.40	4.00
C21	5.55	6.30	3.09	22.00	7.10	8.45	3.85	1.95	2.20
C22	4.90	5.45	3.02	20.95	7.45	8.45	4.05	1.35	2.60
C24	6.30	5.80	2.73	20.25	8.75	4.10	6.55	3.85	-3.80
C25	9.75	5.95	3.55	27.30	11.75	4.70	6.45	4.15	-2.90
C10	14.00	7.85	2.30	16.45	7.35	4.45	6.85	4.30	-4.20
C11	9.50	6.70	2.99	25.10	11.35	4.00	7.45	4.70	-5.05
C13	11.30	8.35	2.87	25.75	10.85	4.45	6.50	4.05	-3.85
C47	9.50	8.50	2.95	22.50	9.75	4.30	6.15	3.70	-3.70
C14	8.95	7.35	3.20	23.30	10.15	4.15	6.50	4.25	-3.55
C4	10.90	6.70	3.00	22.55	10.35	4.05	6.40	3.95	-4.10
C5	12.50	6.70	2.62	29.50	10.00	4.40	6.85	4.35	-4.00
C6	10.90	7.05	2.53	27.00	8.15	3.20	5.75	3.75	-3.55
C7	10.10	7.25	2.76	21.55	7.65	8.60	4.00	1.65	3.00

```
C23  8.75 6.75 2.67 22.50  7.55 8.75 3.70 1.70  3.60
C39  6.40 7.10 3.36 23.60  9.25 3.50 6.35 3.95 -3.50
C40  9.70 7.25 2.96 25.60  8.65 3.25 6.00 3.60 -3.80
C42 10.70 6.90 2.75 19.00  7.75 8.45 3.85 1.95  2.70
C41  3.35 4.00 2.37 14.00  5.45 3.05 2.95 1.75 -2.80
C38  2.95 4.45 2.92 20.75  6.90 3.65 3.75 2.00 -1.35
C43  7.15 6.35 2.62 21.25  7.40 8.85 4.00 1.50  3.05
C44 10.50 6.05 2.97 21.50  9.90 4.00 6.40 3.95 -4.00
C45  6.05 5.30 1.97 21.25  6.60 3.75 5.85 3.65 -3.00
C49  5.45 4.20 1.97 14.65  5.90 7.20 3.20 1.40  3.10
C48  6.05 5.25 2.00 17.55  8.25 8.20 3.30 2.00  4.00
C55 10.00 6.05 3.40 28.20 11.90 5.00 6.45 3.40 -2.95
C50  4.65 4.40 2.68 16.15  6.40 3.45 4.90 3.05 -3.20
C51 10.10 7.45 3.01 25.55 11.25 8.65 4.20 1.55  2.95
C52 12.80 8.05 2.42 17.55  7.70 4.40 6.80 4.20 -4.25
C53  7.65 5.10 2.57 22.10  6.55 8.00 3.45 1.45  3.55
C54  4.40 4.50 2.75 13.45  5.10 6.50 2.75 1.15  2.55
C56 11.50 7.60 3.87 29.90 12.60 5.40 5.05 2.00 -1.20
```

1.2 Macros et programmes SAS

acp.sas

acptout.sas

eboulis.sas

forsythia.sas

grafind.sas

grafvar.sas

indacp.sas

jaccard+.sas

moustind.sas

varacp.sas

2 AFC

2.1 Données Étudiants (csp.dat)

	dro	sci	let	med	pha	iut
age	4814	8941	8719	1583	959	558
oua	463	1118	1224	153	33	83
ind	3610	2608	3365	1634	728	110
art	2870	5091	5966	1583	562	261
gco	2777	2608	3212	1736	794	136
pco	4444	6209	7954	2655	1125	313
lib	9813	7823	9637	8985	3143	120
ing	4444	8195	7648	3880	1307	151
adm	14071	13535	18050	7147	2134	235
mes	833	993	1071	817	182	21
mso	555	621	765	357	66	16
tec	2129	3974	4436	1021	298	235
cam	7776	10058	13308	3931	1125	407
ins	1666	5464	6425	1481	579	141
emb	5184	8071	10861	2399	529	0
con	1481	2856	3059	613	132	177
ous	2314	4098	4436	766	182	516
min	278	869	918	153	17	37
mar	185	373	306	51	0	21
man	741	1863	1989	255	33	83
ser	741	993	1377	204	33	63
arm	2592	3104	3671	817	198	136

2.2 Macros et programmes SAS

afc.sas

panels.sas

plotit.sas

3 ACM

3.1 Données pommes (pommes.txt)

	arb	rec	cal	coul	pour	type	form	ferm	gout
Granny-spur	1	3	2	1	1	1	2	3	3
Granny-stand.	4	3	2	1	1	1	2	3	3
Boskoop-mut.	3	3	3	4	4	1	1	2	2
Boskoop-stand.	2	3	3	4	3	1	1	2	2
Gala-red	2	2	1	3	3	3	2	2	1
Gala	3	2	1	3	2	3	2	2	1
Elstar	3	1	1	2	2	3	2	2	3
Elista	3	1	1	3	3	1	2	2	3
Jonagold	3	2	3	3	2	2	2	2	3
Jonagored	3	2	3	4	3	3	2	2	3
New-Jonagold	3	2	3	2	3	1	2	2	3
Gloster	2	3	2	3	4	1	1	3	2
Gloster-Spur	1	3	2	3	4	1	1	3	2
Averdal	3	2	2	4	4	2	1	2	1
StarKrimson	1	2	2	4	4	3	1	2	1
Erovan	2	2	2	4	4	1	1	2	1
Goldenspur	1	2	1	1	1	1	1	2	2
Quemoni	3	2	1	1	2	1	1	2	2
Golden-972	3	2	1	1	1	1	1	2	2
Sinta	2	2	1	3	2	1	3	2	2
Fiesta	3	1	1	2	3	3	2	3	2
Arlet	3	1	1	3	3	2	2	2	2
Hilrome	4	3	3	3	4	1	2	3	2
Rome-Beauty	4	3	3	3	3	3	2	3	2
Melrose-mut.	3	3	2	2	4	1	3	3	2
Melrose	3	3	3	2	3	3	3	3	2
R.-des-Reinettes	2	2	1	2	3	3	2	2	2
Belrene	2	2	1	3	4	2	2	2	2
Generos	3	2	2	1	2	3	2	2	2
Merano	3	2	1	1	2	3	1	2	2
Delblush	3	2	1	1	2	1	1	2	3
Chantecler	3	3	1	1	1	1	2	2	3
Fuji	3	3	1	3	2	3	2	3	1
Fuji-mut.	3	3	1	3	4	1	2	3	1
Braeburn	3	3	1	2	3	2	2	3	3
Baujade	4	3	1	1	1	1	2	3	3
Ginger-Gold	3	1	1	1	2	1	2	2	2
Delcorf	3	1	2	3	2	3	1	2	2
Dalili	3	1	2	3	3	2	1	2	2

Delgollune	2	2	3	3	3	1	1	2	2
Pink-lady	3	3	1	3	3	1	1	3	3
Hanners	4	2	3	4	4	1	1	2	3
Canada-blanc	2	2	3	1	2	1	3	1	2
Cadel	3	2	1	3	3	3	1	2	2
Sansa	3	1	1	2	3	1	2	2	1
Akane	3	1	1	3	3	1	3	2	2
Jerseymac	3	1	1	4	4	1	3	2	2
Vista-Bella	3	1	1	3	4	2	3	1	2
Ota	2	2	1	3	2	1	2	2	2
Rubi	4	2	1	3	3	2	3	2	2
Stayman-Winesap	4	3	3	4	4	1	2	3	1
Hyb1	3	2	1	3	4	1	2	2	1
Hyb2	3	1	2	2	3	2	1	2	2
Rubinette	3	2	1	3	3	2	2	2	2
Rubin	4	1	2	2	4	3	2	2	3
Hyb3	4	2	2	4	4	1	2	3	3
Hyb4	3	2	2	1	1	1	2	1	2

3.2 Macros et programmes SAS

acm.sas

panels.sas

plotit.sas

4 Classification

4.1 Données souches bactériennes

(beer301.prn)

sou	C4	C5	C6	C10	C12	C13	C18	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28
B2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B4	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
B5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B7	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
B8	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
B10	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
B11	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B12	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
B14	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B15	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B16	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B17	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B18	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B21	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B25	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B26	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B27	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
B29	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T32	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
T33	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
T34	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
T35	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T39	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B19	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T37	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
T42	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
T43	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T44	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T45	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
T46	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
T47	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
T69	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T70	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
R50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
R51	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
R53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

R56	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
R58	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T41	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R52	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R55	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
H1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
H2	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
H3	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
H4	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
H5	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
H6	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
H8	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
H9	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
H10	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B20	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
B30	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T40	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
T38	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
R59	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B60	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
B61	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
B62	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
B64	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
B65	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
R54	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
B63	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
B67	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T36	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
B72	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B75	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
B76	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
B77	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
B78	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1

(beer302.prn)

C30	C31	C32	C33	C34	C35	C36	C37	C39	C40	E3	E4	E7	E8	E10	E11
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

```
1  1  0  0  0  1  0  0  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  1  1  1  1  1  0
1  1  1  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  1  1  1  1  0  0
0  1  0  0  0  0  1  1  0  0  0  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  0  0  0  1  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  0  0  0
0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  1  0  0
0  0  0  0  1  1  0  0  0  0  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  0  0  0  1  1  1  1  1  1  0
1  1  0  0  0  1  1  1  1  1  1  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  0  0  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  0  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  0  0  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  0  0  0  0  1  1  1  1  1  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  0  0  0  0  1  0  0  1  0  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  1  0  0  1  1  1  0  1  1  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  0  1  1  1  1  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  0  1  1  1  0  0
1  1  0  0  0  1  1  1  0  0  0  1  1  1  0  1
```

(souch)

```
"B2"  "B4"  "B5"  "B7"  "B8"  "B10" "B11" "B12" "B14" "B15" "B16"
"B17" "B18" "B21" "B25" "B26" "B27" "B29" "T32" "T33" "T34" "T35"
"T39" "B9"  "B19" "T37" "T42" "T43" "T44" "T45" "T46" "T47" "T69"
"T70" "R50" "R51" "R53" "R56" "R58" "B13" "T41" "R52" "R55" "H1"
"H2"  "H3"  "H4"  "H5"  "H6"  "H7"  "H8"  "H9"  "H10" "B20" "B30"
"T40" "T38" "R59" "B60" "B61" "B62" "B64" "B65" "R54" "B63" "B67"
"T36" "B72" "B75" "B76" "B77" "B78"
```

4.2 Macros et programmes SAS

jaccard+.sas