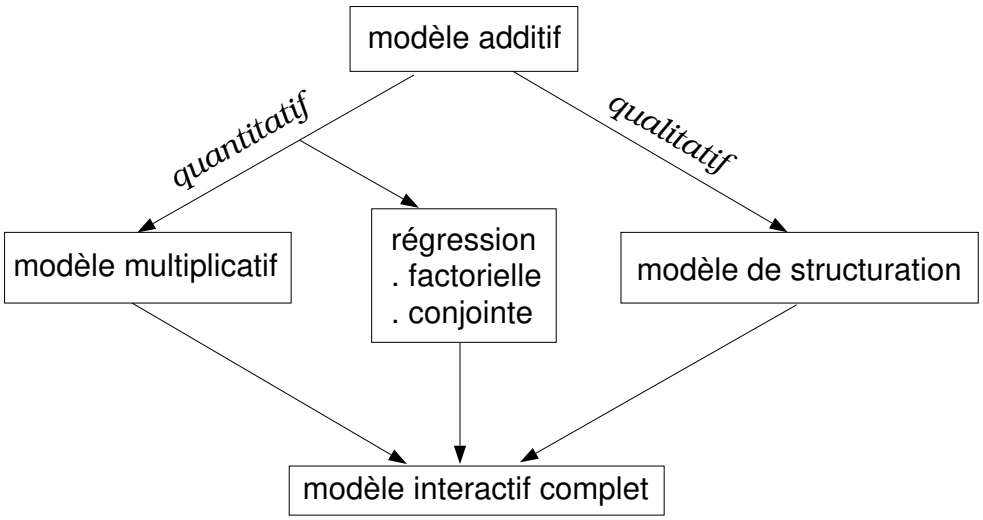
# MODÈLES MULTIPLICATIFS

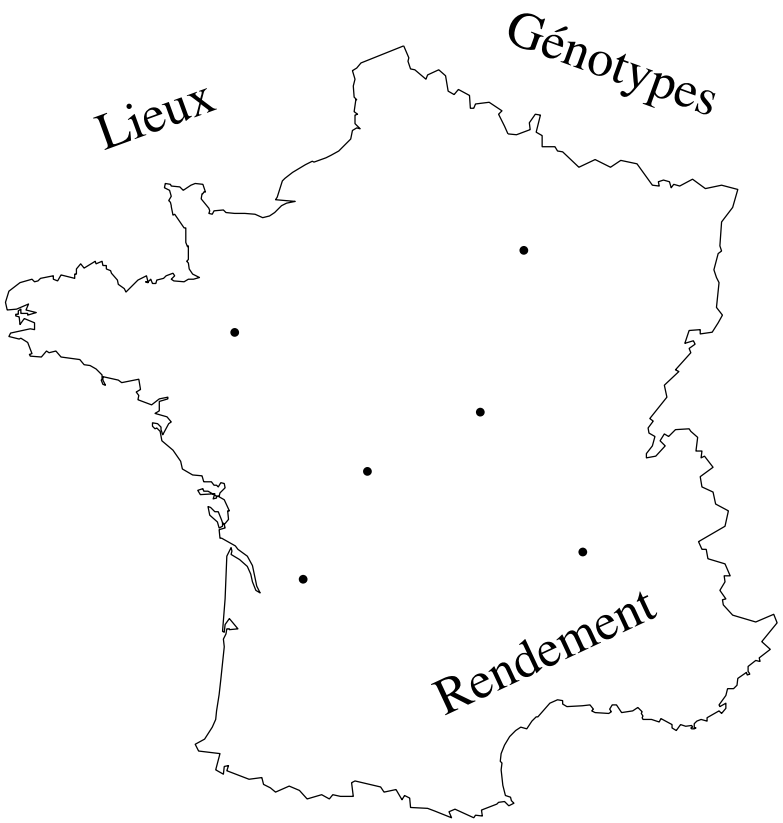
# Modélisation de l'interaction



# Plan

1. Exemple
   - Présentation de l'exemple support
   - Application du modèle additif à l'exemple
2. Estimation
   - Application du modèle interactif complet à l'exemple
   - Principe de la modélisation
   - modèle à un terme multiplicatif
   - modèle à plusieurs termes multiplicatifs
3. Décomposition
   - Table d'ANOVA
   - Table récapitulative
4. Quelques exemples d'exploration

# Modélisation Multiplicative de l'Interaction



# Présentation de l'exemple-support

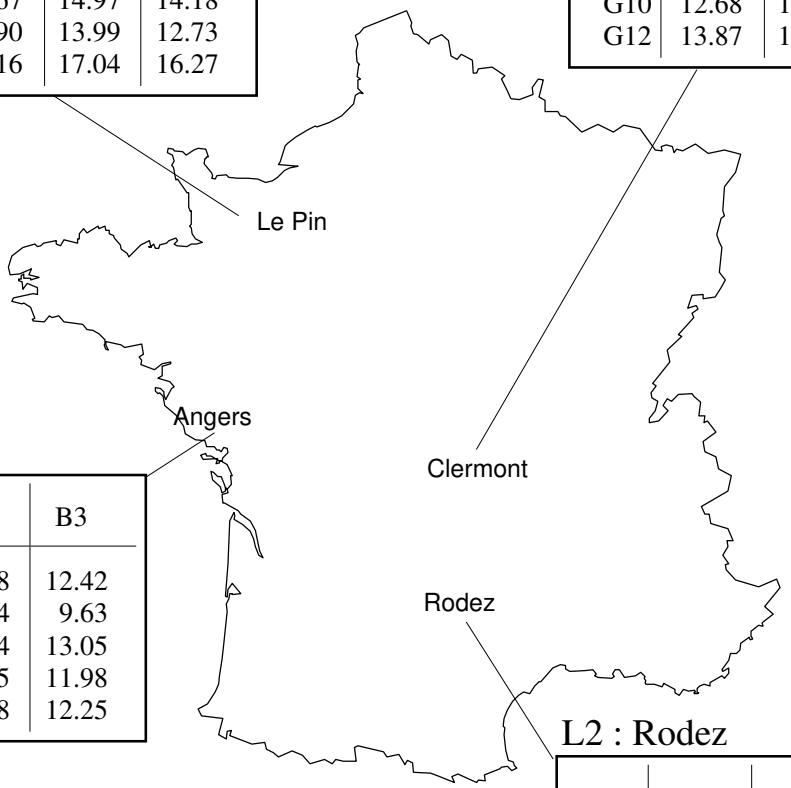
5 génotypes codés G2 G8 G9 G10 G12
en 4 lieux : L2 L3 L5 L6

L6 : Le Pin

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| G2 | 14.57 | 13.84 | 13.25 |
| G8 | 14.25 | 12.76 | 11.63 |
| G9 | 15.67 | 14.97 | 14.18 |
| G10 | 15.90 | 13.99 | 12.73 |
| G12 | 18.16 | 17.04 | 16.27 |

L5 : Clermont

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| G2 | 10.43 | 9.92 | 8.56 |
| G8 | 11.39 | 9.81 | 9.73 |
| G9 | 13.02 | 12.88 | 10.68 |
| G10 | 12.68 | 11.71 | 11.29 |
| G12 | 13.87 | 13.67 | 12.4 |




L3 : Angers

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| G2 | 14.24 | 13.68 | 12.42 |
| G8 | 11.40 | 10.04 | 9.63 |
| G9 | 15.05 | 13.34 | 13.05 |
| G10 | 14.30 | 12.75 | 11.98 |
| G12 | 15.54 | 15.38 | 12.25 |

L2 : Rodez

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| G2 | 13.89 | 13.43 | 13.13 |
| G8 | 13.10 | 13.01 | 12.78 |
| G9 | 14.36 | 12.93 | 12.88 |
| G10 | 13.83 | 13.76 | 13.55 |
| G12 | 15.39 | 14.02 | 13.93 |

# Les modèles multiplicatifs : plan

**1. EXEMPLE :**

- concrètement
- graphiquement
- ESSAI DU MODÈLE ADDITIF
- ESSAI DU MODÈLE INTERACTIF COMPLET

**2. ESTIMATION ET MODÉLISATION:**

A. APPLICATION À L'EXEMPLE SUPPORT :

- paramètres
- reconstitution de données
- représentations graphiques

B. ESTIMATION DES PARAMÈTRES :

- intervalles de confiance

C. LES MODÈLES À PLUSIEURS TERMES MULTIPLICATIFS

**3. EXAMEN DES RÉSIDUS**

**4. L' ANALYSE DE VARIANCE DU MODÈLE :**

- exemple support
- cas général

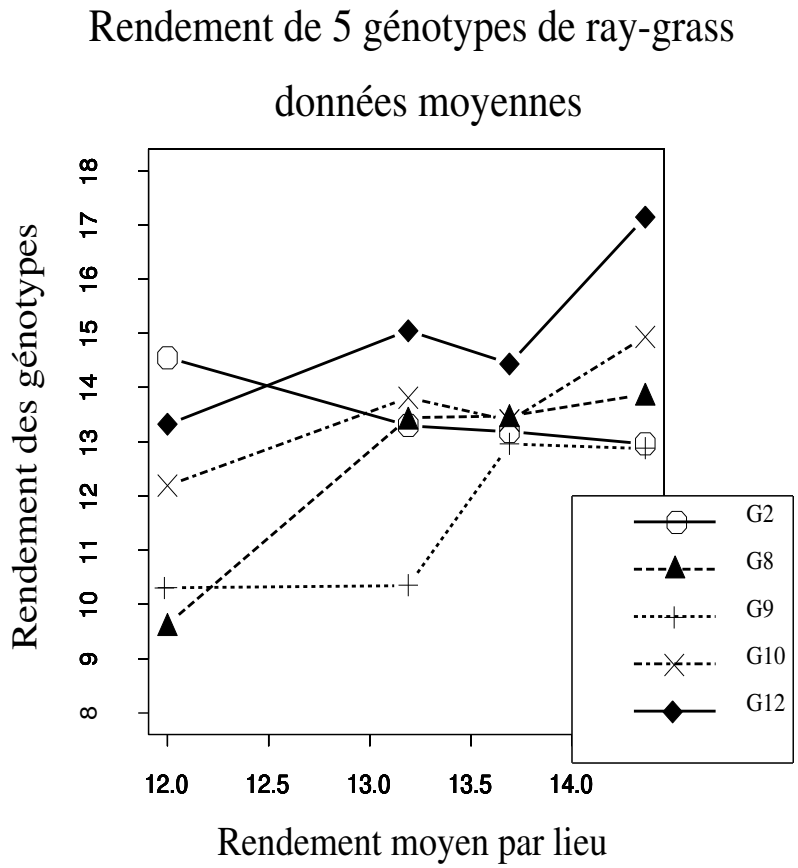
**5. TABLE RÉCAPITULATIVE :**

EXERCICE

# Données moyennes par génotype et par lieu

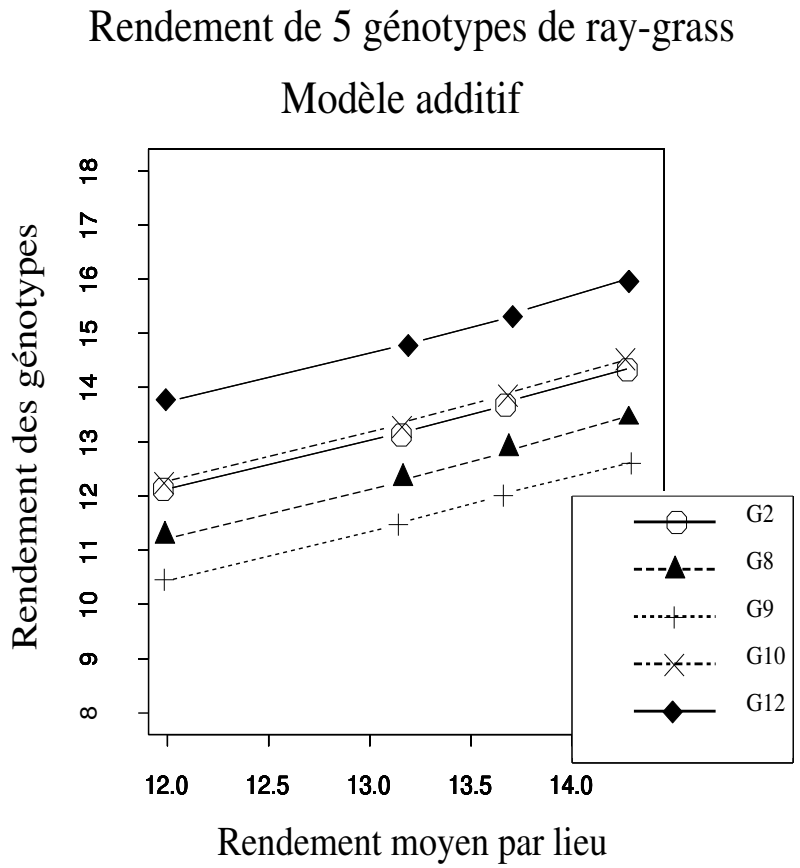
| | L2 | L3 | L5 | L6 |
|---|---|---|---|---|
| G2 | 13.19 | 13.30 | 14.55 | 12.96 |
| G8 | 13.48 | 13.44 | 9.63 | 13.88 |
| G9 | 12.96 | 10.35 | 10.31 | 12.88 |
| G10 | 13.39 | 13.81 | 12.19 | 14.94 |
| G12 | 14.44 | 15.05 | 13.32 | 17.15 |

## Exemple


Rendement de 5 génotypes de ray-grass
données moyennes
Rendement des génotypes
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
12.0
12.5
13.0
13.5
14.0
Rendement moyen par lieu
G2
G8
G9
G10
G12

# Application du modèle additif à l'exemple support

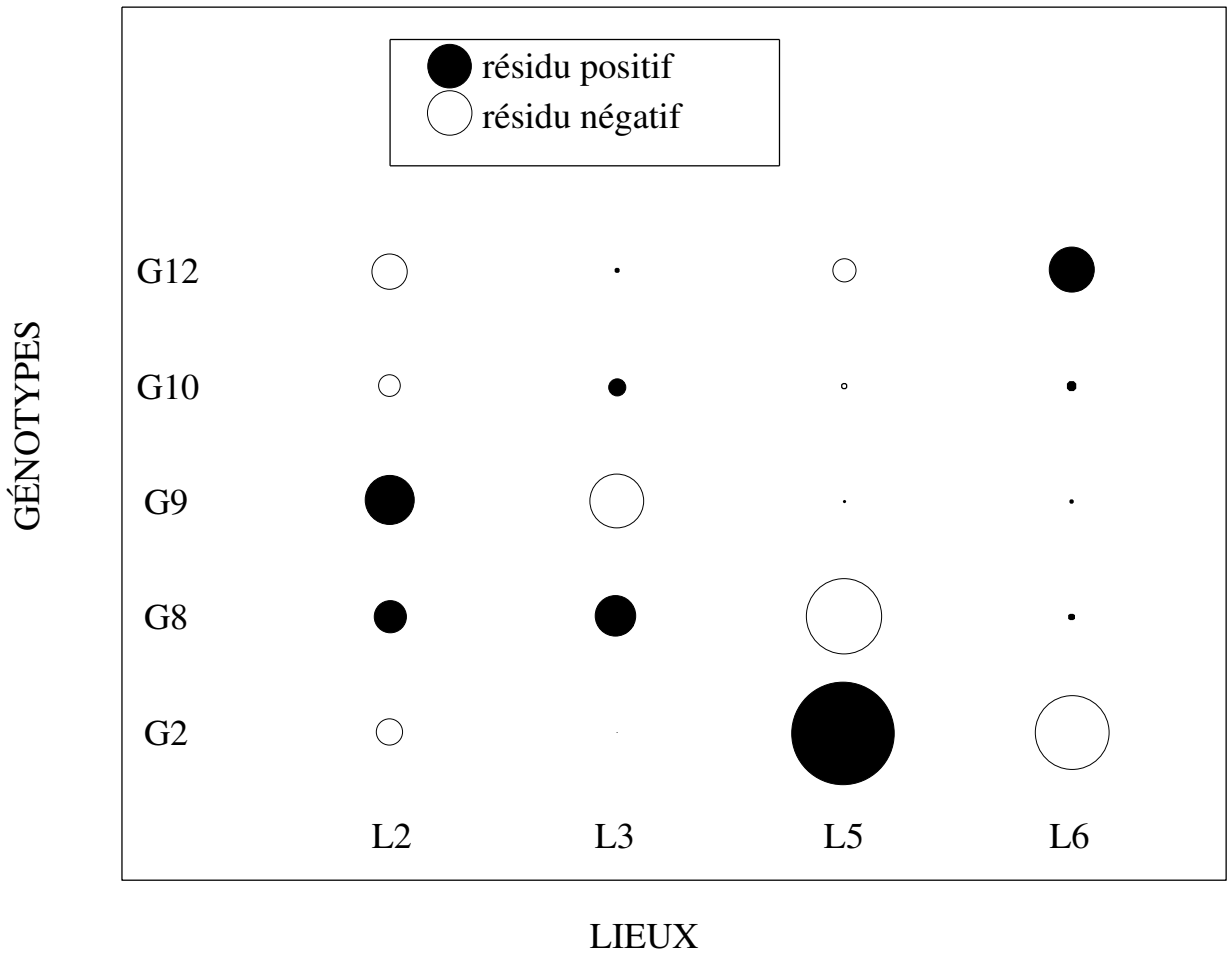
$$E(\mathrm{X_{ij}}) = \mu + \alpha_\mathrm{i} + \beta_\mathrm{j}$$



Exemple

# Présentation des résidus

Résidus du modèle additif



# Application du modèle interactif complet à l'exemple support

$$E(\mathrm{X_{ij}}) = \mu + \alpha_\mathrm{i} + \beta_\mathrm{j} + \theta_\mathrm{ij}$$

Paramètres du modèle :

$$\widehat{\mu} = 13.261$$

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} G2: & 0.239 \\ G8: & -0.654 \\ G9: & -1.636 \\ G10: & 0.322 \\ G12: & 1.729 \end{pmatrix} \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.231 \\ L3: & -0.071 \\ L5: & -1.261 \\ L6: & 1.101 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} & L2 & L3 & L5 & L6 \\ G2 & -0.541 & 0.031 & 2.311 & -1.641 \\ G8 & 0.642 & 0.904 & -1.716 & 0.172 \\ G9 & 1.074 & -1.204 & -0.055 & 0.118 \\ G10 & -0.424 & 0.298 & -0.132 & 0.256 \\ G12 & -0.781 & 0.131 & -0.409 & 1.058 \end{pmatrix}$$

$\widehat{\theta}$ compte (I-1)(J-1) paramètres qui deviennent vite trop nombreux quand I et J sont grands.

# Principe de la modélisation

$$\theta_{ij} \longrightarrow \theta\, \gamma_i\, \delta_j$$

Avec les conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} \sum \gamma_i = \sum \delta_j = 0 \\ \sum \gamma_i^2 = \sum \delta_j^2 = 1 \end{cases}$$

Dimensions paramétriques :

(I-1) (J-1) paramètres $\longrightarrow$ (I+J-3) paramètres.

ON A RÉDUIT LA DIMENSION DU MODÈLE

# Paramètres estimés du modèle à 1 terme multiplicatif

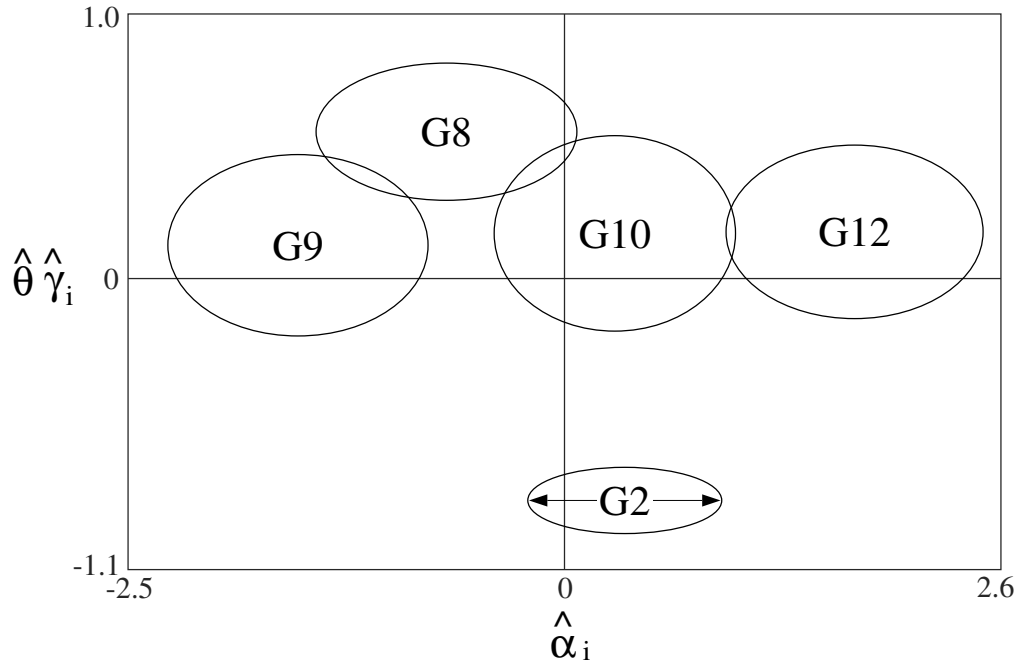
$$E(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta\,\gamma_i\,\delta_j$$

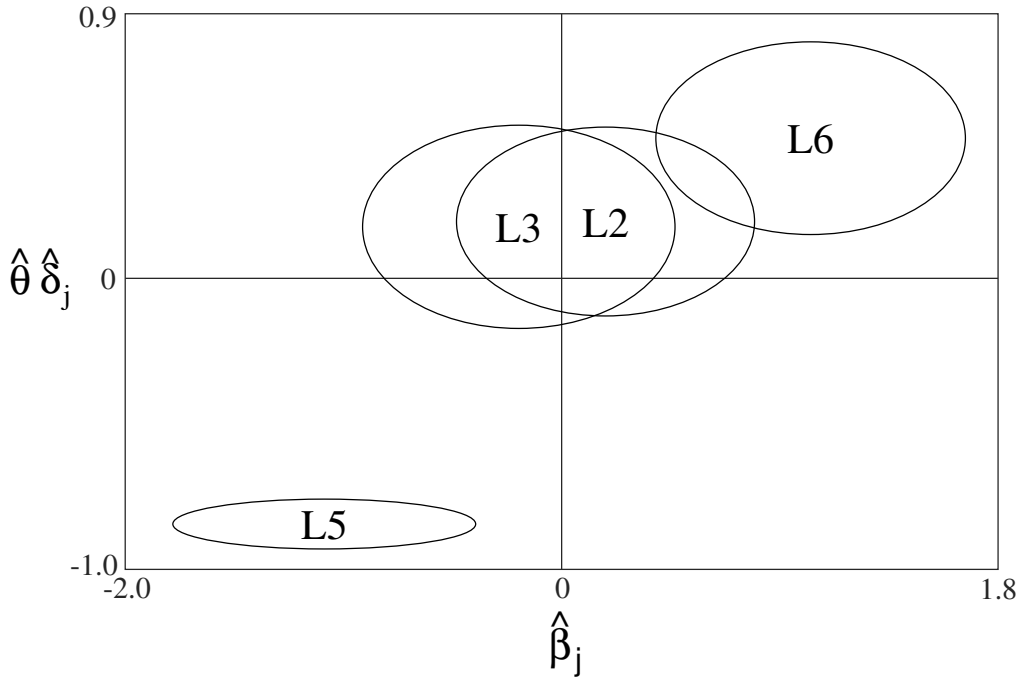
sur l'exemple support :

$$\widehat{\mu} = 13.261 \quad \widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} G2: & 0.239 \\ G8: & -0.654 \\ G9: & -1.636 \\ G10: & 0.322 \\ G12: & 1.72 \end{pmatrix} \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.231 \\ L3: & -0.071 \\ L5: & -1.261 \\ L6: & 1.101 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta} = 3.458 \qquad \widehat{\gamma} = \begin{pmatrix} G2: & -0.826 \\ G8: & 0.517 \\ G9: & 0.034 \\ G10: & 0.060 \\ G12: & 0.214 \end{pmatrix} \quad \widehat{\delta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.180 \\ L3: & 0.167 \\ L5: & -0.847 \\ L6: & 0.489 \end{pmatrix}$$

# Une représentation synthétique



# EXERCICE :
# Reconstituer les valeurs estimées

$$E(X_{3,4}) = \underbrace{13.261 - 1.636 + 1.101}_{\text{G9 L6}} + \underbrace{3.458 \times 0.034 \times 0.489}$$

$$= 12.726 + 0.057$$

$$= \text{partie additive} + \text{interaction réduite à 1 terme multiplicatif}$$

## Calculer :

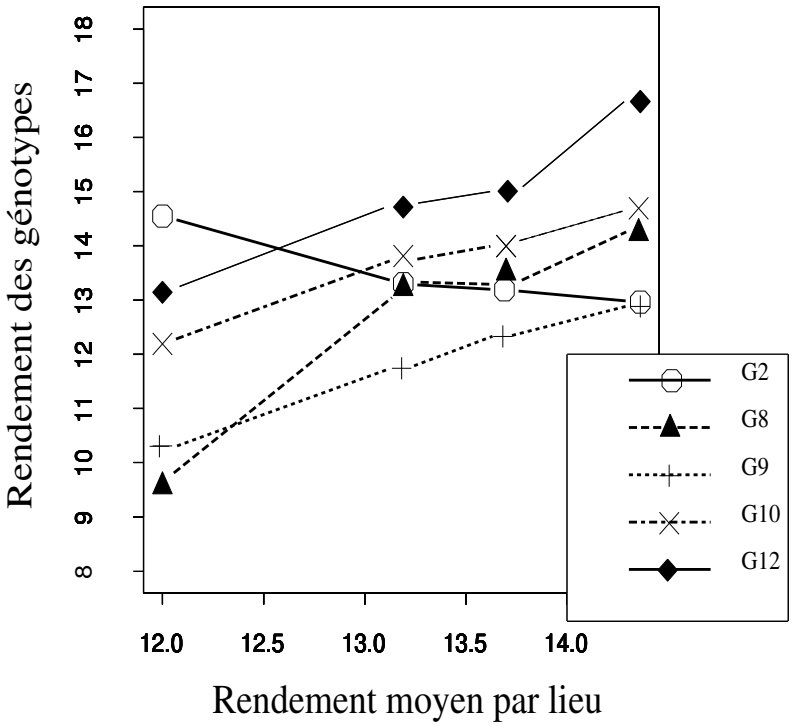
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\widehat{\theta} =$ 3.458 | $\widehat{\delta_1} =$ 0.180 | $\widehat{\delta_2} =$ 0.167 | $\widehat{\delta_3} =$ - 0.847 | $\widehat{\delta_4} =$ 0.489 |
| $\widehat{\gamma_1} =$ - 0.826 | | | | |
| $\widehat{\gamma_2} =$ 0.517 | | | | |
| $\widehat{\gamma_3} =$ 0.034 | | | | 0.057 |
| $\widehat{\gamma_4} =$ 0.060 | | | | |
| $\widehat{\gamma_5} =$ 0.214 | | | | |

# Reconstitution des données de l'exemple support

| | L2 | L3 | L5 | L6 |
|---|---|---|---|---|
| G2 | 13.216 | 12.952 | 14.629 | 13.204 |
| G8 | 13.161 | 12.835 | 9.851 | 14.583 |
| G9 | 11.877 | 11.574 | 10.265 | 12.784 |
| G10 | 13.851 | 13.546 | 12.147 | 14.786 |
| G12 | 15.355 | 15.043 | 13.109 | 16.454 |

Rendement de 5 génotypes de ray-grass

Modèle multiplicatif



$$\mathbf{E}(\mathbf{X_{ij}}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta\gamma_i\ \delta_j$$

# Estimation des paramètres

1. Partie additive : Cf Modèle Additif

2. Terme multiplicatif :

Soit R la matrice des termes d'interaction :

$$\mathbf{R_{ij} = X_{ij.} - X_{i..} - X_{.j.} + X_{...}}$$

**La méthodes des moindres carrés conduit à estimer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice R'R. Il s'agit d'une décomposition en valeurs singulières, comme en ACP.**

# Modèles à plusieurs termes multiplicatifs

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{X_{ij}}\right) = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{r}} \theta^{\mathbf{r}}\, \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}\, \delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}}$$

Partie additive : identique.

Termes multiplicatifs : chacun est constitué de façon identique.

Conditions supplémentaires :

$$\sum_{\mathbf{i}} \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{j}} \delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \qquad \forall_{\mathbf{r}}$$

$$\sum_{\mathbf{i}} \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}\, \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}'} = \begin{cases} \end{cases}$$

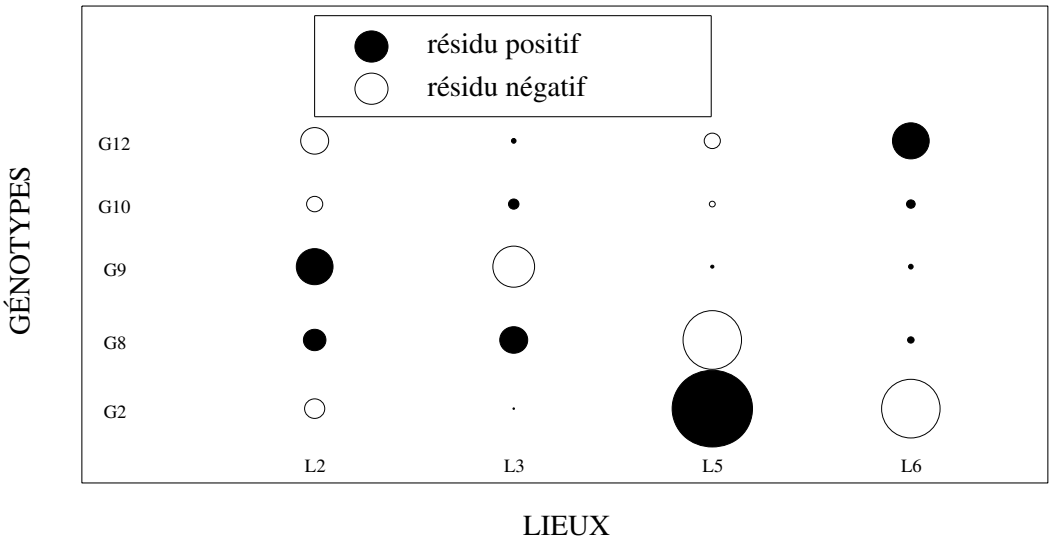
1 si r = r' ( norme = 1 )

0 si r $\neq$ r' ( orthogonalité )

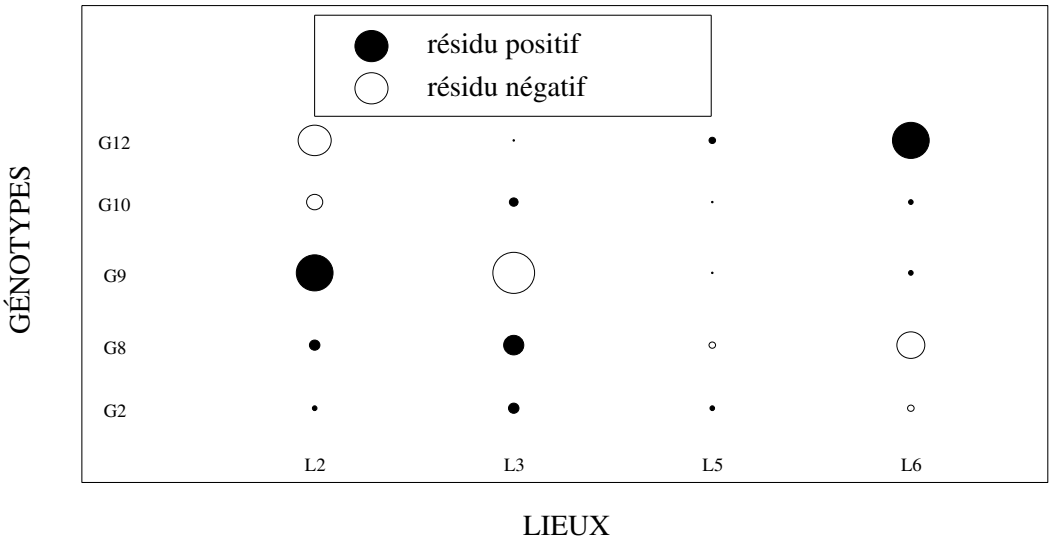
# (Continued) Modèles à plusieurs termes multiplicatifs

De même pour les $\delta_{\mathbf{j}}$.

## Résidus du modèle additif




## Résidus du modèle multiplicatif



# Table d'analyse de variance :

Exemple support :

| Origine | SCE | DDL | CM | F | P |
|---|---|---|---|---|---|
| **Effet lieu** | **14.3036** | **3** | **4.7679** | **7.4** | **0.0019 *** |
| **Effet génotype** | **25.0139** | **4** | **6.2535** | **9.7** | **0.0003 *** |
| **Interaction G x L** | **17.5090** | **12** | **1.4591** | **2.3** | **0.0509** |
| **1er TM** | **11.9557** | **6** | **1.9926** | **3.1** | **0.0259 *** |
| **2ème TM** | **3.4917** | **4** | **0.8729** | **1.4** | **0.2841** |
| **reste de G x L** | **2.0616** | **2** | **1.0308** | **1.6** | **0.2256** |
| **Résiduelle pure** | **12.8821** | **20** | **0.6444** | | |

# Table d'analyse de variance :

Présentation générale : cas équirépété

Table d'ANOVA à plusieurs termes multiplicatifs :

| Terme du modèle | Interprétation | Somme des carrés | ddl |
|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | effet principal ligne | $JK \sum \alpha_i^2$ | I - 1 |
| $\beta_j$ | effet principal colonne | $IK \sum \beta_j^2$ | J - 1 |
| $\theta^1 \gamma_i^1 \delta_j^1$ | 1 er terme multiplicatif | $K ( \theta^1 )^2$ | I + J - 3 |
| $\theta^2 \gamma_i^2 \delta_j^2$ | 2 ième terme multiplicatif | $K ( \theta^2 )^2$ | I + J - 5 |
| ... | ... | ... | ... |
| $\theta^r \gamma_i^r \delta_j^r$ | r ième terme multiplicatif | $K ( \theta^r )^2$ | I + J - 2r |
| $( \alpha\beta )^*_{ij}$ | partie négligée de l'interaction | par différence | par différence |
| $\sigma^2$ | erreur pure | $\sum ( X_{ijk} - X_{ij.} )^2$ | IJ ( K - 1 ) |

# Table récapitulative

Décomposition des degrés de liberté sur l'exemple support :

<table>
<tr><td>$\mu$<br>[ 1 ]</td><td colspan="2">$\beta_j$<br>[ 4 - 1 = 3 ]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha_i$<br>[ 5 - 1 = 4 ]</td><td colspan="2">$\theta\ \gamma_i\ \delta_j$<br>[ 6 ]</td></tr>
<tr><td>reste de l'interaction<br>[ 6 ]</td></tr>
</table>

# Table d'analyse de variance : Table récapitulative

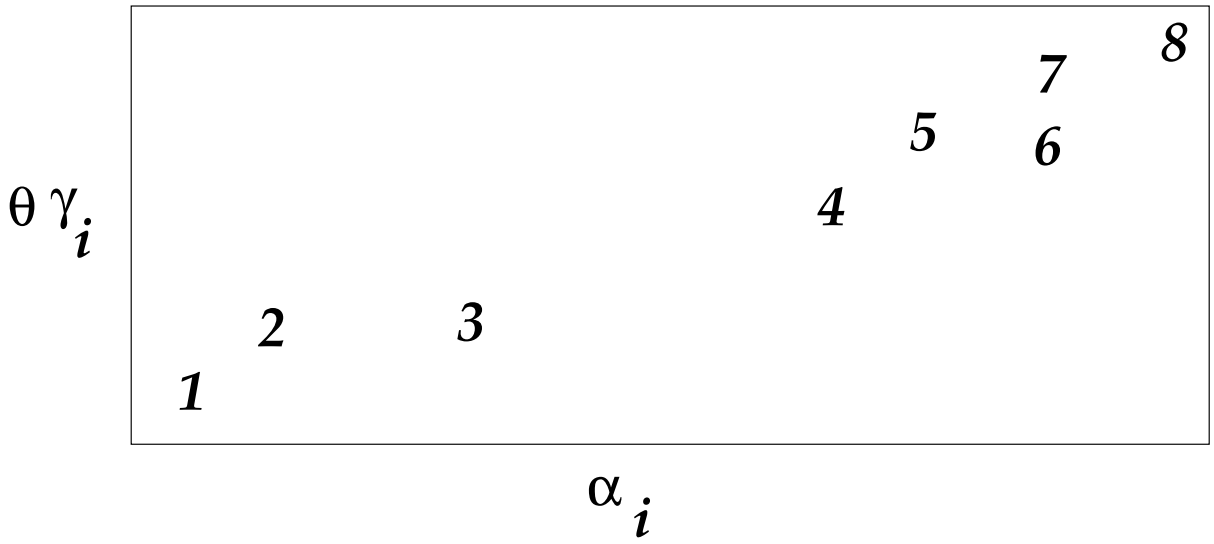
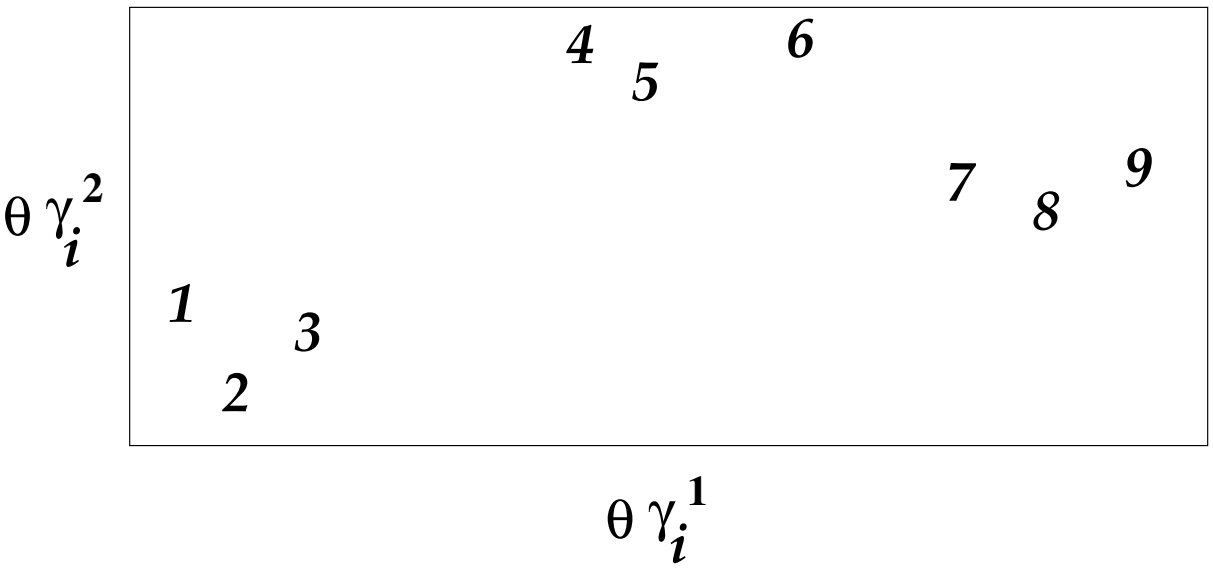
Décomposition des degrés de liberté : présentation formelle

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mu$ [ 1 ] | $\beta_j$ [ J - 1 ] | | | |
| $\alpha_i$ [ I - 1 ] | $\theta^1 \gamma_i^1 \delta_j^1$ [I + J - 3 ] | | | |
| | $\theta^2 \gamma_i^2 \delta_j^2$ [I + J - 5 ] | | | |
| | | $\theta^3 \gamma_i^3 \delta_j^3$ [I + J - 7 ] | | |
| | | | ... | |
| | | | | $\theta^R \gamma_i^R \delta_j^R$ |

# Avantages des modèles multiplicatifs :

- **Réduisent le nombre de paramètres à estimer**
- **Ne font pas appel à des données extérieures**
- **Restituent généralement bien les différences de classement**
- **Permettent d'isoler des composantes "indépendantes" de l'interaction**
- **Permettent une orientation vers d'autres méthodes d'analyse de l'interaction**

# Inconvénients :

- **Plus complexes que le modèle additif**
- **Pas de contraintes d'ordre**
- **Ne valorisent pas les informations externes si on en dispose**

# Suggestions à partir des graphiques