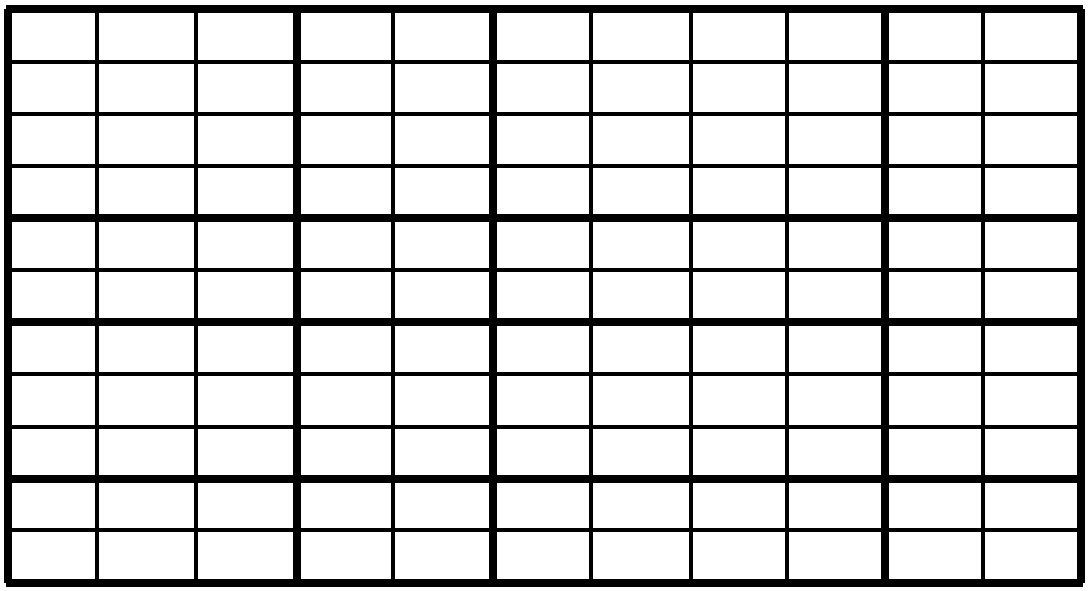
MODÈLES DE STRUCTURATION

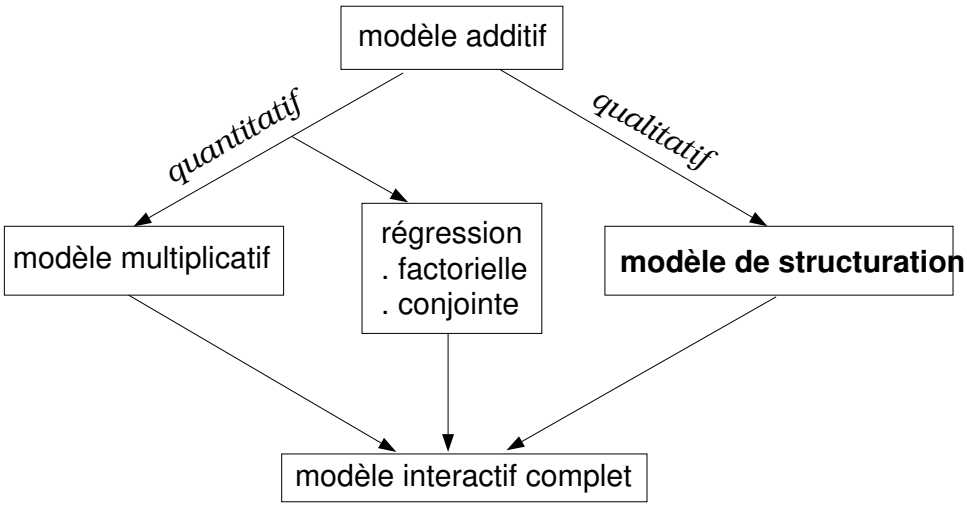
Structuration



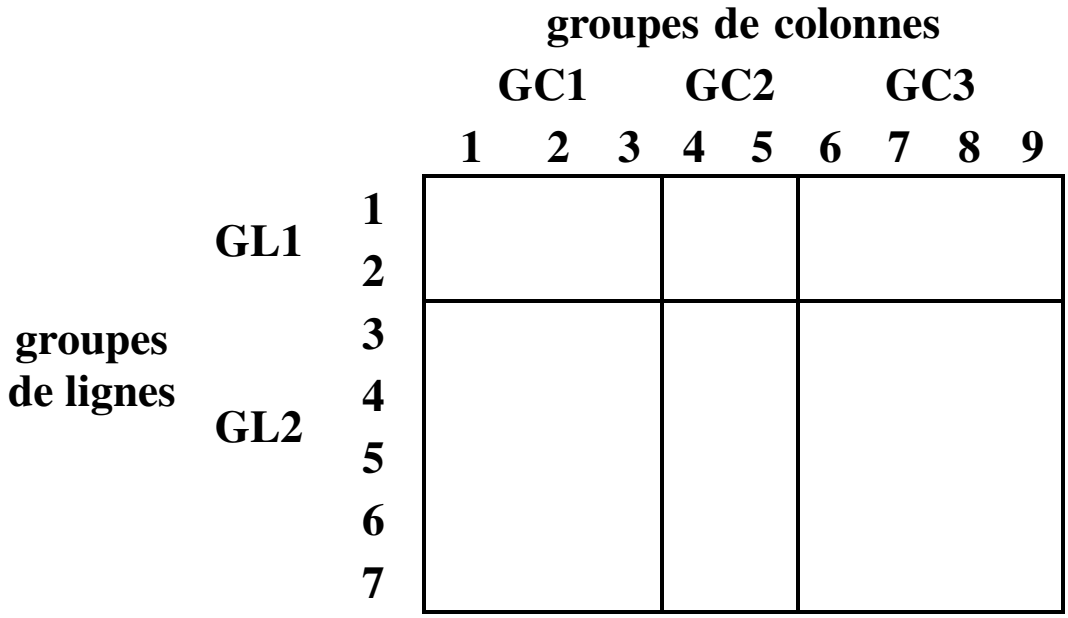
Structuration : plan

- **Introduction**
- **Présentation de l'exemple**
- **Modèle de structuration : estimation**
- **Modèle de structuration : décomposition**
- **Sous-modèle retenu**
- **Structuration a posteriori**

STRUCTURATION



Structuration : le contexte



DEUX POSSIBILITÉS :

1. STRUCTURATION A PRIORI
2. STRUCTURATION A POSTERIORI

Exemple

Structuration a priori

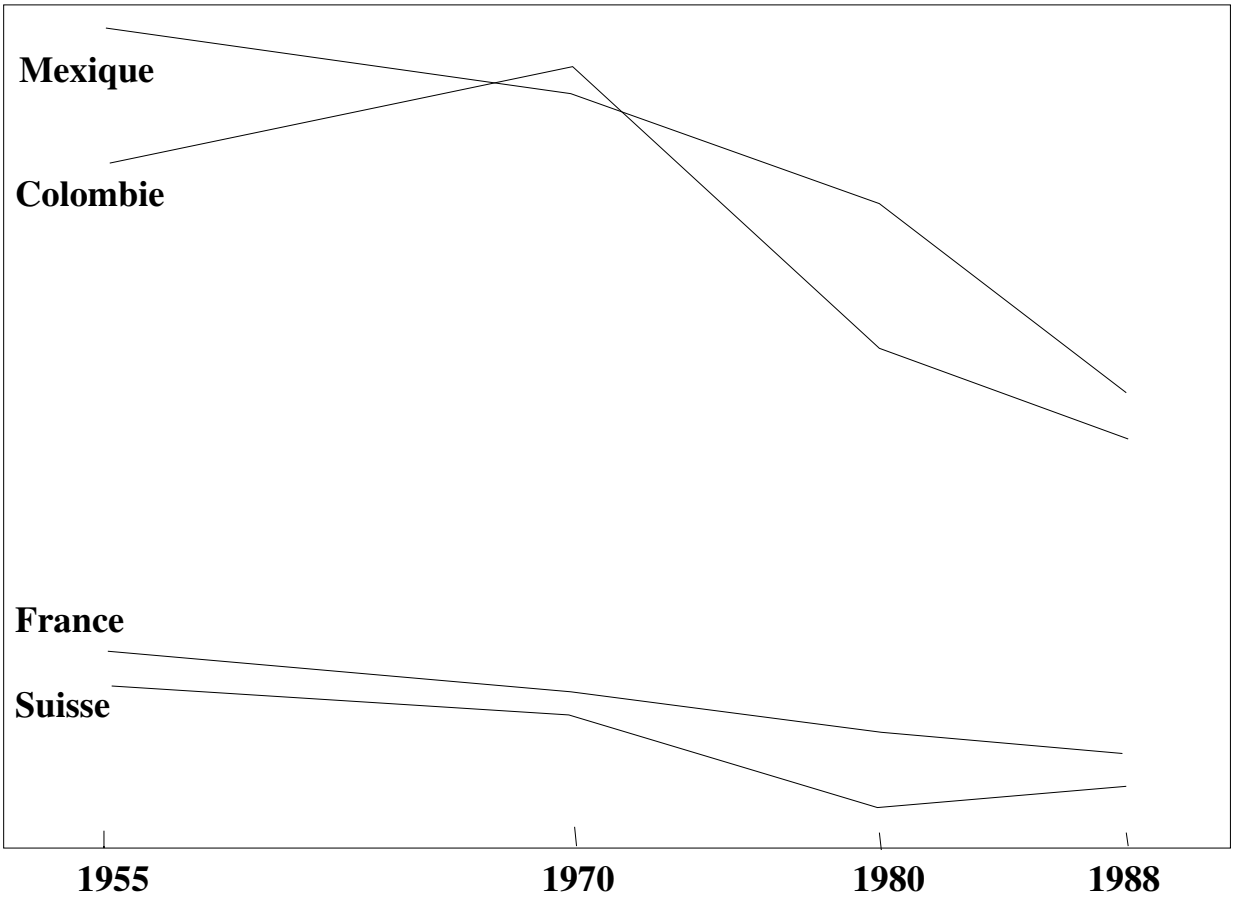
		années			
		1955	1970	1980	1988
pays	FRANCE	18.60	16.70	14.90	13.80
	SUISSE	17.10	15.80	11.60	12.30
	COLOMBIE	40.40	44.60	32.10	28.00
	MEXIQUE	46.40	43.40	38.30	30.00

Exemple

		années			
		1955	1970	1980	1988
pays	FRANCE				
	SUISSE				
	COLOMBIE				
	MEXIQUE				

Exemple

Représentation graphique des données “natalité”



Exemple

Modèle additif : Tableau d'analyse de la variance

ORIGINE	SCE	DDL	CM	F	P
constante	11236.000	1	11236.000		
effet principal pays	2106.965	3	702.322	63.1	0.000
effet principal année	261.230	3	87.077	7.8	0.007
interaction négligée	100.145	9	11.127		

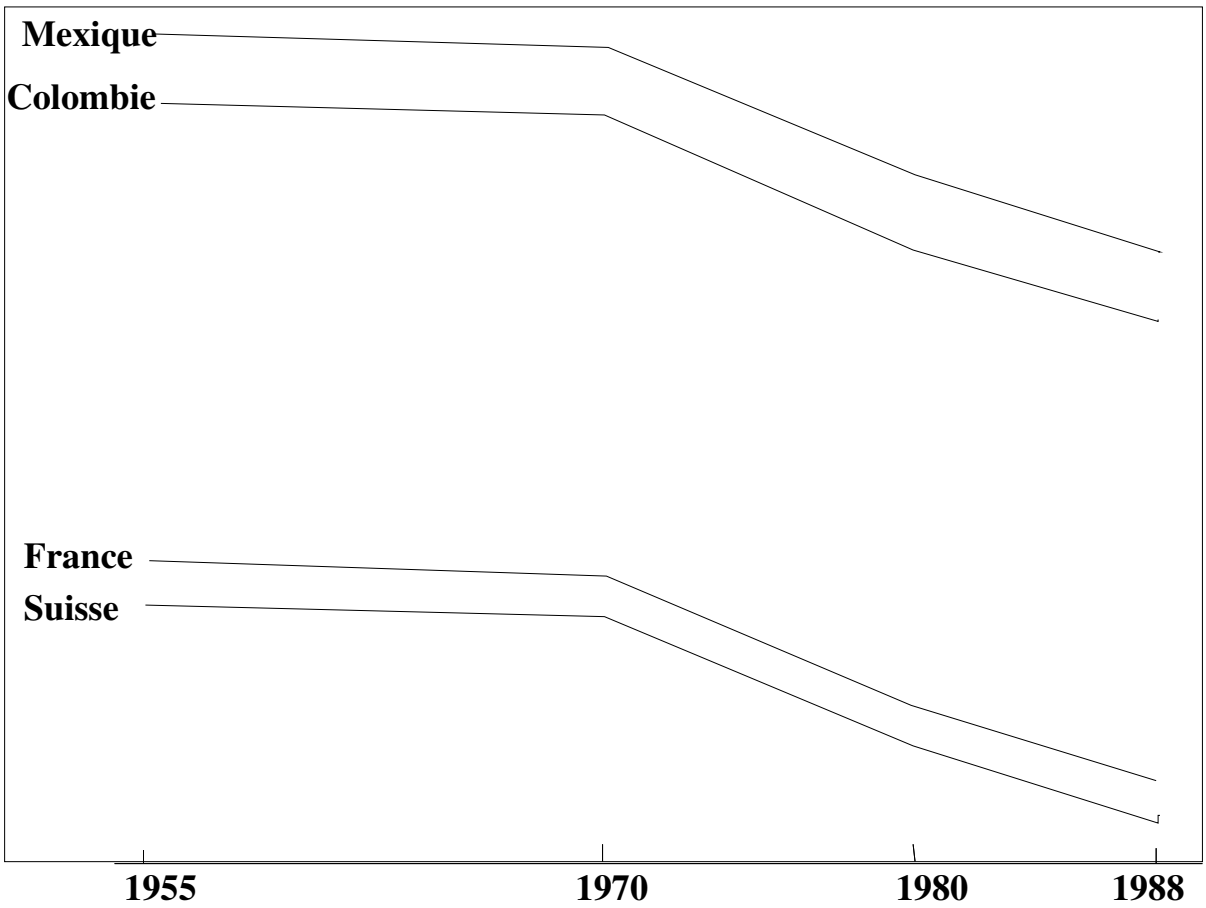
Exemple

Matrice des valeurs estimées dans le cadre du modèle additif

		années			
		1955	1970	1980	1988
pays	FRANCE	20.125	19.625	13.725	10.525
	SUISSE	18.325	17.825	11.925	8.725
	COLOMBIE	40.400	39.900	34.000	30.800
	MEXIQUE	43.650	43.150	37.250	34.050

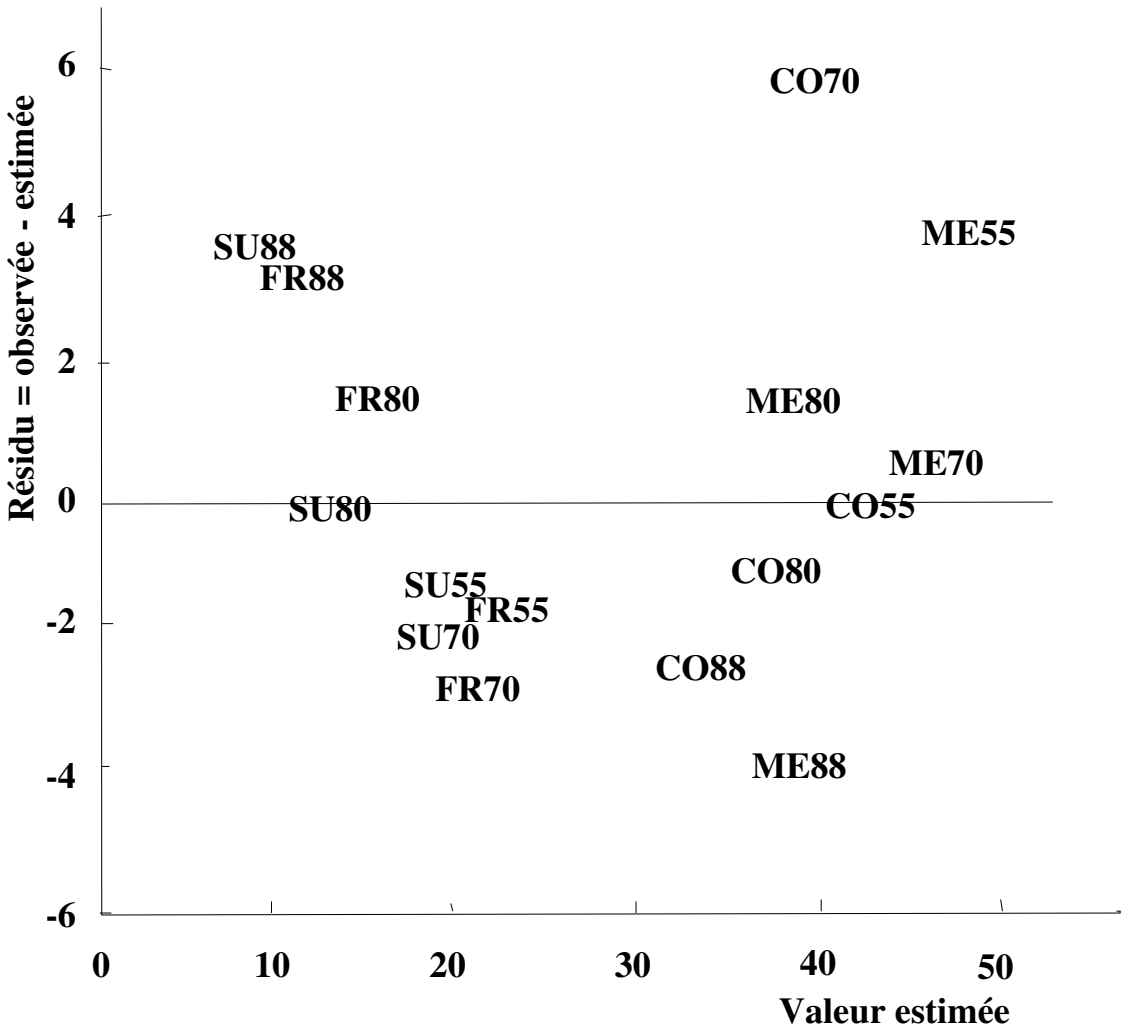
Exemple

Représentation graphique des estimés du modèle additif

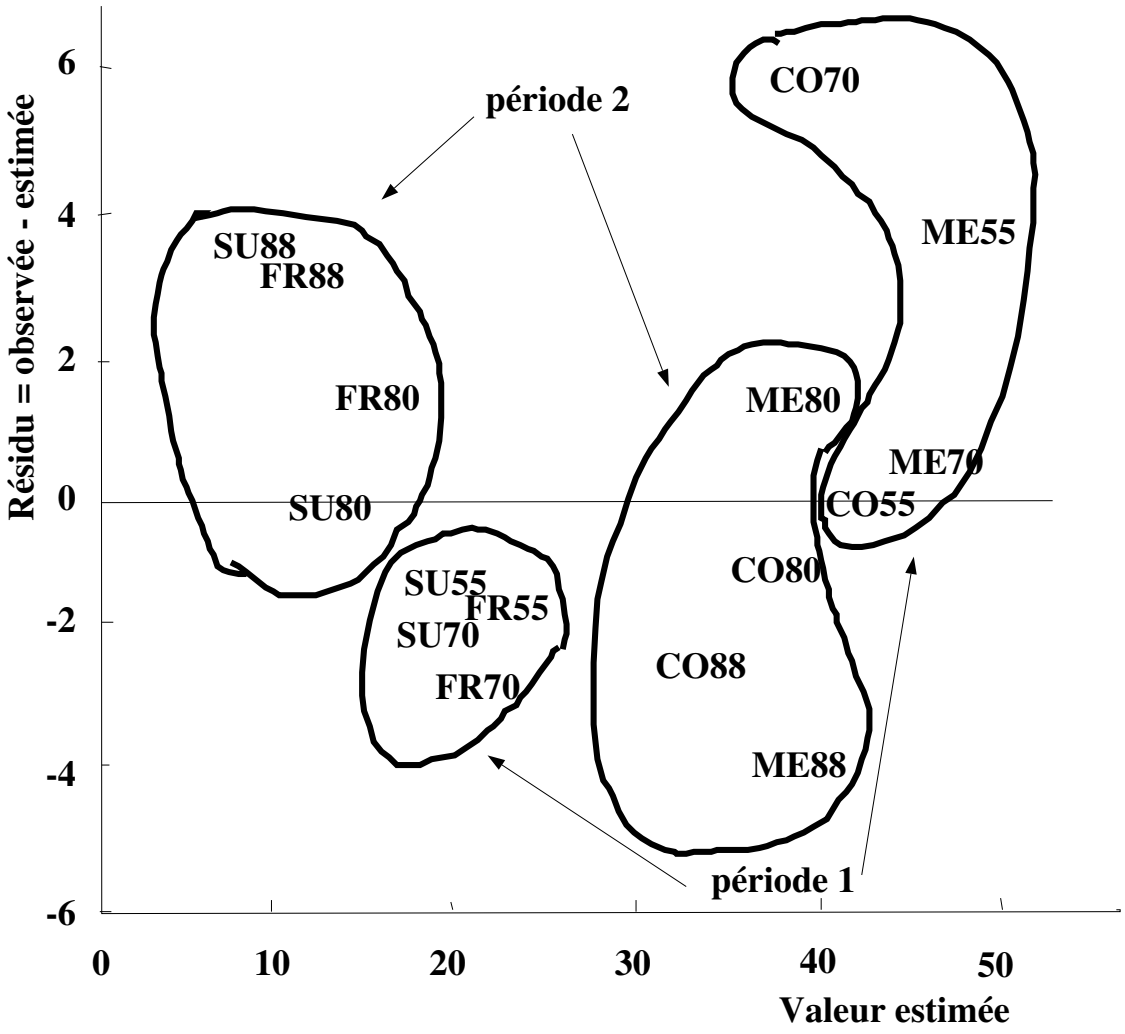


Exemple

Modèle additif : examen des résidus



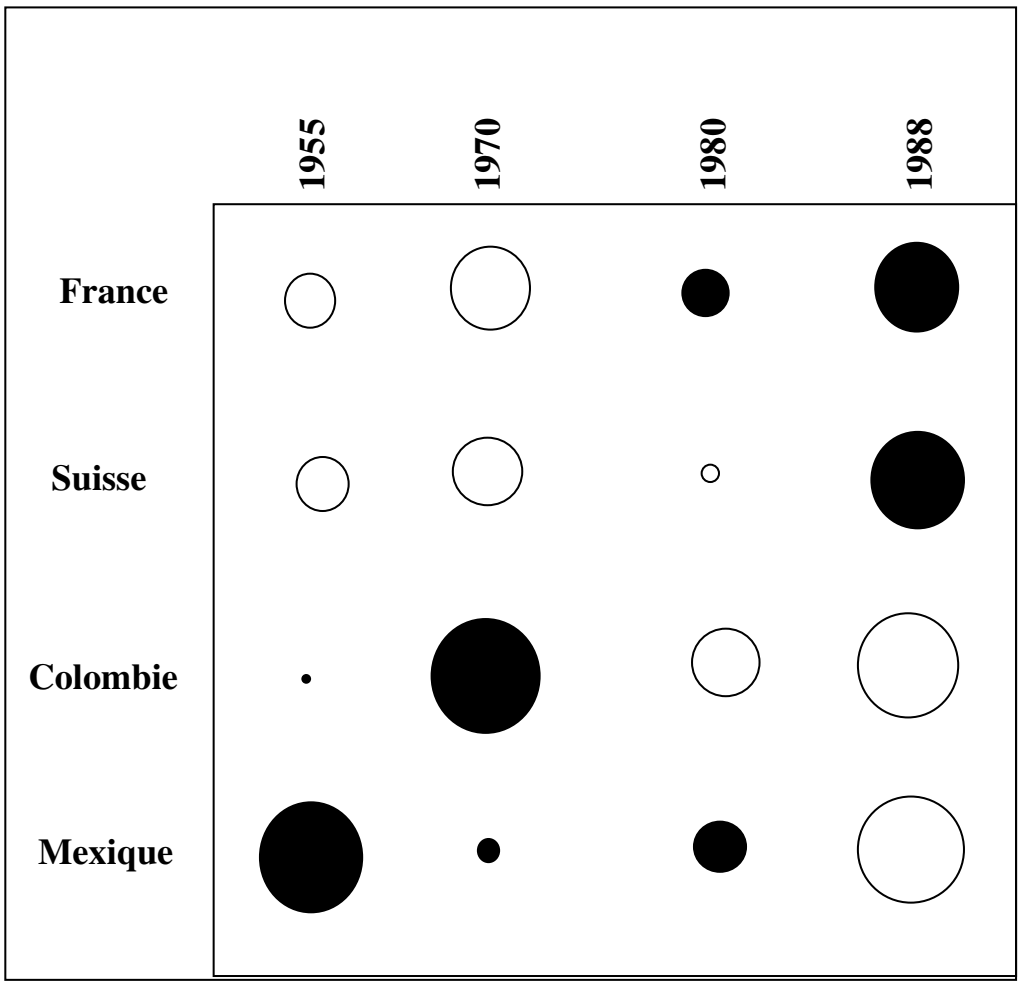
Exemple


Résidu = observée - estimée
Valeur estimée
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
10
20
30
40
50
période 2
période 1
CO70
ME55
SU88
FR88
FR80
ME80
ME70
CO55
SU80
CO80
SU55
FR55
SU70
CO88
FR70
ME88

Exemple

Résidus du modèle additif

résidus		années			
		1955	1970	1980	1988
pays	FRANCE	-1.525	-2.925	1.175	3.275
	SUISSE	-1.225	-2.025	-0.325	3.575
	COLOMBIE	0.000	4.700	-1.900	-2.800
	MEXIQUE	2.750	0.250	1.050	-4.050



Exemple

Structuration

						% SCEr
						22.95
						18.46
						33.49
						25.09
	% SCEr	11.37	34.76	6.19	47.68	100

STRUCTURATION

s(i)	t(j)	1		2	
		1955	1970	1980	1988
1	FRANCE	18.60	16.70	14.90	13.80
	SUISSE	17.10	15.80	11.60	12.30
2	COLOMBIE	40.40	44.60	32.10	28.00
	MEXIQUE	46.40	43.40	38.30	30.00

Structuration : 3 types d'information

Structuration sur les lignes et les colonnes

	PÉRIODE 1		PÉRIODE 2	
EUROPE				
AMÉRIQUE				

Structuration sur les colonnes

	PÉRIODE 1		PÉRIODE 2	
FRANCE				
SUISSE				
COLOMBIE				
MEXIQUE				

Structuration sur les lignes

	1955	1970	1980	1988
EUROPE				
AMÉRIQUE				

Estimation des moyennes pour chaque combinaison de groupe de lignes et groupe de colonnes

s(i)	t(j)	1		2	
		1955	1970	1980	1988
1	FRANCE	17.05	17.05	13.15	13.15
	SUISSE	17.05	17.05	13.15	13.15
2	COLOMBIE	43.70	43.70		
	MEXIQUE	43.70	43.70		

$$\mu_{s(i)t(j)}$$

Structuration sur les colonnes

Tableau des moyennes associées

	1955	1970	1980	1988
France	17.65	17.65	14.35	14.35
Suisse	16.45	16.45	11.95	11.95
Colombie	42.50	42.50	30.05	30.05
Mexique	44.90	44.90	34.15	34.15

$$\mu_{\mathbf{i\,t(j)}}$$

Estimation de l'effet ligne à l'intérieur des groupes de colonnes

17.65	**17.65**	**14.35**	**14.35**
16.45	**16.45**	**11.95**	**11.95**
42.50	**42.50**	**30.05**	**30.05**
44.90	**44.90**	**34.15**	**34.15**

$\mu_{\text{i t(j)}}$

-

17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**

$\mu_{\text{s(i) t(j)}}$

=

0.60	**0.60**	**1.20**	**1.20**
-0.60	**-0.60**	**-1.20**	**-1.20**
-1.20		**-2.05**	**-2.05**
1.20	**1.20**	**2.05**	**2.05**

$\alpha_{\text{i t(j)}}$

Structuration sur les lignes

Tableau des moyennes associées

	1955	1970	1980	1988
France	17.85	16.25	13.25	13.05
Suisse	17.85	16.25	13.25	13.05
Colombie	43.40	44.00	35.20	29.00
Mexique	43.40	44.00	35.20	29.00

$$\mu_{s(i)\,j}$$

Estimation de l'effet colonne à l'intérieur des groupes de lignes

17.85	**16.25**	**13.25**	**13.05**
17.85	**16.25**	**13.25**	**13.05**
43.40	**44.00**	**35.20**	**29.00**
43.40	**44.00**	**35.20**	**29.00**

$\mu_{s(i)\,j}$

-

17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**

$\mu_{s(i)\,t(j)}$

=

0.80		**0.10**	**-0.10**
0.80		**0.10**	**-0.10**
-0.30	**0.30**	**3.10**	**-3.10**
-0.30	**0.30**	**3.10**	**-3.10**

$\beta_{s(i)\,j}$

Écriture du modèle de structuration

$$\mathbf{E}\,[\,\mathbf{X}_{ij}\,] = \mu_{s(i)\ t(j)} + \alpha_{i\ t(j)} + \beta_{s(i)\ j}$$

Généralisation du modèle additif :

si $s(i) = 1$ et $t(j) = 1$

$$\mathbf{E}\,[\,\mathbf{X}_{ij}\,] = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Calcul des valeurs estimées

Application du modèle précédent

17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
17.05	**17.05**	**13.15**	**13.15**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**
43.70	**43.70**	**32.10**	**32.10**

0.60	**0.60**	**1.20**	**1.20**
-0.60	**-0.60**	**-1.20**	**-1.20**
-1.20	**-1.20**	**-2.05**	**-2.05**
1.20	**1.20**	**2.05**	**2.05**

0.80	**-0.80**	**0.10**	**-0.10**
0.80	**-0.80**	**0.10**	**-0.10**
-0.30	**0.30**	**3.10**	**-3.10**
-0.30	**0.30**	**3.10**	**-3.10**

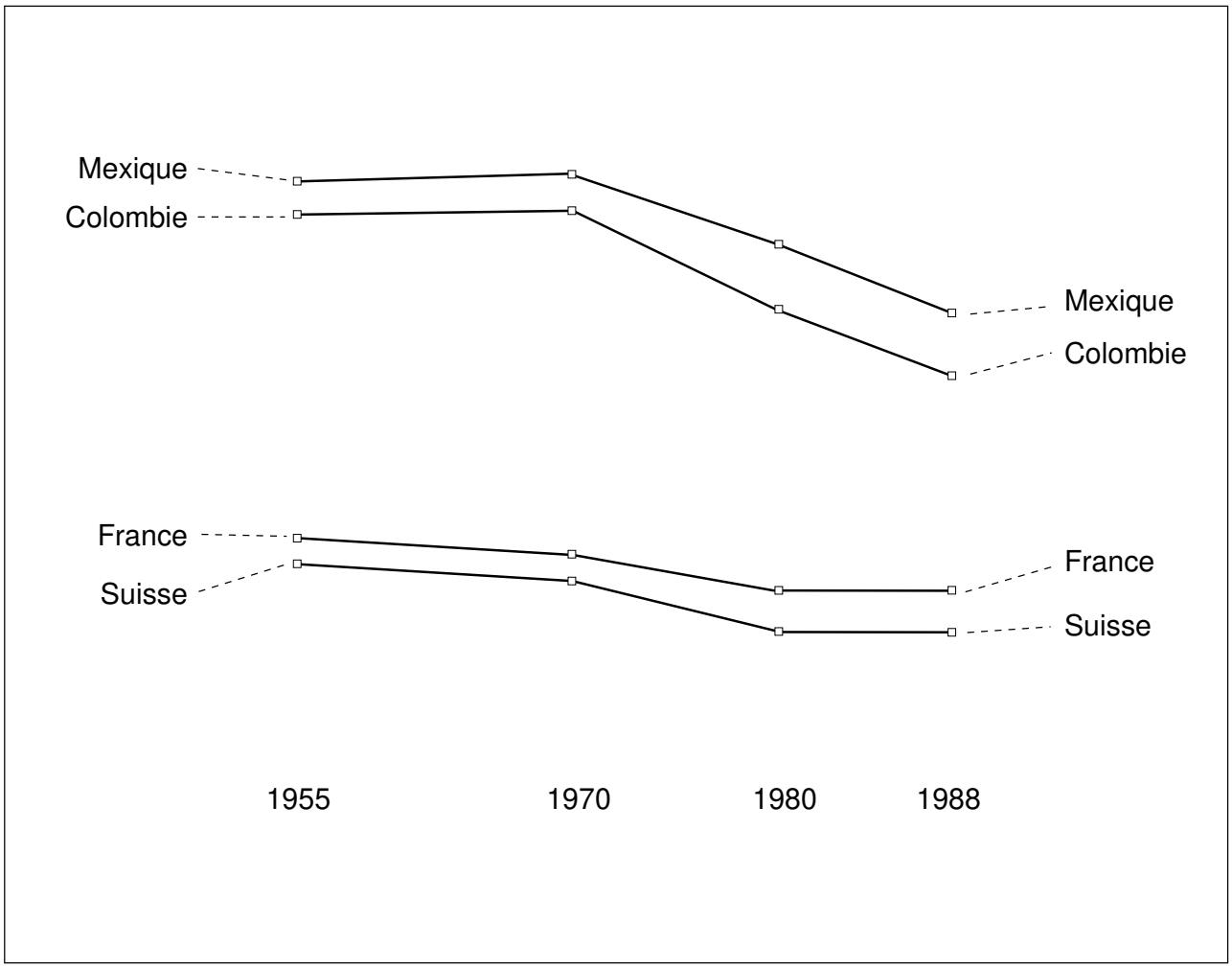
18.45	**16.85**	**14.45**	**14.25**
17.25	**15.65**	**12.05**	**11.85**
42.20	**42.80**	**33.15**	**26.95**
44.60	**45.20**	**37.25**	**31.05**

$$\beta_{s(i)\,j}$$

$$=$$

(Continued) Calcul des valeurs estimées $E[X_{ij}]$

Estimations du modèle de structuration



Calcul des résidus

18.60	**16.70**	**14.90**	**13.80**
17.10	**15.80**	**11.60**	**12.30**
40.40	**44.60**	**32.10**	**28.00**
46.40	**43.40**	**38.30**	**30.00**

observées

-

18.45	**16.85**	**14.45**	**14.25**
17.25	**15.65**	**12.05**	**11.85**
42.20	**42.80**	**33.15**	**26.95**
44.60	**45.20**	**37.25**	**31.05**

estiméees

=

0.15	**-0.15**	**0.45**	**-0.45**
-0.15	**0.15**	**-0.45**	**0.45**
-1.80	**1.80**	**-1.05**	**1.05**
1.80	**-1.80**	**1.05**	**-1.05**

résidus

Modèle de structuration complet

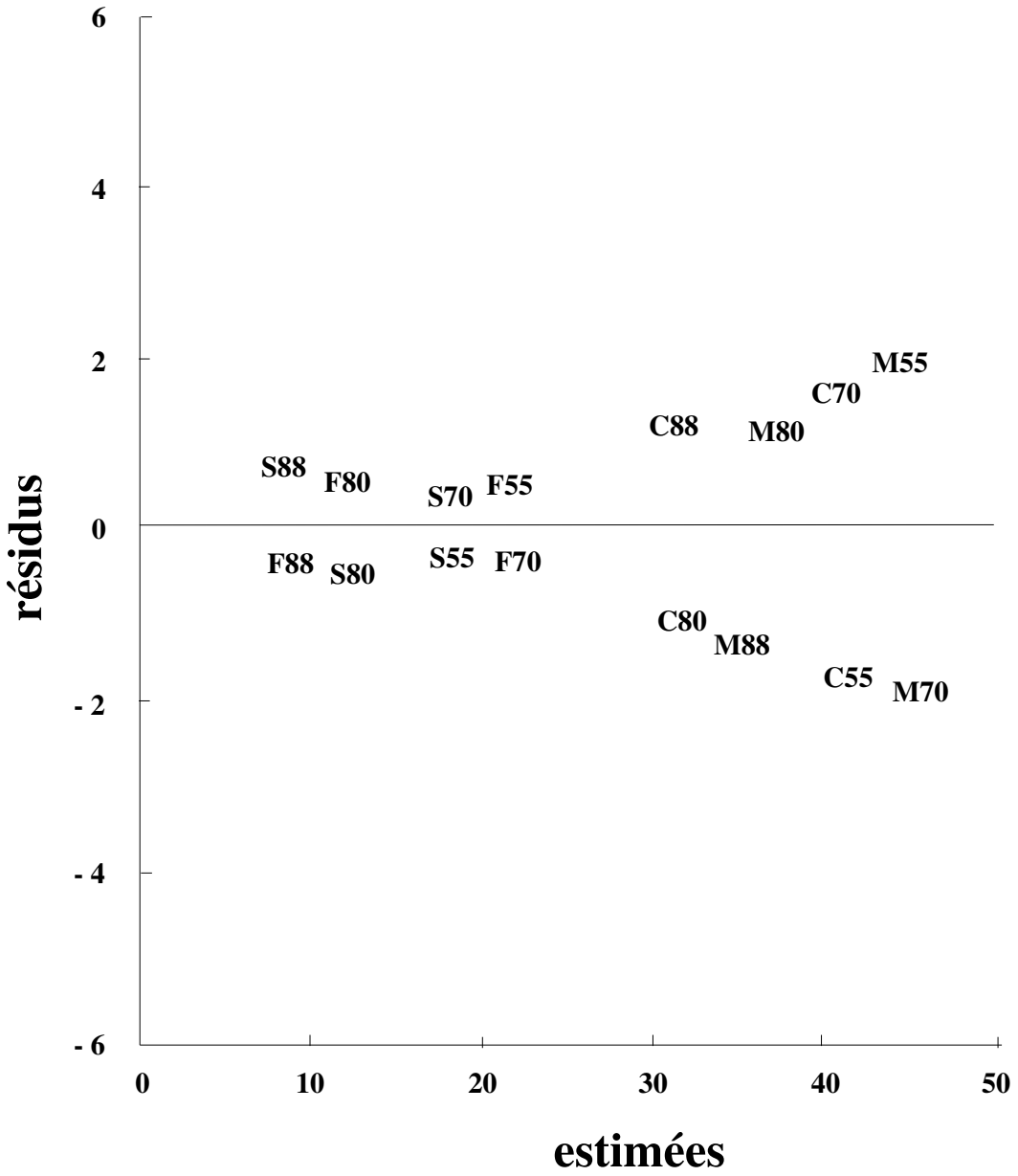


Table récapitulative associée au modèle de structuration

Dimensions :	*T*	*J - T*
S	$\mu_{s(i)t(j)}$ [*ST*]	$\beta_{s(i)j}$ [*S(J - T)*]
I - S	$\alpha_{i\ t(j)}$ [*T(I - S)*]	θ^*_{ij} [*(I - S)(J - T)*]

termes du modèle
[degrés de liberté]
θ^*_{ij} : partie négligée de l'interaction

Intégration du Modèle Additif dans le Modèle de Structuration

Dimensions :	*T*	*J - T*
S	$\mu_{s(i)t(j)}$	$\beta_{s(i)j}$
I - S	$\alpha_{i\,t(j)}$	θ^*_{ij}

Dimensions :	*1*	*T - 1*	*J - T*
1	μ	$\beta_{t(j)}$	β^*_j

S - 1	$\alpha_{s(i)}$	$\theta_{s(i)t(j)}$	$\theta_{s(i)j}$
I - S	α^*_i	$\theta_{i\,t(j)}$	θ^*_{ij}

..	**.B**	**.W**
B.	**BB**	**BW**
W.	**WB**	**WW**

Table d'analyse de variance

Terme du modèle	Interprétation	DDL
β_j =	effet principal colonne	J - 1
$\beta_{t(j)}$ +	effet principal groupe de colonnes [Between]	T - 1
β^*_j	effet principal colonnes dans les groupes[Within]	J - T
α_i =	effet principal ligne	I - 1
$\alpha_{s(i)}$ +	effet principal groupe de lignes [Between]	S - 1
α^*_i	effet principal lignes dans les groupes [Within]	I - S
θ_{ij} =	interaction	(I - 1)(J - 1)
$\theta_{s(i)\,t(j)}$ +	interaction [Between * Between]	(S - 1)(T - 1)
$\theta_{s(i)\,j}$ +	interaction [Between * Within]	(S - 1)(J - T)
$\theta_{i\,t(j)}$ +	interaction [Within * Between]	(I - S)(T - 1)
$\theta_{i^*j^*}$	interaction [Within * Within]	(I - S)(J - T)
erreur	résiduelle pure	

Décomposition des carrés moyens et table d'analyse de variance

C.M.		période	année/période
	11236.0 [1]	240.3 [1]	10.5 [2]
continent	2079.4 [1]	59.3 [1]	10.2 [2]
pays/continent	13.8 [2]	1.1 [2]	4.6 [4]

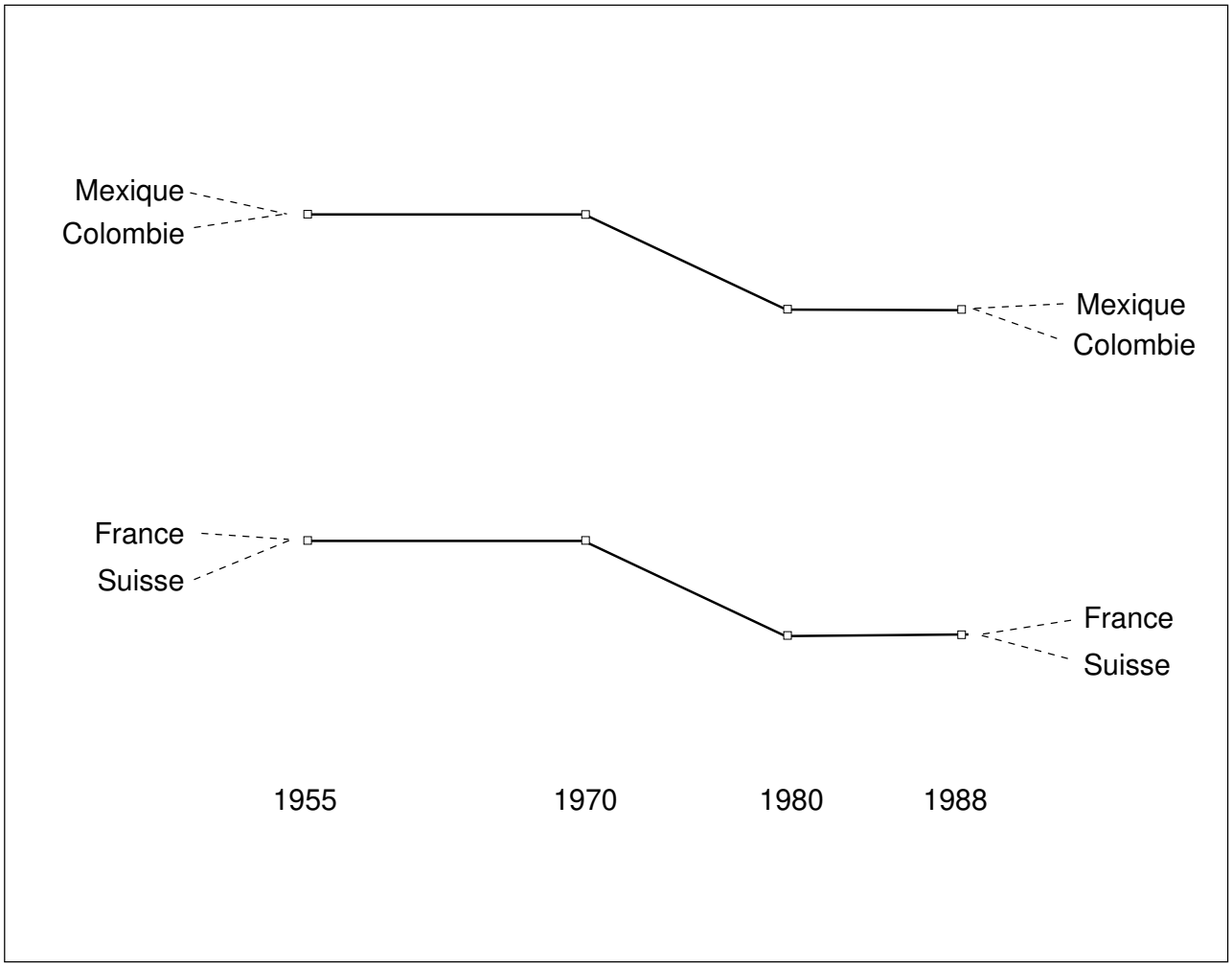
[ ] ddl associé

Terme de modèle et origine		SCE	DDL	CM	F	
β_j	**effet principal année =**	**261.2**	**3**	**87.1**	**19.1**	*
$\beta_{t(j)}$	**période +**	**240.3**	**1**	**240.3**	**52.6**	*
β^*_j	**année/période**	**21.0**	**2**	**10.5**	**2.3**	
α_i	**effet principal pays =**	**2107.0**	**3**	**702.3**	**153.8**	*
$\alpha_{s(i)}$	**continent +**	**2079.4**	**1**	**2079.4**	**455.0**	*
α^*_i	**pays/continent**	**27.6**	**2**	**13.8**	**3.0**	
θ_{ij}	**interaction pays * année =**	**100.2**	**9**	**11.1**		
$\theta_{s(i)\,t(j)}$	**continent * période +**	**59.3**	**1**	**59.3**	**13.0**	*
$\theta_{s(i)\,j}$	**continent * année/période +**	**20.4**	**2**	**10.2**	**2.2**	

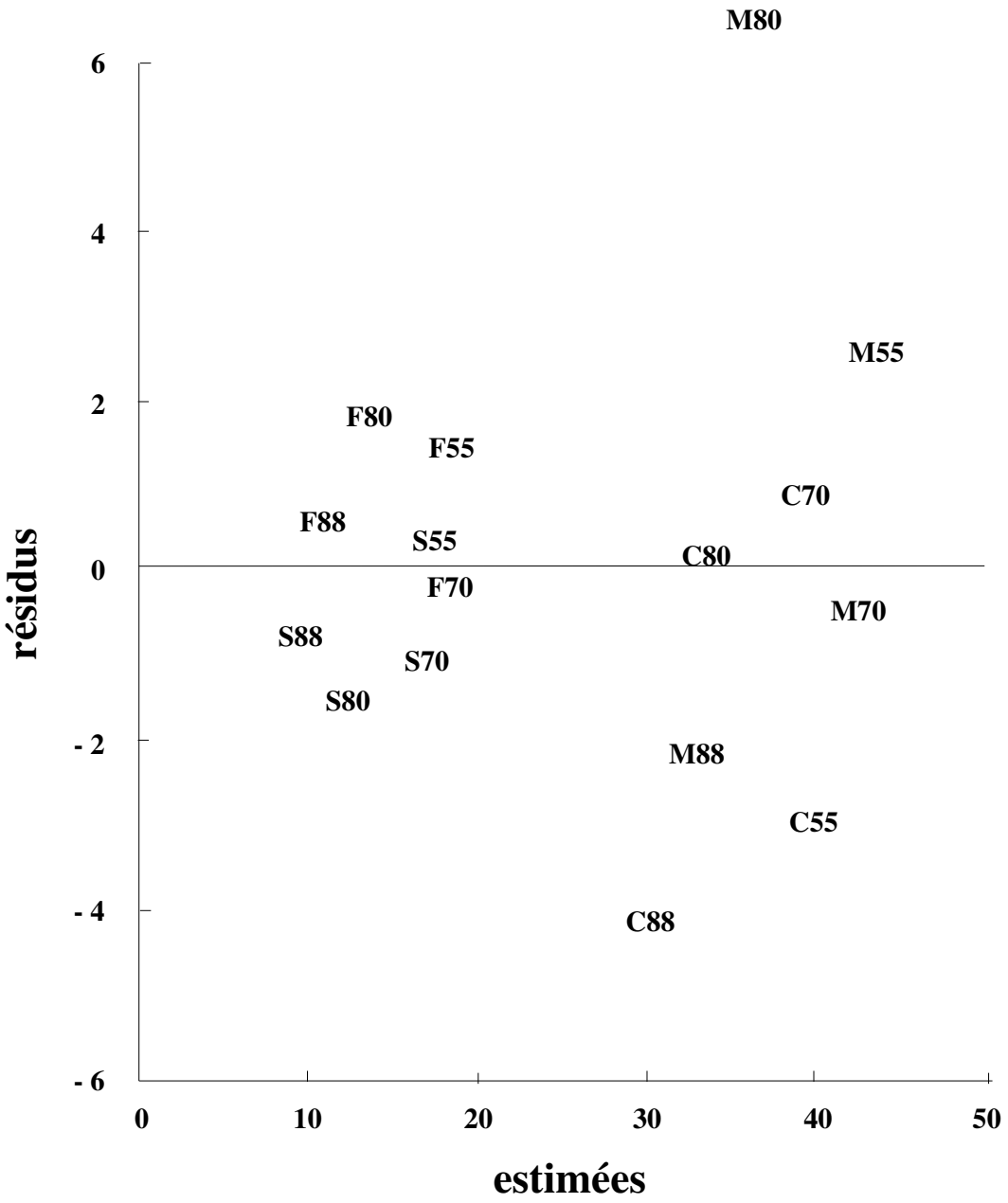
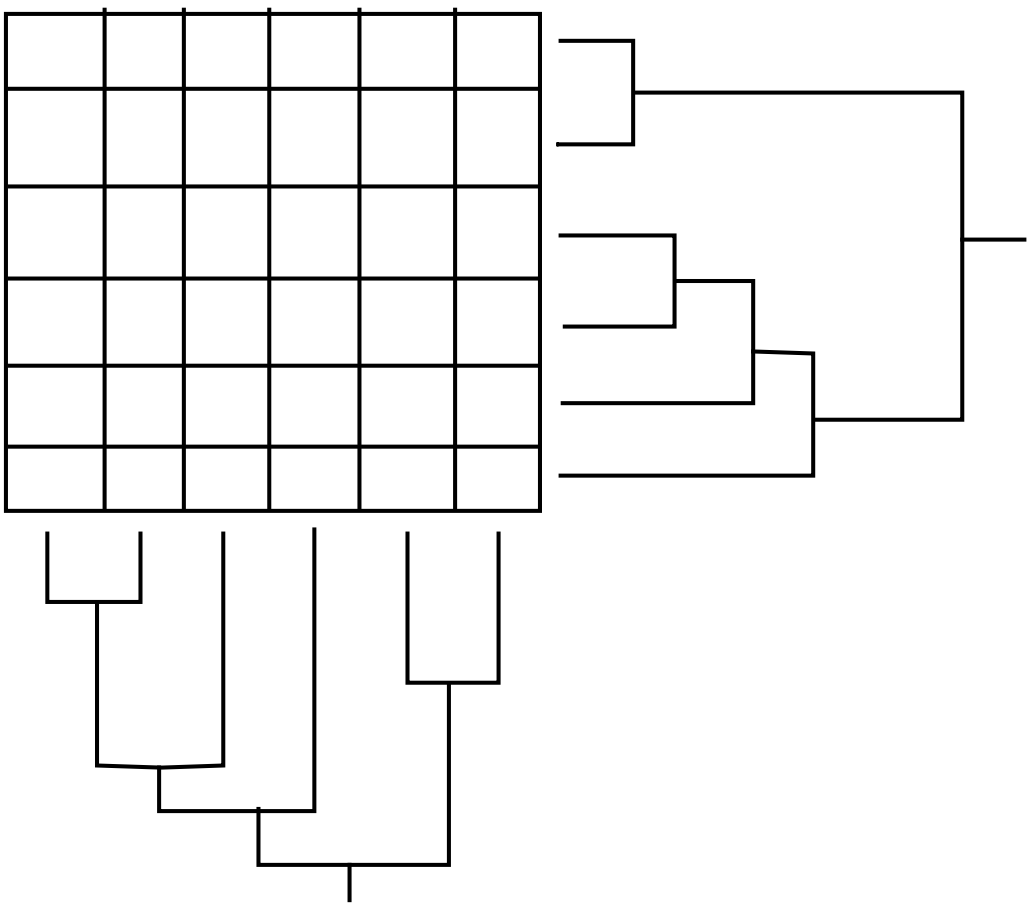
(Continued) Décomposition des carrés moyens et table d'analyse de variance

$\theta_{i\,t(j)}$	**pays/continent * période +**	**2.2**	**2**	**1.1**	**0.2**
θ^{*}_{ij}	**pays/continent * année/période**	**18.3**	**4**	**4.6**	

Représentation graphique



Modèle de Structuration Réduit



STRUCTURATION A POSTERIORI