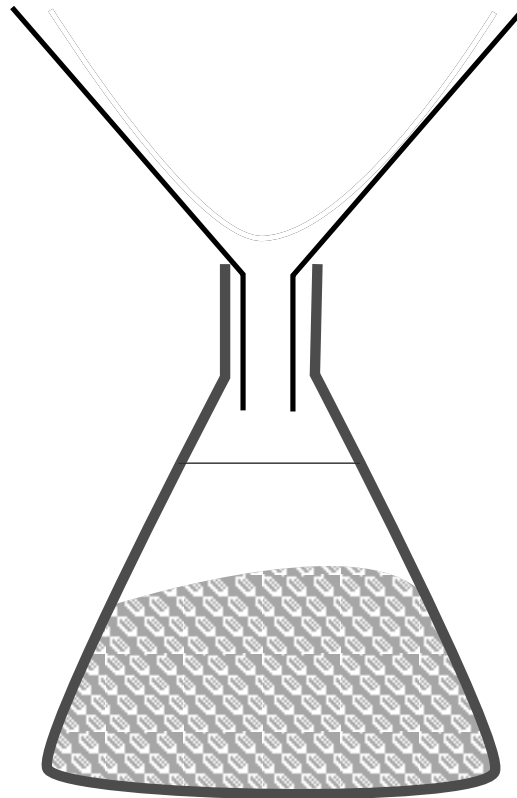


# MODÈLE ADDITIF

---

# Le modèle additif

- modèle central
- l'interaction : écart au modèle additif



---

# Plan

## 1. Exemple

- Le contexte
- Les données
- Représentation graphique

## 2. Estimation

- Estimation des paramètres
- Résidus

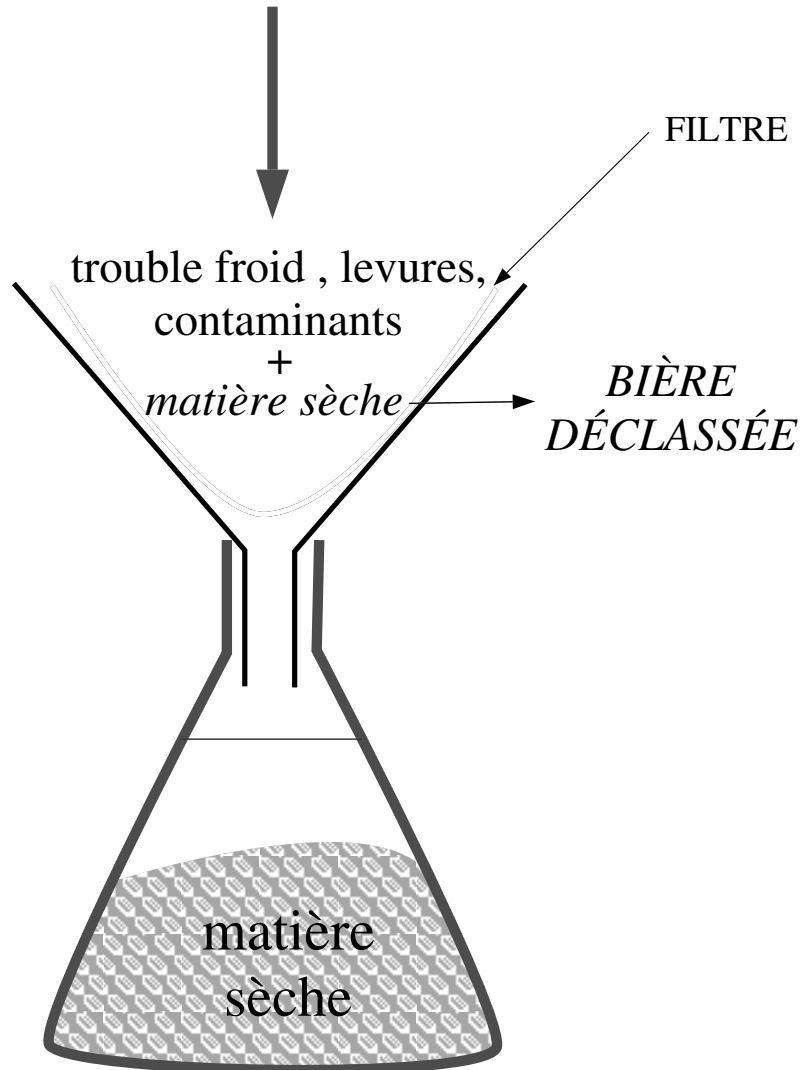
## 3. Points forts

## 4. Décomposition

- Table d'ANOVA
- Table récapitulative

## Le contexte

BIÈRES DE BRASSERIE CHARGÉES EN  
" TROUBLE FROID " , LEVURES  
ET CONTAMINANTS



# Effet de la filtration sur la quantité de matière sèche de bières.

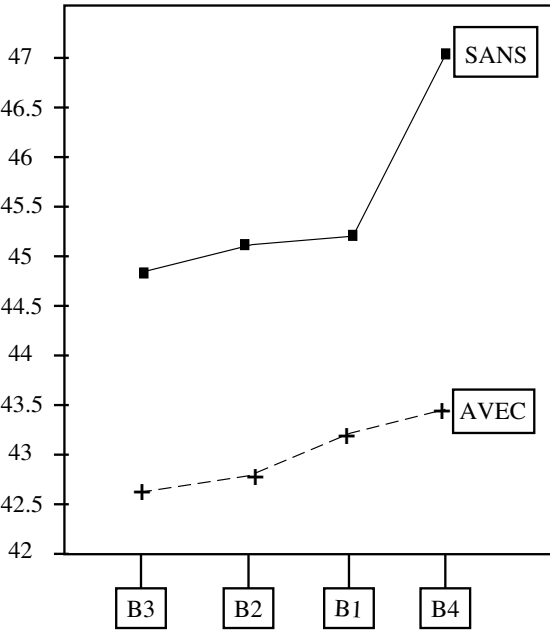
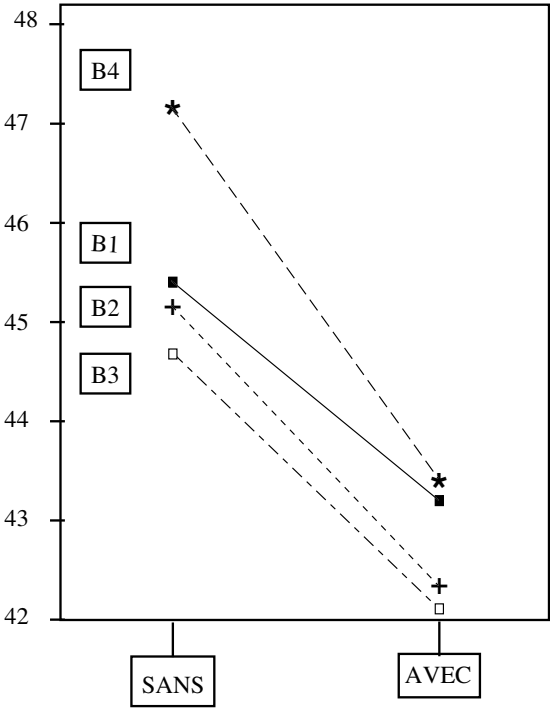
## Les données

		FILTRATION	
		SANS	AVEC
BIÈRE	B1	45.300	43.235
	B2	45.125	42.395
	B3	44.765	42.215
	B4	47.275	43.460

Convention :  $X_{ij}$      $i$  : ligne ( 1 à I )    ;    bière ( I=4 )  
    $j$  : colonne ( 1 à J )    ;    filtration ( J=2 )

Exemples :     $X_{11} = 45.300$   
    $X_{42} = 43.460$

# Représentation graphique des données



## Questions des expérimentateurs

- Le filtre retient-il une partie de la matière sèche des bières?
- Les bières ont-elles un comportement différent en filtration?

		FILTRATION		
		SANS	AVEC	
BIÈRE	B1	45.300	43.235	
	B2	45.125	42.395	
	B3	44.765	42.215	
	B4	47.275	43.460	
		44.221		X..

Convention : Moyenne générale =  $X_{..}$  =  $\hat{\mu}$

Moyenne $X_{.j}$	45.616	42.826	
EFFET FILTRE	+1.395	-1.395	

$$\text{EFFET FILTRE} = X_{.j} - X_{..} = \widehat{\beta}_j$$



	44.267	+0.046
	43.760	-0.461
	43.490	-0.731
	45.367	+1.146

$$\text{EFFET BIÈRE} = X_{i.} - X_{..} = \hat{\alpha}_i$$

## Le modèle additif

quantité d'extrait sec de bière obtenue	=	effet moyen général	+	effet du filtre	+	effet de la bière testée
---	---	---------------------------	---	--------------------	---	--------------------------------

$$E(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

### FILTRATION

		SANS	AVEC	EFFET BIÈRE	
BIÈRE	B1			+ 0.046 = $\widehat{\alpha}_1$	$\sum \widehat{\alpha}_i = 0$
	B2			- 0.461 = $\widehat{\alpha}_2$	
	B3			- 0.731 = $\widehat{\alpha}_3$	
	B4			+ 1.146 = $\widehat{\alpha}_4$	
EFFET FILTRE		+ 1.395 = $\widehat{\beta}_1$	- 1.395 = $\widehat{\beta}_2$	44.221 = $\widehat{\mu}$	

$$\sum \widehat{\beta}_j = 0$$

Estimation des données par le modèle

45.662	42.872
44.155	42.365
44.885	42.095
46.762	43.972

## Les résidus du modèle

Écarts entre données réelles et données estimées

	sans	avec
B1	45.300 - 45.662 = -0.360	43.235 - 42.872 = 0.363
B2	45.125 - 45.155 = -0.030	42.395 - 42.365 = 0.030
B3	44.765 - 44.885 = -0.120	42.215 - 42.095 = 0.120
B4	47.275 - 46.762 = 0.512	43.460 - 43.972 = -0.512

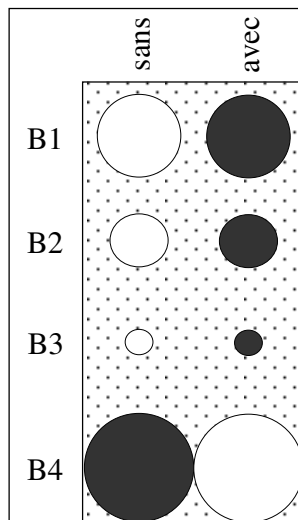
**Formule :**  $R_{ij} = X_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$

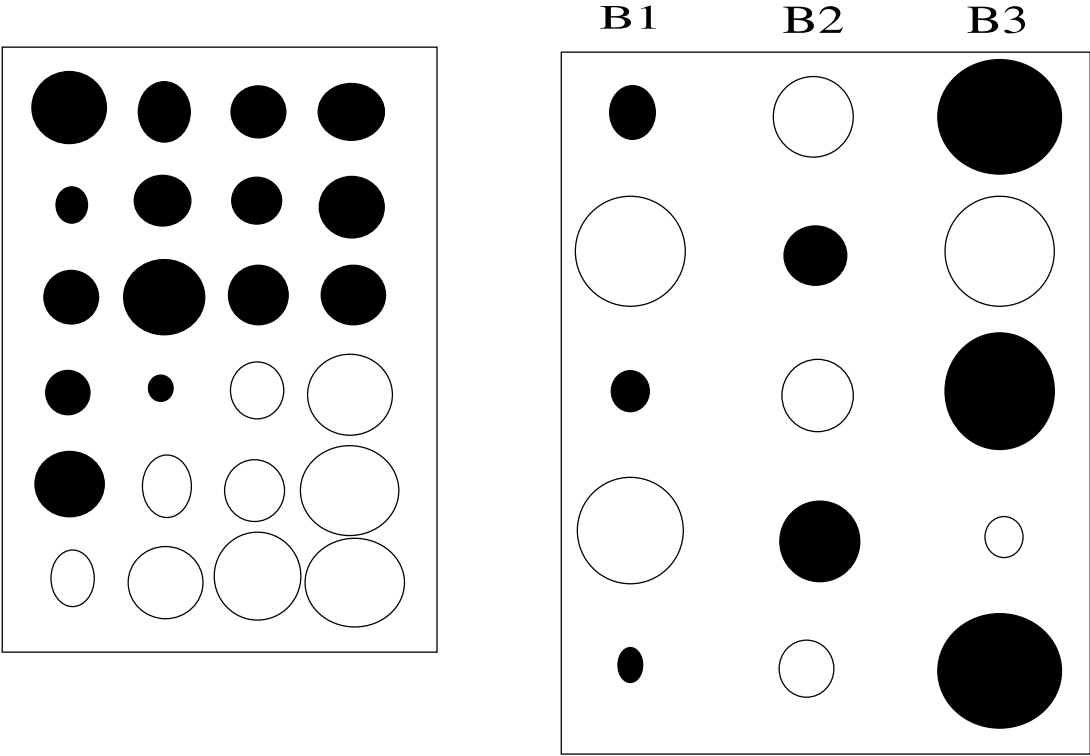
$$R_{ij} = X_{ij} - (X_{..} + (X_{i.} - X_{..}) + (X_{.j} - X_{..}))$$

$$R_{ij} = X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + X_{..}$$

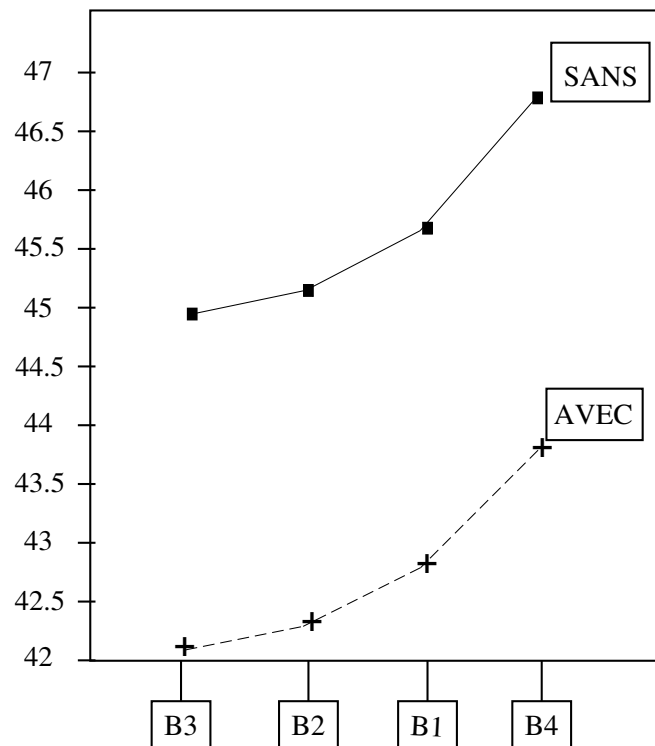
**Remarques :**  $\sum_i R_{ij} = \sum_j R_{ij} = \sum_{ij} R_{ij} = 0$

Représentation graphique des résidus





## Représentation des données estimées par le modèle



### Parallélisme des courbes

$$\begin{aligned}\mu_{ij} - \mu_{i'j} &= \mu + \alpha_i + \beta_j - \mu - \alpha_{i'} - \beta_j \\ &= \alpha_i - \alpha_{i'} \quad \forall j\end{aligned}$$

### Intérêt du modèle additif

L'effet de chaque niveau de facteur se résume à une seule valeur de paramètres et les effets sont "indépendants".

## Table d'analyse de variance de l'exemple

ORIGINE	SCE	DDL	CM	F	PR>F
<b>EFFET PRINCIPAL</b>					
•FILTRE	15.57	1	15.57	57.0	0.0038 *
•BIÈRE	4.13	3	1.37	5.0	0.1089
<b>RESTE</b>	0.82	3	0.27		

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + r_{ij}$$

$X_{ij} - \mu$	=	$\alpha_i$	+	$\beta_j$	+	$r_{ij}$
↓		↓		↓		↓
<b>Variation totale</b>		<b>Effet filtre</b>		<b>Effet bière</b>		<b>Effet résiduel</b>

**Hypothèse de base Ho** : égalité des traitements.

F de Fisher-Snedecor = CM des effets principaux / CM résiduel

## Table récapitulative

D'après l'exemple :

### FILTRATION ( 2 )

**BIÈRES ( 4 )**

$\mu[1]$	$\beta_j[1]$
$\alpha_i[3]$	<b>RESTE [ 3 ]</b>

4 bières  $\rightarrow$  4  $\alpha$  et  $\sum \alpha_i = 0$

D'une manière générale :

### ***J* niveaux**

***I* niveaux**

$\mu[1]$	$\beta_j[J - 1]$
$\alpha_i[I - 1]$	<b>reste [ <i>I</i> - 1 ][ <i>J</i> - 1 ]</b>