ANALYSE DE COVARIANCE ET GÉNÉRALISATION

Plan du chapitre 6

1. Analyse de Covariance “classique”

   L’intérêt d’introduire une covariable

2. Analyse de Covariance “classique”

   Comparaison de droites de régression parallèles

3. Première généralisation

   Comparaison de droites de régression quelconques

4. Seconde généralisation

   Niveaux d’un facteur pouvant être quantifiés

Analyse de covariance “classique”
L’intérêt d’introduire une covariable

Exemple : L’affinages des huîtres

On teste l’effet de la position des paniers d’huîtres sur leur croissance.

Une pesée des paniers est réalisée en début d’expérimentation (INI) puis 1 mois après (FIN).

La question

L’effet de la position des paniers sur le poids en fin d’expérience peut-il être améliorer par la prise en compte du poids initial des paniers ?

Les données

obs	T	r	INI	FIN
1	1	1	27.2	32.6
2	1	2	32	36.6
3	1	3	33	37.7
4	1	4	26.8	31
5	2	1	28.6	33.8
6	2	2	26.8	31.7
7	2	3	26.5	30.7
8	2	4	26.8	30.4
9	3	1	28.6	35.2
10	3	2	22.4	29.1
11	3	3	23.2	28.9
12	3	4	24.4	30.2
13	4	1	29.3	35
14	4	2	21.8	27
15	4	3	30.3	36.4
16	4	4	24.3	30.5
17	5	1	20.4	24.6
18	5	2	19.6	23.4
19	5	3	25.1	30.3
20	5	4	18.1	21.8

Commandes SAS

Modèle d'analyse de variance (orthogonale)

```
proc anova ;
class T ;
model FIN = T ;
run ;
```

Modèle linéaire général, modèle avec covariable

```
proc glm ;
class T ;
model FIN = INI T ;
run ;
```

<u>Sortie SAS</u>

Modèle d'analyse de variance

Analysis of variance Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
T	5	1 2 3 4 5

Number of observations in data set = 20

Dependent Variable : FIN

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	4	198.407000	49.601750	4.64	0.0122
Error	15	160.262500	**10.684167**		
Corrected Total	19	358.669500			

R-Square	C.V.	Root MSE	FIN Mean
0.553175	10.59706	3.26866	30.8450

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
T	4	**198.407000**	49.601750	**4.64**	0.0122

Sortie SAS

Modèle avec covariable

General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
T	5	1 2 3 4 5

Number of observations in data set = 20

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : FIN

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	354.447177	70.889435	235.05	0.0001
Error	14	4.222323	**0.301595**		
Corrected Total	19	358.669500			

R-Square	C.V.	Root MSE	FIN Mean
0.988228	1.780438	0.54918	30.8450

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
INI	1	342.357817	342.357817	1135.16	0.0001
T	4	12.089359	3.022340	10.02	0.0005

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
INI	1	156.040177	156.040177	517.38	0.0001
T	4	**12.089359**	3.022340	**10.02**	0.0005

Analyse de covariance "classique" Comparaison de droites de régression

Exemple : Pression sanguine des hommes et des femmes

On mesure la pression sanguine de personnes de différents âges.

La question

La variation de la pression sanguine (PS) en fonction de l'âge (AGE) est-elle différente selon que l'on mesure des hommes ou des femmes (SEXE) ?

Les données

Obs	SEXE	PS	AGE
1	Homme	158	41
2	Homme	185	60
3	Homme	152	41
4	Homme	159	47
5	Homme	176	66
6	Homme	156	47
7	Homme	184	68
8	Homme	138	43
9	Homme	172	68
10	Homme	168	57
11	Homme	176	65
12	Homme	164	57
13	Homme	154	61
14	Homme	124	36
15	Homme	142	44
16	Homme	144	50
17	Homme	149	47
18	Homme	128	19
19	Homme	130	22
20	Homme	138	21
21	Homme	150	38
22	Homme	156	52
23	Homme	134	41
24	Homme	134	18
25	Homme	174	51
26	Homme	174	55
27	Homme	158	65
28	Homme	144	33
29	Homme	139	23
30	Homme	180	70
31	Homme	165	56
32	Homme	172	62
33	Homme	160	51

Obs	SEXE	PS	AGE
34	Homme	157	48
35	Homme	170	59
36	Homme	153	40
37	Homme	148	35
38	Homme	140	33
39	Homme	132	26
40	Homme	169	61
41	Femme	144	39
42	Femme	138	45
43	Femme	145	47
44	Femme	162	65
45	Femme	142	46
46	Femme	170	67
47	Femme	124	42
48	Femme	158	67
49	Femme	154	56
50	Femme	162	64
51	Femme	150	56
52	Femme	140	59
53	Femme	110	34
54	Femme	128	42
55	Femme	130	48
56	Femme	135	45
57	Femme	114	17
58	Femme	116	20
59	Femme	124	19
60	Femme	136	36
61	Femme	142	50
62	Femme	120	39
63	Femme	120	21
64	Femme	160	44
65	Femme	158	53
66	Femme	144	63
67	Femme	130	29
68	Femme	127	25
69	Femme	175	69

Modèles proposés

Modèle de covariance

$$\mu_{\mathrm{n}} = \theta_0 + \theta_1\ \mathrm{age_n} + \underbrace{\alpha_{\mathrm{i}}}_{\text{facteur sexe}} \qquad \mathrm{i = Homme,\ Femme}$$

Modèle de régression avec variable indicatrice

Création d'une variable indicatrice dum

si SEXE = 'Homme' dum = 1

si SEXE = 'Femme' dum = 0

$$\mu_{\mathrm{n}} = \theta_0^{'} + \theta_1^{'}\ \mathrm{age_n} + \theta_2\ \mathrm{dum_n}$$

Démonstration

Modèle de covariance

$$\begin{cases} \mu_{\mathrm{Fr}} = \theta_0 + \theta_1 \mathrm{age}_{\mathrm{Fr}} + \alpha_{\mathrm{F}} \\ \mu_{\mathrm{Hr}} = \theta_0 + \theta_1 \mathrm{age}_{\mathrm{Hr}} + \alpha_{\mathrm{H}} \end{cases}$$

Modèle de régression avec variable **indicatrice**

$$\begin{cases} \mu_{\mathrm{Fr}} = \quad \theta_0^{'} + \theta_1^{'} \mathrm{age}_{\mathrm{Fr}} \\ \mu_{\mathrm{Hr}} = \quad \theta_0^{'} + \theta_1^{'} \mathrm{age}_{\mathrm{Hr}} + \theta_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$	$\theta_0^{'} = \theta_0 + \alpha_{\mathrm{F}}$	ordonnée à l'origine pour les femmes
	$\theta_1^{'} = \theta_1$	pente de la droite
	$\theta_2 = \alpha_{\mathrm{H}} - \alpha_{\mathrm{F}}$	différence des ordonnées à l'origine

Commande SAS

Modèle de covariance ;

```
proc glm ;
class sexe ;
model PS = age sexe ;
run ;
```

Modèle de régression avec variable indicatrice ;

```
if sexe ='Homme' then dum = 1 ;
if sexe ='Femme' then dum = 0 ;
proc reg ;
model PS = age dum ;
run ;
```

Sortie SAS

Modèle de covariance

General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
SEXE	2	Femme Homme

Number of observations in data set = 69

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : PS

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	17897.7652	8948.8826	113.08	0.0001
Error	66	5223.0463	79.1371		
Corrected Total	68	23120.8116			

R-Square	C.V.	Root MSE	PS Mean
0.774098	5.980292	8.89590	148.754

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
AGE	1	14868.2007	14868.2007	187.88	0.0001
SEXE	1	3029.5645	3029.5645	38.28	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
AGE	1	14003.9157	14003.9157	176.96	0.0001
SEXE	1	3029.5645	3029.5645	38.28	0.0001

Sortie SAS

Modèle de régression avec variable indicatrice

Analysis of Variance

Dependent Variable : PS

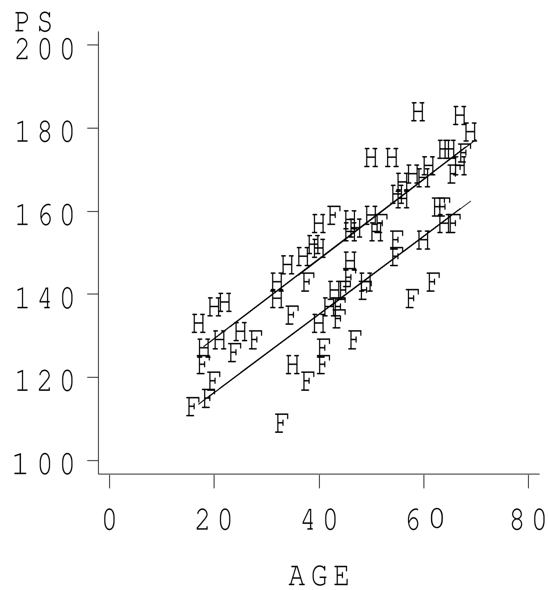
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	17897.76525	8948.88262	113.081	0.0001
Error	66	5223.04635	79.13707		
Corrected Total	68	23120.81159			

R-Square	C.V.	Root MSE	Dep Mean	Adj R-Sq
0.7741	5.98029	8.89590	148.75362	0.7673

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0 : Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	96.959922	3.62817487	26.724	0.0001
AGE	1	0.953452	0.07167443	13.303	0.0001
DUM	1	13.449325	2.17370376	6.187	0.0001

Visualisation graphique



Première généralisation : comparaison de droites de régression quelconques

<u>Exemple : Tarifs de cubage des sapins-épicéas</u>

On mesure le **volume de la grume** .
On souhaite réaliser un **tarif de cubage** (= ajustement entre ce volume et une variable que l'on peut mesurer facilement sur arbre debout).
Cette variable est la **surface terrière** .
<u>La question</u>
Doit-on faire un seul tarif pour le sapin-épicéa ou bien un tarif pour chacune de ces deux essences ?

Les données

Obs	Espece	Volume	ST
1	Sapin	3	0.5
2	Sapin	2.5	2
3	Sapin	3.5	3
4	Sapin	3.5	3.5
5	Sapin	4	5.5
6	Sapin	4	8
7	Sapin	5	9
8	Sapin	5	11
9	Sapin	4.5	12.5
10	Sapin	6	13.5
11	Epicea	1.5	1
12	Epicea	2.5	2.5
13	Epicea	4	4
14	Epicea	3.5	5
15	Epicea	5	7
16	Epicea	6	7.5
17	Epicea	7.5	9.5
18	Epicea	8	11
19	Epicea	9	12.5
20	Epicea	10	13.5

Modèles proposés

Modèle de covariance avec **interaction** facteur-covariable

$$\mu_{\mathrm{n}} = \theta_0 + \theta_1\ \mathrm{ST_n} + \underbrace{\alpha_{\mathrm{i}}}_{\substack{\text{facteur}\\ \text{espèce}}} + \underbrace{\beta_{\mathrm{i}}\ .\ \mathrm{ST_n}}_{\substack{\text{interaction}\\ \text{facteur.covariable}}} \qquad \mathrm{i = Sapin,\ Epicéa}$$

Modèle de régression avec variables indicatrice et **auxiliaire**

Création d'une variable indicatrice

Si Espece = 'Sapin' dum = 1

Si Espece = 'Epicea' dum = 0

Création d'une variable auxiliaire

aux = dum * ST

$$\mu_{\mathrm{n}} = \theta_0^{'} + \theta_1^{'}\ \mathrm{ST_n} + \theta_2\ \mathrm{dum} + \theta_3\ \mathrm{aux}$$

Démonstration

Modèle de covariance avec **interaction** facteur **covariable**

$$\mu_{\mathrm{Er}} = \theta_0 + \theta_1 \ \mathrm{ST}_{\mathrm{Er}} + \alpha_{\mathrm{E}} + \beta_{\mathrm{E}}.\mathrm{ST}_{\mathrm{Er}}$$

$$\mu_{\mathrm{Sr}} = \theta_0 + \theta_1 \ \mathrm{ST}_{\mathrm{Sr}} + \alpha_{\mathrm{S}} + \beta_{\mathrm{S}}.\mathrm{ST}_{\mathrm{Sr}}$$

Modèle de régression avec variables indicatrice et **auxiliaire**

$$\mu_{\mathrm{Er}} = \theta_0^{'} + \theta_1^{'} \ \mathrm{ST}_{\mathrm{Er}}$$

$$\mu_{\mathrm{Sr}} = \theta_0^{'} + \theta_1^{'} \ \mathrm{ST}_{\mathrm{Sr}} + \theta_2 + \theta_3 \ \mathrm{ST}_{\mathrm{Sr}}$$

$\Leftrightarrow$ $\theta_0^{'} = \theta_0 + \alpha_{\mathrm{E}}$ ordonnée à l'origine pour l'Epicéa

$\theta_1^{'} = \theta_1 + \beta_{\mathrm{E}}$ pente de la droite pour l'Epicéa

$\theta_2 = \alpha_{\mathrm{S}} - \alpha_{\mathrm{E}}$ différence des ordonnées à l'origine

$\theta_3 = \beta_{\mathrm{S}} - \beta_{\mathrm{E}}$ différence des pentes

Commandes SAS

Modèle de covariance avec interaction facteur covariable

```
proc glm ;
class Espece ;
model Volume = ST Espece ST*Espece ;
run ;
```

Modèle de régression avec Variable indicatrice et auxiliaire

```
if Espece='Sapin' then dum=1 ;
if Espece='Epicea' then dum=0 ;
aux=ST*dum ;
proc reg ;
model Volume = ST dum aux ;
run ;
```

Sortie SAS

Modèle de covariance avec interaction facteur-covariable

General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
ESP	2	Epicea Sapin

Number of observations in data set = 20

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : VOLUME

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	93.9751998	31.3250666	177.43	0.0001
Error	16	2.8248002	0.1765500		
Corrected Total	19	96.8000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	VOLUME Mean
0.970818	8.575072	0.42018	4.90000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
ST	1	65.6270476	65.6270476	371.72	0.0001
ESPECE	1	9.6265324	9.6265324	54.53	0.0001
ST*ESPECE	1	18.7216198	18.7216198	106.04	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
ST	1	67.5715845	67.5715845	382.73	0.0001
ESPECE	1	4.6201972	4.6201972	26.17	0.0001
ST*ESPECE	1	18.7216198	18.7216198	106.04	0.0001

Sortie SAS

Modèle de régression avec variable indicatrice et auxiliaire

Analysis of Variance

Dependent Variable : VOLUME

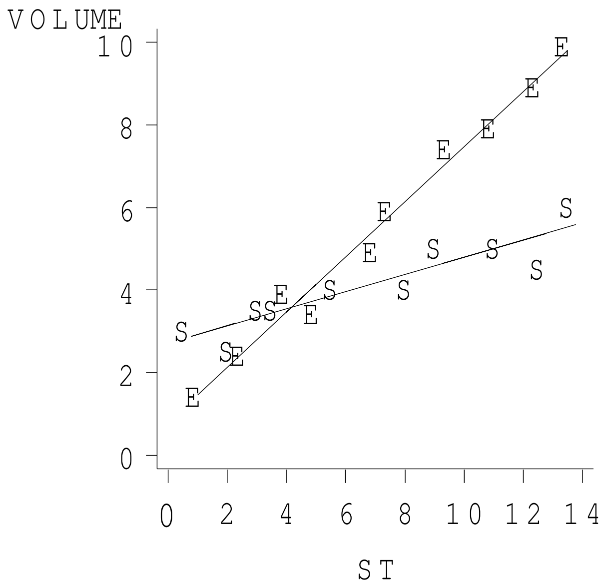
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	93.97520	31.32507	177.429	0.0001
Error	16	2.82480	0.17655		
Corrected Total	19	96.80000			

R-Square	C.V.	Root MSE	Dep Mean	Adj R-Sq
0.9708	8.57507	0.42018	4.90000	0.9653

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0 : Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	0.783469	0.27596985	2.839	0.0001
ST	1	0.668916	0.03290840	20.327	0.0001
DUM	1	1.894715	0.37037993	5.116	0.0001
AUX	1	-0.461351	0.04480165	-10.298	0.0001

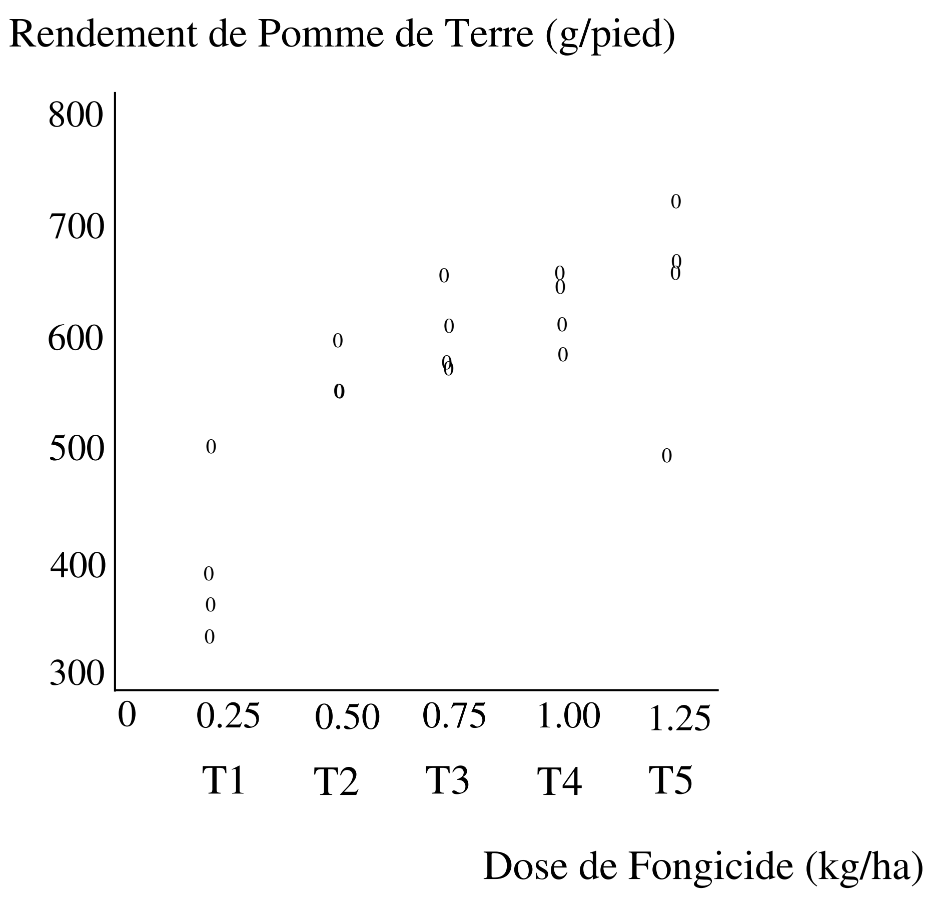
Visualisation graphique



Seconde généralisation : niveaux d'un facteur pouvant être quantifiés

Exemple : Étude du rendement de pomme de terre en fonction du traitement (dose) de fongique

Les données



Modèle 1 : analyse de variance à un facteur (TRAIT)

$$\mu_{ir} = \mu + \alpha_i$$

i = 1... 5 traitements (facteur TRAIT)
r = 1... 4 répétitions
α_i effet du niveau i du facteur

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TRAIT	4	133419.2	33354.8	8.81	0.0007
Erreur	15	56784.0	3785.6		
Totale	19	190203.2			

Méthode de Newman-Keuls

$$\alpha_g = 5\%, \quad \widehat{\sigma}^2 = 3785.6, \quad \nu = 15 \ (DF)$$

Nombre de moyennes	2	3	4	5
Etendue critique	92.7	113.0	125.4	134.3

Les moyennes portant la même lettre ne sont pas significativement différentes.

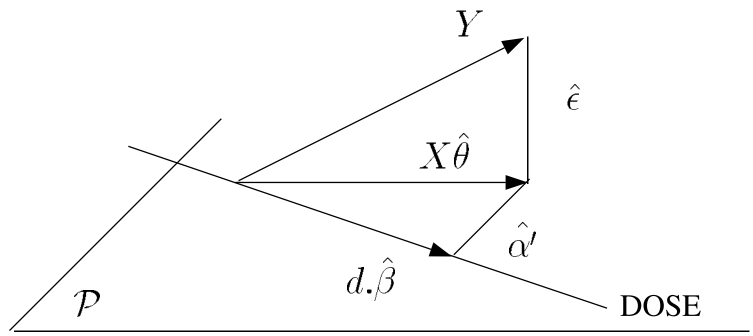
	Moyenne	TRAIT
A	629.0	T5
A	612.5	T4
A	600.5	T3
A	567.5	T2
B	404.5	T1

Modèle 2

$$Y_{ir} = \mu + \underbrace{\beta \times d_i + \alpha'_i}_{\alpha_i}$$

d_i	dose de fongicide correspondant au niveau i de TRAIT
α'_i	effet du facteur TRAIT, écart au modèle de régression linéaire

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
DOSE = Régression linéaire	1	97614.4	97614.4	27.79	0.0001
TRAIT = Ecart à la régression	3	35804.8	11934.9	3.15	0.056
Erreur	15	56784.0	3785.6		
Totale	19	190203.2			



$\mathcal{P}$ engendré par TRAIT

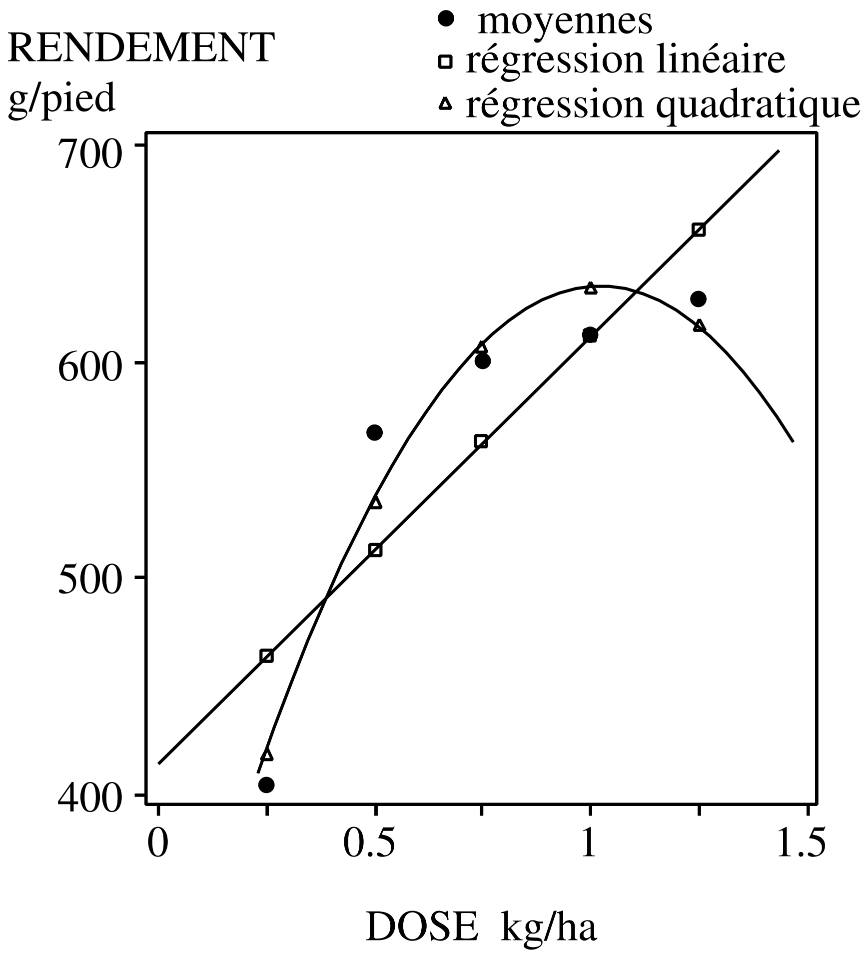
$$\begin{array}{rcccll} \mathrm{Y} & = & \mathrm{X}\widehat{\theta} & + & \widehat{\varepsilon} & \text{projection 1 sur } \mathcal{P} \\ \mathrm{X}\widehat{\theta} & = & d.\widehat{\beta} & + & \widehat{\alpha}' & \text{projection 2 sur DOSE} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \\ \alpha_5 \\ \alpha_5 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_5 \\ \mathrm{d}_5 \\ \mathrm{d}_5 \\ \mathrm{d}_5 \end{pmatrix} .\beta + \begin{pmatrix} \alpha_1^{'} \\ \alpha_1^{'} \\ \alpha_1^{'} \\ \alpha_1^{'} \\ \vdots \\ \alpha_5^{'} \\ \alpha_5^{'} \\ \alpha_5^{'} \\ \alpha_5^{'} \end{pmatrix}$$

Modèle 3

$$Y_{ir} = \mu + \underbrace{\beta \times d_i + \gamma \times d_i^2 + \alpha_i''}_{\alpha_i}$$

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
DOSE	1	97614.4	97614.4	27.79	0.0001
$DOSE^2$	1	28170.3	28170.3	7.44	0.0156
TRAIT = Ecart au modèle quadratique	2	7634.5	3817.3	1.01	0.3883
Erreur	15	56784.0	3785.6		
Totale	19	190203.2			


RENDEMENT
g/pied
moyennes
régression linéaire
régression quadratique
700
600
500
400
0
0.5
1
1.5
DOSE kg/ha

Analyse de covariance et généralisation
Conclusions

<u>L'analyse de covariance classique s'inscrit</u>

comme la régression et l'analyse de variance dans l'ensemble plus général des modèles linéaires.

<u>Replacée dans cet ensemble</u>

elle peut être généralisée à bien d'autres situations.