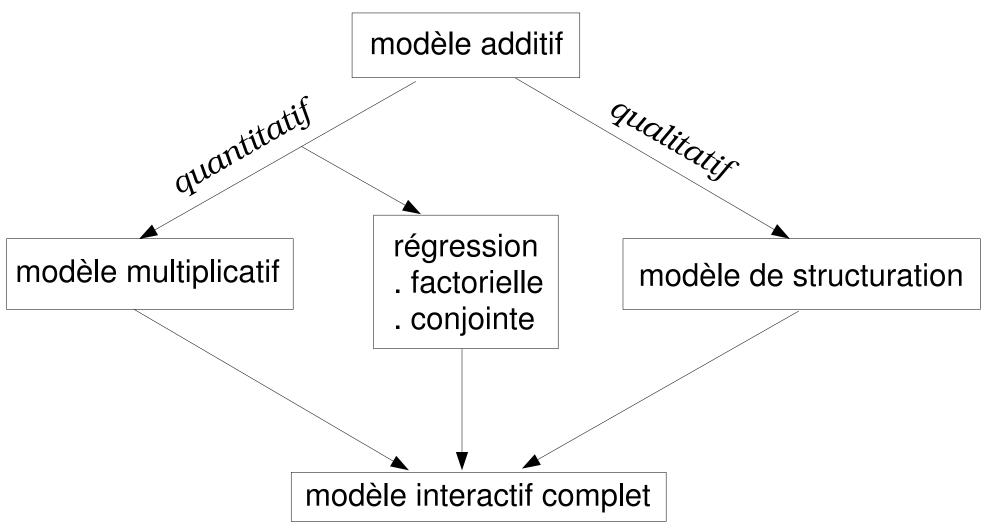
MODÈLES MULTIPLICATIFS

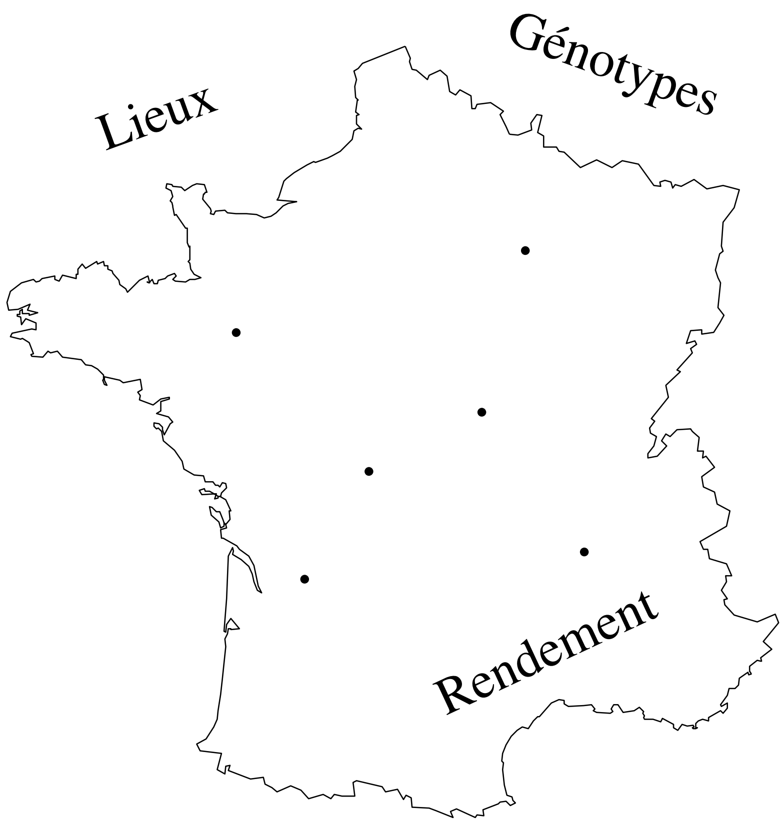
Modélisation de l'interaction



Plan

1. Exemple
   - Présentation de l'exemple support
   - Application du modèle additif à l'exemple
2. Estimation
   - Application du modèle interactif complet à l'exemple
   - Principe de la modélisation
   - modèle à un terme multiplicatif
   - modèle à plusieurs termes multiplicatifs
3. Décomposition
   - Table d'ANOVA
   - Table récapitulative
4. Quelques exemples d'exploration

Modélisation Multiplicative de l'Interaction



Présentation de l'exemple-support

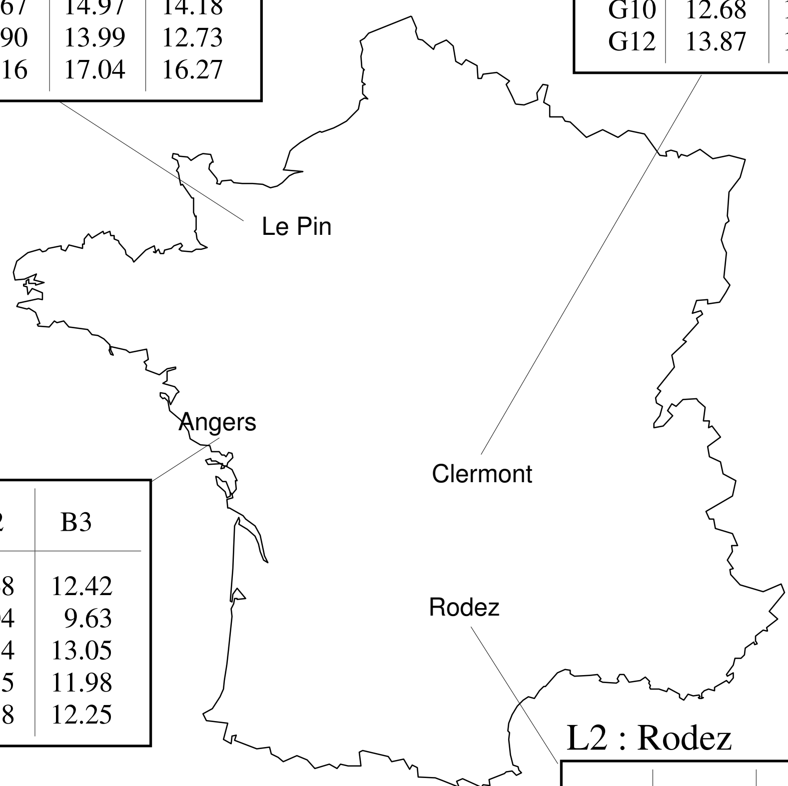
5 génotypes codés G2 G8 G9 G10 G12
en 4 lieux : L2 L3 L5 L6

L6 : Le Pin

	B1	B2	B3
G2	14.57	13.84	13.25
G8	14.25	12.76	11.63
G9	15.67	14.97	14.18
G10	15.90	13.99	12.73
G12	18.16	17.04	16.27

L5 : Clermont

	B1	B2	B3
G2	10.43	9.92	8.56
G8	11.39	9.81	9.73
G9	13.02	12.88	10.68
G10	12.68	11.71	11.29
G12	13.87	13.67	12.4



L3 : Angers

	B1	B2	B3
G2	14.24	13.68	12.42
G8	11.40	10.04	9.63
G9	15.05	13.34	13.05
G10	14.30	12.75	11.98
G12	15.54	15.38	12.25

L2 : Rodez

	B1	B2	B3
G2	13.89	13.43	13.13
G8	13.10	13.01	12.78
G9	14.36	12.93	12.88
G10	13.83	13.76	13.55
G12	15.39	14.02	13.93

Les modèles multiplicatifs : plan

1. EXEMPLE :

- concrètement
- graphiquement
- ESSAI DU MODÈLE ADDITIF
- ESSAI DU MODÈLE INTERACTIF COMPLET

2. ESTIMATION ET MODÉLISATION:

A. APPLICATION À L'EXEMPLE SUPPORT :

- paramètres
- reconstitution de données
- représentations graphiques

B. ESTIMATION DES PARAMÈTRES :

- intervalles de confiance

C. LES MODÈLES À PLUSIEURS TERMES MULTIPLICATIFS

3. EXAMEN DES RÉSIDUS

4. L' ANALYSE DE VARIANCE DU MODÈLE :

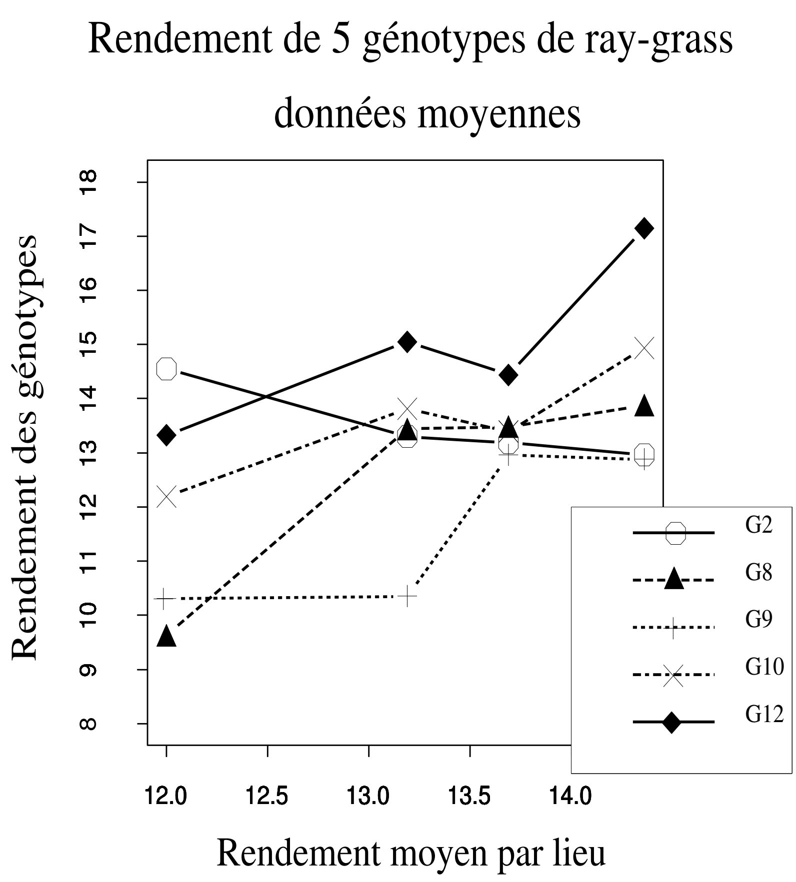
- exemple support
- cas général

5. TABLE RÉCAPITULATIVE :

EXERCICE

Données moyennes par génotype et par lieu

	L2	L3	L5	L6
G2	13.19	13.30	14.55	12.96
G8	13.48	13.44	9.63	13.88
G9	12.96	10.35	10.31	12.88
G10	13.39	13.81	12.19	14.94
G12	14.44	15.05	13.32	17.15

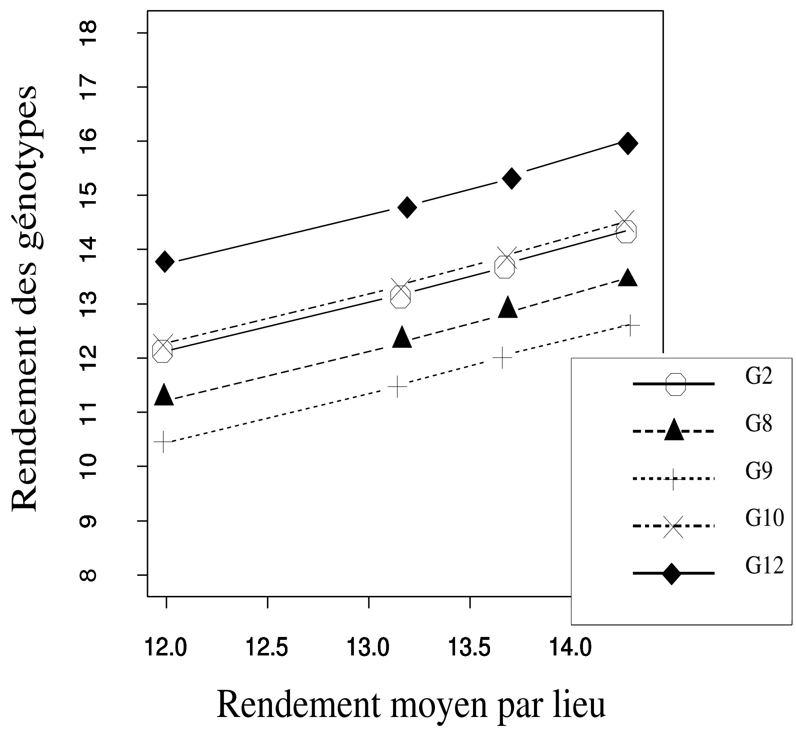

Rendement de 5 génotypes de ray-grass
données moyennes
Rendement des génotypes
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
12.0
12.5
13.0
13.5
14.0
Rendement moyen par lieu
G2
G8
G9
G10
G12

Application du modéle additif à l'exemple support

$$E(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

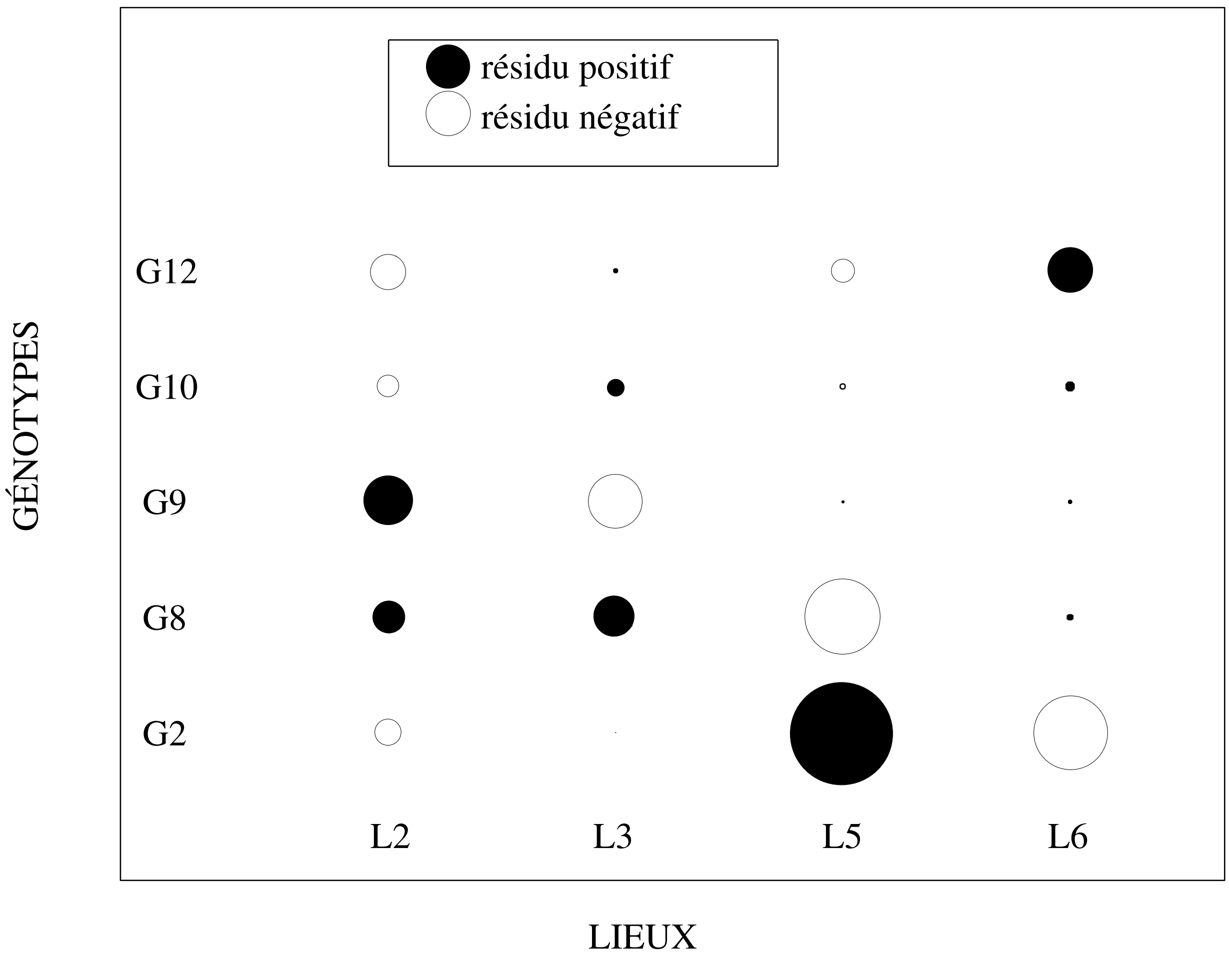
Rendement de 5 génotypes de ray-grass

Modèle additif



Présentation des résidus

Résidus du modèle additif



Application du modèle interactif complet à l'exemple support

$$E(\mathrm{X_{ij}}) = \mu + \alpha_{\mathrm{i}} + \beta_{\mathrm{j}} + \theta_{\mathrm{ij}}$$

Paramètres du modèle :

$$\widehat{\mu} = 13.261$$

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} G2: & 0.239 \\ G8: & -0.654 \\ G9: & -1.636 \\ G10: & 0.322 \\ G12: & 1.729 \end{pmatrix} \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.231 \\ L3: & -0.071 \\ L5: & -1.261 \\ L6: & 1.101 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} & L2 & L3 & L5 & L6 \\ G2 & -0.541 & 0.031 & 2.311 & -1.641 \\ G8 & 0.642 & 0.904 & -1.716 & 0.172 \\ G9 & 1.074 & -1.204 & -0.055 & 0.118 \\ G10 & -0.424 & 0.298 & -0.132 & 0.256 \\ G12 & -0.781 & 0.131 & -0.409 & 1.058 \end{pmatrix}$$

$\widehat{\theta}$ compte (I-1)(J-1) paramètres qui deviennent vite trop nombreux quand I et J sont grands.

Principe de la modélisation

$$\theta_{ij} \longrightarrow \theta \, \gamma_i \, \delta_j$$

Avec les conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} \sum \gamma_i = \sum \delta_j = 0 \\ \sum \gamma_i^2 = \sum \delta_j^2 = 1 \end{cases}$$

Dimensions paramétriques :

(I-1) (J-1) paramètres $\longrightarrow$ (I+J-3) paramètres.

<u>ON A RÉDUIT LA DIMENSION DU MODÈLE</u>

Paramètres estimés du modèle à 1 terme multiplicatif

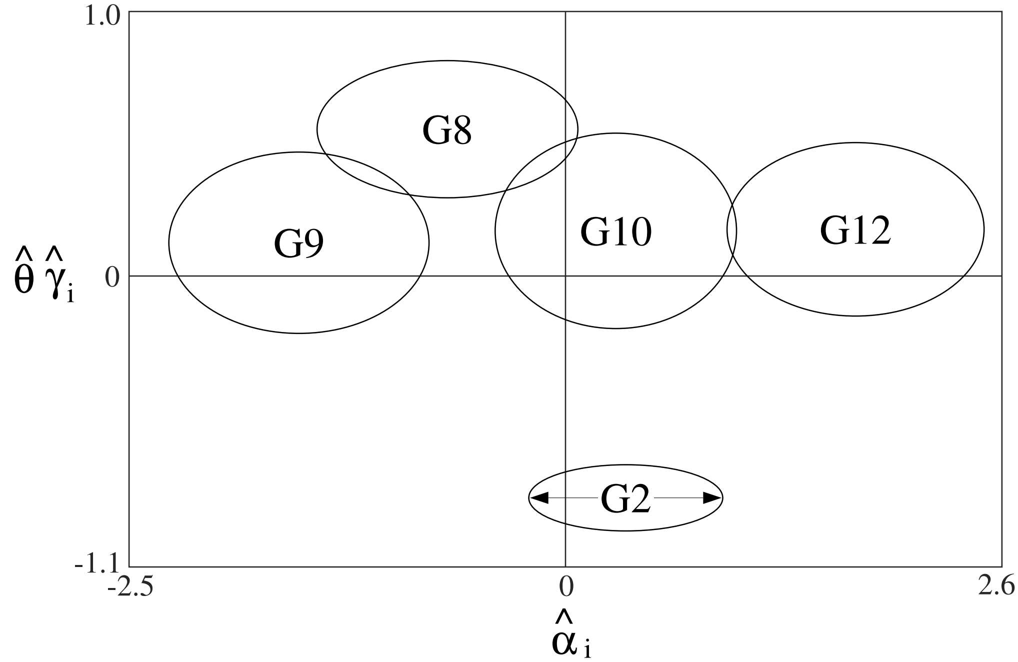
$$E\left(X_{ij}\right) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta\,\gamma_i\,\delta_j$$

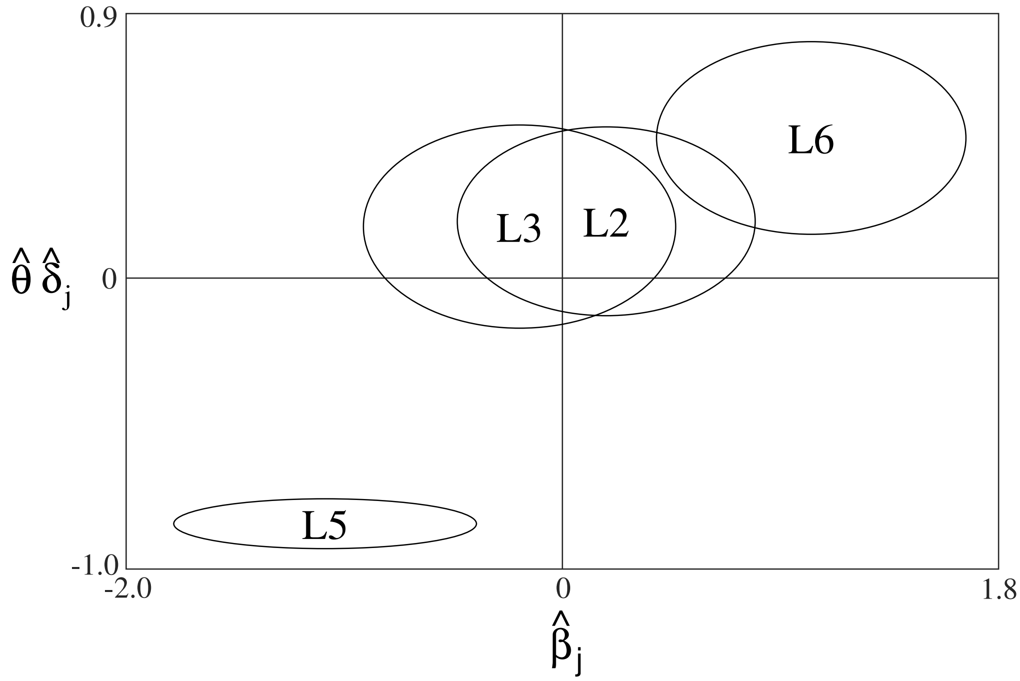
sur l'exemple support :

$$\widehat{\mu} = 13.261 \quad \widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} G2: & 0.239 \\ G8: & -0.654 \\ G9: & -1.636 \\ G10: & 0.322 \\ G12: & 1.72 \end{pmatrix} \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.231 \\ L3: & -0.071 \\ L5: & -1.261 \\ L6: & 1.101 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta} = 3.458 \qquad \widehat{\gamma} = \begin{pmatrix} G2: & -0.826 \\ G8: & 0.517 \\ G9: & 0.034 \\ G10: & 0.060 \\ G12: & 0.214 \end{pmatrix} \quad \widehat{\delta} = \begin{pmatrix} L2: & 0.180 \\ L3: & 0.167 \\ L5: & -0.847 \\ L6: & 0.489 \end{pmatrix}$$

Une représentation synthétique





EXERCICE : Reconstituer les valeurs estimées

$$\underset{\substack{\swarrow\ \searrow \\ G9\ \ L6}}{E(X_{3,4})} = \underbrace{13.261 - 1.636 + 1.101}_{} + \underbrace{3.458 \times 0.034 \times 0.489}_{}$$

$$= \quad 12.726 \quad + \quad 0.057$$

= partie additive + interaction réduite à 1 terme multiplicatif

Calculer :

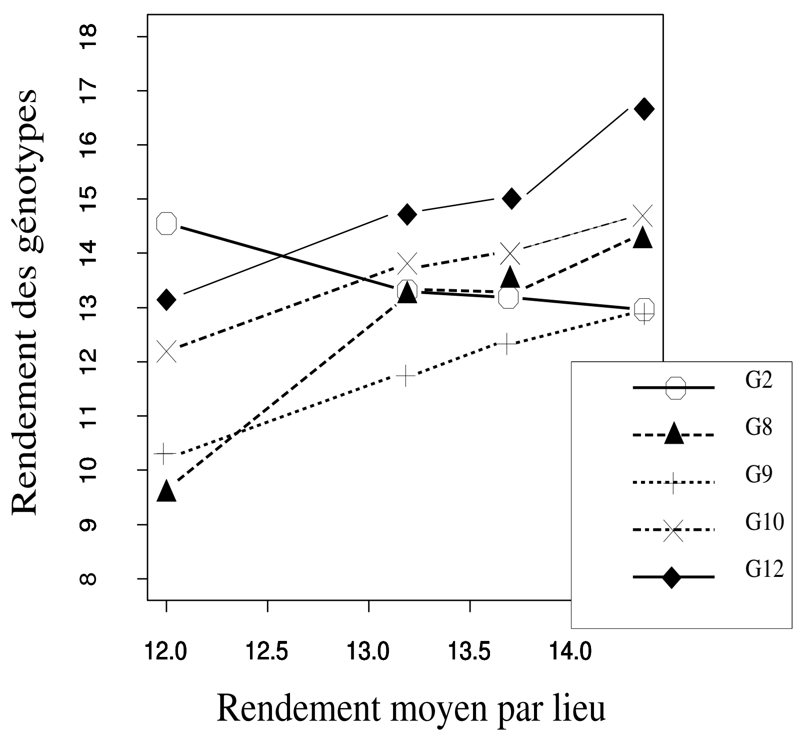
$\widehat{\theta}$ = 3.458	$\widehat{\delta_1}$ = 0.180	$\widehat{\delta_2}$ = 0.167	$\widehat{\delta_3}$ = - 0.847	$\widehat{\delta_4}$ = 0.489
$\widehat{\gamma_1}$ = - 0.826				
$\widehat{\gamma_2}$ = 0.517				
$\widehat{\gamma_3}$ = 0.034				0.057
$\widehat{\gamma_4}$ = 0.060				
$\widehat{\gamma_5}$ = 0.214				

Reconstitution des données de l'exemple support

	L2	L3	L5	L6
G2	13.216	12.952	14.629	13.204
G8	13.161	12.835	9.851	14.583
G9	11.877	11.574	10.265	12.784
G10	13.851	13.546	12.147	14.786
G12	15.355	15.043	13.109	16.454

Rendement de 5 génotypes de ray-grass

Modèle multiplicatif



$$\mathbf{E}(\mathbf{X_{ij}}) = \mu + \alpha_\mathbf{i} + \beta_\mathbf{j} + \theta\gamma_\mathbf{i}\ \delta_\mathbf{j}$$

Estimation des paramètres

1. Partie additive : Cf Modèle Additif

2. Terme multiplicatif :

Soit R la matrice des termes d'interaction :

$$\mathbf{R_{ij} = X_{ij.} - X_{i..} - X_{.j.} + X_{...}}$$

La méthodes des moindres carrés conduit à estimer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice R'R. Il s'agit d'une décomposition en valeurs singulières, comme en ACP.

Modèles à plusieurs termes multiplicatifs

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{X_{ij}}\big) = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{r}} \theta^{\mathbf{r}}\, \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}\, \delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}}$$

Partie additive : identique.

Termes multiplicatifs : chacun est constitué de façon identique.

Conditions supplémentaires :

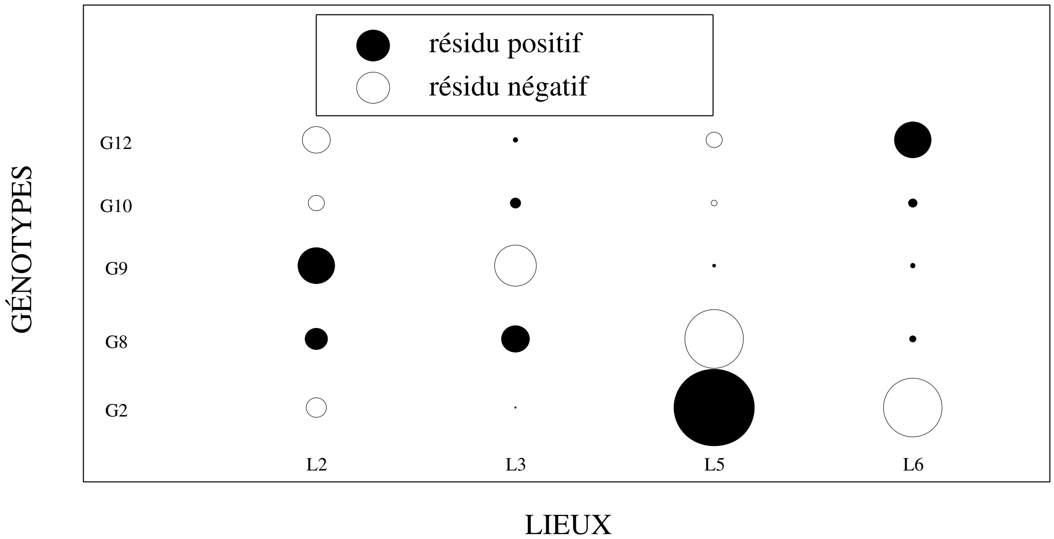
$$\sum_{\mathbf{i}} \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{j}} \delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \qquad \forall_{\mathbf{r}}$$

$$\sum_{\mathbf{i}} \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}\, \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}'} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = r' \text{ (norme = 1)} \\ 0 & \text{si } r \neq r' \text{ (orthogonalité)} \end{cases}$$

(Continued) Modèles à plusieurs termes multiplicatifs

De même pour les $\delta_{\mathbf{j}}$.

Résidus du modèle additif



Résidus du modèle multiplicatif

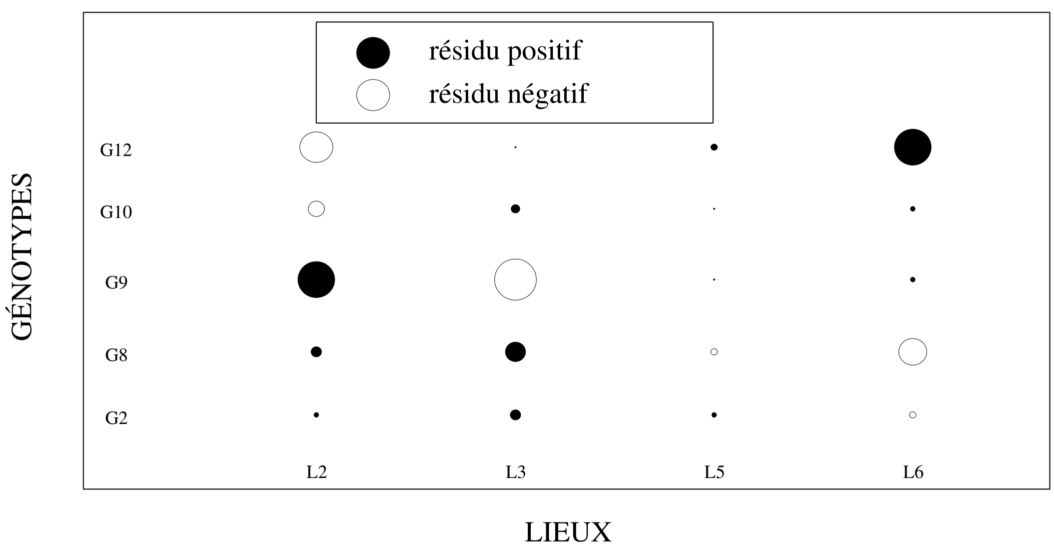


Table d'analyse de variance :

Exemple support :

Origine	SCE	DDL	CM	F	P
Effet lieu	**14.3036**	**3**	**4.7679**	**7.4**	**0.0019 ***
Effet génotype	**25.0139**	**4**	**6.2535**	**9.7**	**0.0003 ***
Interaction G x L	**17.5090**	**12**	**1.4591**	**2.3**	**0.0509**
1er TM	**11.9557**	**6**	**1.9926**	**3.1**	**0.0259 ***
2ème TM	**3.4917**	**4**	**0.8729**	**1.4**	**0.2841**
reste de G x L	**2.0616**	**2**	**1.0308**	**1.6**	**0.2256**
Résiduelle pure	**12.8821**	**20**	**0.6444**		

Table d'analyse de variance :

Présentation générale : cas équirépété

Table d'ANOVA à plusieurs termes multiplicatifs :

Terme du modèle	Interprétation	Somme des carrés	ddl
α_i	effet principal ligne	$JK \sum \alpha_i^2$	I - 1
β_j	effet principal colonne	$IK \sum \beta_j^2$	J - 1
$\theta^1 \; {\gamma_i}^1 \; {\delta_j}^1$	1 er terme multiplicatif	$K \; (\; \theta^1 \;)^2$	I + J - 3
$\theta^2 \; {\gamma_i}^2 \; {\delta_j}^2$	2 ième terme multiplicatif	$K \; (\; \theta^2 \;)^2$	I + J - 5
...	...	...	...
$\theta^r \; {\gamma_i}^r \; {\delta_j}^r$	r ième terme multiplicatif	$K \; (\; \theta^r \;)^2$	I + J - 2r
$(\; \alpha\beta \;)^*{}_{ij}$	partie négligée de l'interaction	par différence	par différence
σ^2	erreur pure	$\sum \left(X_{ijk} - X_{ij.} \right)^2$	IJ (K - 1)

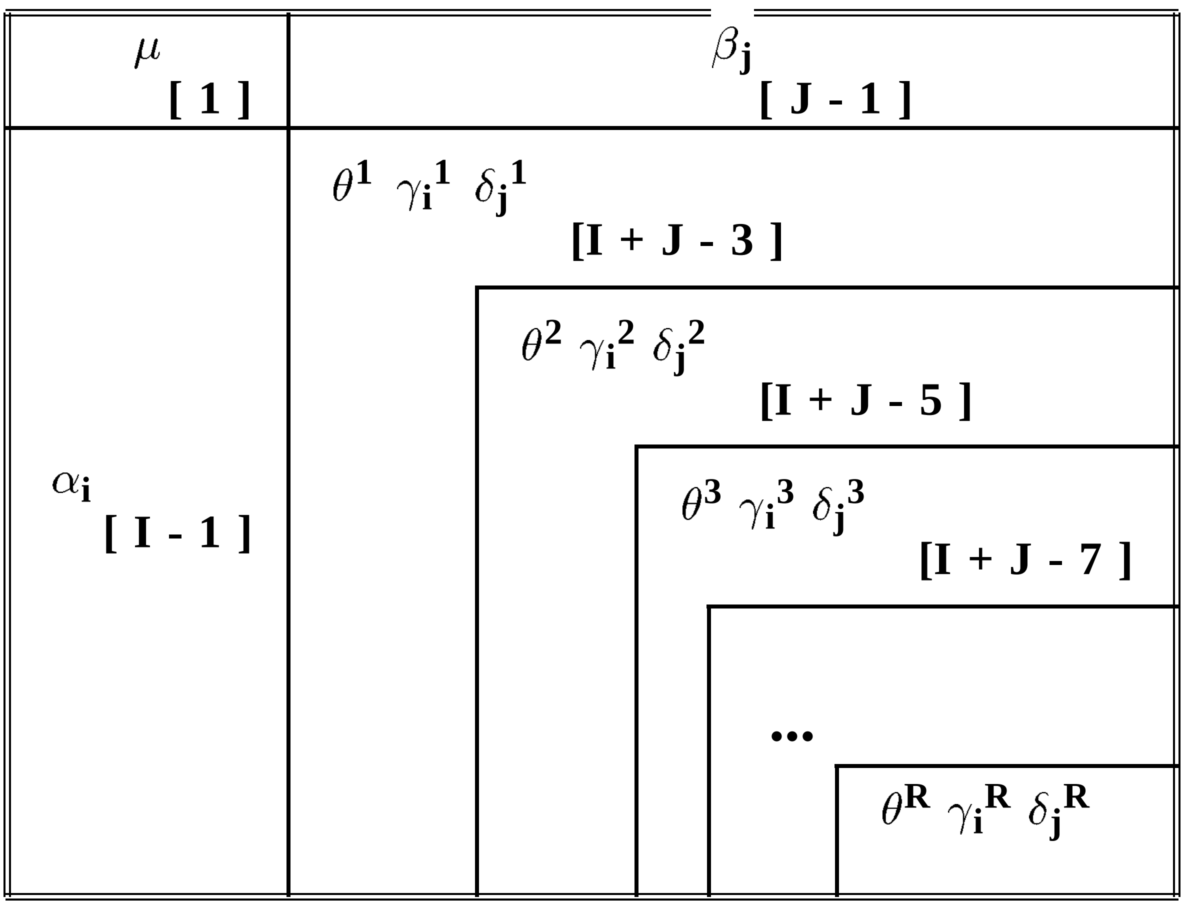
Table récapitulative

Décomposition des degrés de liberté sur l'exemple support :

μ **[1]**	$\beta_{\mathbf{j}}$ **[4 - 1 = 3]**
$\alpha_{\mathbf{i}}$ **[5 - 1 = 4]**	$\theta \ \gamma_{\mathbf{i}} \ \delta_{\mathbf{j}}$ **[6]** **reste de l'interaction [6]**

Table d'analyse de variance : Table récapitulative

Décomposition des degrés de liberté : présentation formelle



Avantages des modèles multiplicatifs :

- **Réduisent le nombre de paramètres à estimer**
- **Ne font pas appel à des données extérieures**
- **Restituent généralement bien les différences de classement**
- **Permettent d'isoler des composantes "indépendantes" de l'interaction**
- **Permettent une orientation vers d'autres méthodes d'analyse de l'interaction**

Inconvénients :

- **Plus complexes que le modèle additif**
- **Pas de contraintes d'ordre**
- **Ne valorisent pas les informations externes si on en dispose**

Suggestions à partir des graphiques