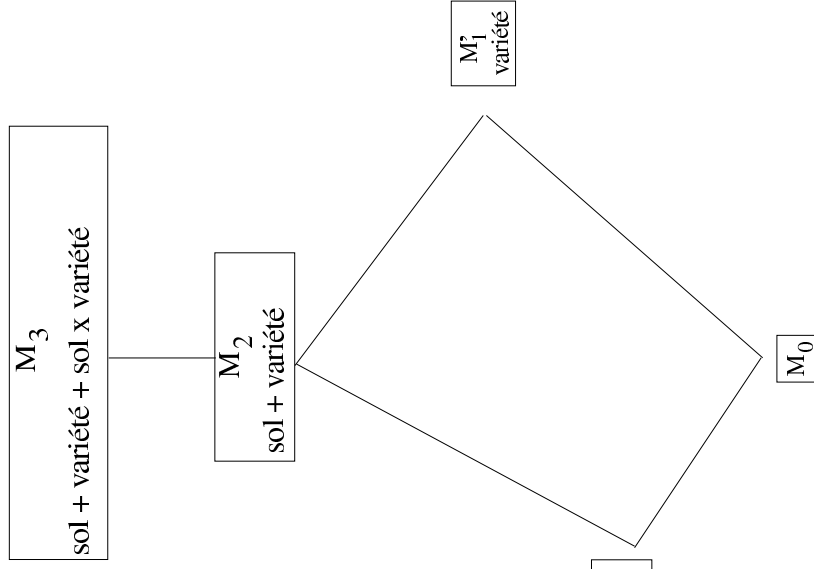


SCE type I :



$$SCE_{M_0} - SCE_{M_1_{sol}} \neq SCE_{M_1_{sol}} - SCE_{M_2_{sol+variété}}$$

$$SCE_{M_0} - SCE_{M_1_{sol}} \neq SCE_{M_1_{variété}} - SCE_{M_2_{sol+variété}}$$

En superposant les figures 39 et 40, on résume les deux modèles à un quadrilatère quelconque.

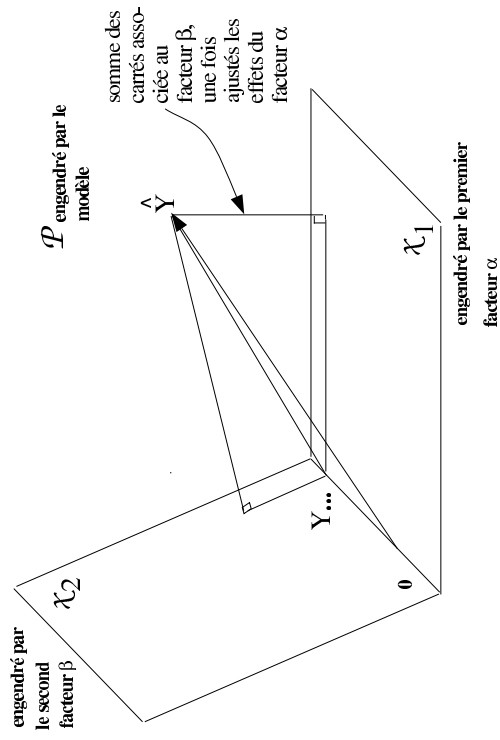
Il y a deux décompositions possibles par les sommes de type I, qui ne sont pas équivalentes.

Cependant chaque modèle vérifie, pour les SCE type I, l'égalité :

$$SCE_{totale} = SCE_{sol} + SCE_{variété} + SCE_{sol \times variété} + SCE_{résiduelle}$$

Illustration géométrique

Ce transparent est facultatif



Hypothèses testées : sommes de type I

germination = sol variété sol * variété

sol

$$F = \frac{(SCE_{M_0} - SCE_{M_1}) / I - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

variété

$$F = \frac{(SCE_{M_1} - SCE_{M_2}) / J - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

sol * variété

$$F = \frac{(SCE_{M_2} - SCE_{M_3}) / IJ - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

germination = variété sol sol * variété

variété

$$F = \frac{(SCE_{M_0} - SCE_{M_1}') / J - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

sol

$$F = \frac{(SCE_{M_1}' - SCE_{M_2}') / I - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

sol * variété

$$F = \frac{(SCE_{M_2}' - SCE_{M_3}') / IJ - 1}{SCE_{M_3} / N - IJ}$$

$$H_0 \left\{ \begin{array}{l} \forall i \sum_j \frac{n_{ij}\beta_j}{n_{i+}} + \frac{\sum_j n_{ij}\gamma_{ij}}{n_{i+}} = 0 \\ \alpha_i + \frac{\sum_j n_{ij}\beta_j}{n_{i+}} + \frac{\sum_j n_{ij}\gamma_{ij}}{n_{i+}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \beta_j + f(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0 \\ \beta_j + f(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \gamma_{ij} = 0 \\ \gamma_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \beta_j + \frac{\sum_i n_{ij}\alpha_i}{n_{+j}} + \frac{\sum_i n_{ij}\gamma_{ij}}{n_{+j}} = 0 \\ \beta_j + \frac{\sum_i n_{ij}\alpha_i}{n_{+j}} + \frac{\sum_i n_{ij}\gamma_{ij}}{n_{+j}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \alpha_i + g(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0 \\ \alpha_i + g(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \gamma_{ij} = 0 \\ \gamma_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

Par ce transparent, on montre pourquoi les sommes de type I, pour un facteur, sont différentes selon le modèle considéré (selon l'ordre d'introduction des facteurs) : en effet les hypothèses testées ne sont pas les mêmes.

— Lorsque l'on utilise des sommes de type I, le test du premier facteur déclaré dans le modèle porte sur ce facteur plus une fraction de l'autre facteur, plus une fraction de l'interaction. Les deux facteurs sont testés différemment. Une autre caractéristique de ces sommes de type I est que les hypothèses sur les facteurs font intervenir les effectifs des combinaisons (n_{ij}) , $n_{i+} = \sum_j n_{ij}$ et $n_{+j} = \sum_i n_{ij}$.

— les fonctions $f(n_{ij}, \gamma_{ij})$ et $g(n_{ij}, \gamma_{ij})$ sont très compliquées; elles dépendent des effectifs des combinaisons ij.

Si un stagiaire s'intéresse aux SCE type II : ce sont les SCE type I, lorsque l'effet est le dernier introduit dans le modèle (dernier par rapport aux effets qui sont de même ordre que lui).

sol : $\alpha_i + g(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0$

variété : $\beta_j + f(n_{ij}, \gamma_{ij}) = 0$

sol * variété : $\gamma_{ij} = 0$

— excepté pour l'interaction, les tests portent sur un effet principal (les tests de F ne sont pas intrinsèques)

(sans doute facultatif)

	Variété 1	Variété 2	Variété 3
Sol 1	$n_{11} = 3$	$n_{12} = 2$	$n_{13} = 2$
Sol 2	$n_{21} = 4$	$n_{22} = 1$	$n_{23} = 3$

pour H_0

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3\beta_1+2\beta_2+2\beta_3}{7} + \frac{3\gamma_{11}+2\gamma_{12}+2\gamma_{13}}{7} \\ \alpha_2 + \frac{4\beta_1+\beta_2+3\beta_3}{8} + \frac{4\gamma_{21}+2\gamma_{22}+2\gamma_{23}}{8} \end{cases}$$

On voit que non seulement les facteurs sont testés avec des hypothèses différentes, mais aussi les modalités d'un même facteur.

Hypothèses testées : sommes de type III

H_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \\ \alpha_i + \frac{\sum_j \gamma_{ij}}{j} = 0 \end{array} \right.$$

sol

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \\ \beta_j + \frac{\sum_i \gamma_{ij}}{I} = 0 \end{array} \right.$$

variété

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \\ \gamma_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

interaction

On teste un effet principal et non un effet additif (tests de F non intrinsèques sauf pour l'interaction)

L'hypothèse ne dépend pas de l'effectif observé pour chaque combinaison ij

On ne peut facilement écrire le F sous forme des sommes de carrés.

C'est pour cela qu'une représentation graphique des sommes de type III n'est pas possible.

Attention pour les sommes de carrés de type III

$$SCE_{totale} \neq SCE_{sol} + SCE_{variété} + SCE_{sol \times variété} + SCE_{résiduelle}$$

(important pour ceux qui souhaitent s'intéresser à la décomposition de la vari-
ation totale)

Si un dispositif contient des cases vides

- Si leur nombre n'est pas trop élevé, il est préférable d'utiliser des sommes des carrés de type III plutôt que des sommes de type IV, qui sont sensibles à l'ordre d'introduction des niveaux des facteurs (⇒ dangereux, plusieurs estimations possibles)
- Sinon (beaucoup de cases vides) voir un biométricien.
- On peut ne pas pouvoir calculer les degrés de liberté de l'interaction du fait de la répartition des cases vides ⇒ problème !

ex :

	Var 1	Var 2	Var 3
Sol 1	x x x		
Sol 2	x x x	x	x x x

modèle $IJ - 1 \quad SCE_{M_0} - SCE_{M_3}$
3

IJ : nombre de combinaisons présentes, $IJ = 4$ dans le dispositif

sol $I - 1$
1

variété $J - 1$
2

interaction $IJ - (I + J - 1)$
 \downarrow
 $M_3 \quad M_2$
 $= 4 - (2 + 3 - 1)$
 $= 0$

Attention : le nombre de degrés de liberté de l'interaction n'est pas toujours $(I-1)(J-1)$

Toujours utiliser les sommes du type III

On ne teste jamais un effet additif seul

On teste un effet principal

**Seule l'interaction est testée
indépendamment des autres effets**

Comment étudier les effets des facteurs et non les effets principaux ?

1) Ne pas déclarer l'interaction et tester le modèle additif

2) Tester chaque effet seul

Commandes SAS

Exemple des tournesols

```
data try ;
infile 'tourn' ;
input test orig huile ;
run ;
proc glm ;
class test orig ;
model huile = orig test / ss3 ;
run ;
```

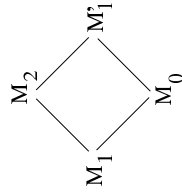
① structuration en
A et B

```
proc glm ;
class orig ;
model huile = orig / ss3 ;
proc glm ;
class test ;
model huile= test / ss3 ;
```

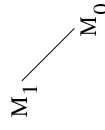
② structuration en A

③ structuration en B

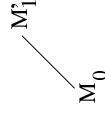
①



②



③



modèle : $M_2 - M_0$
effet A : $M_2 - M_1$
effet B : $M_2 - M_1$

modèle = effet A
 $M_1 - M_0$

modèle = effet B
 $M_1 - M_0$

3 tests de F
intrinsèques

1 test de F
intrinsèque

1 test de F
intrinsèque

On reprend l'exemple des tournesols testeur → test, origine → orig

L'option /ss3 dans la commande model signale que l'on ne s'intéresse qu'aux sommes de carrés de type III.

Sortie SAS

Exemple des tourmesols

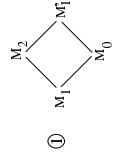
```

General Linear Models Procedure
Class Level Information
Class      Levels      Values
TEST      2             1 2
ORIG      3             1 2 3
Number of observations in data set = 12

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Pr > F
Model      3      43.23232500      14.41107500      8.79      0.0065
Error      8      13.11486667      1.63935833
Corrected Total      11      56.34809167

R-Square      0.767253      C.V.      2.766831      Root MSE      1.280374      DONNÉE: Mean      46.27583

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Type III SS      Mean Square      F Value      Pr > F
ORIG      2      33.74581667      16.87290833      10.29      0.0061
TEST      1      9.48740833      9.48740833      5.79      0.0428
Corrected Total      11      56.34809167
    
```



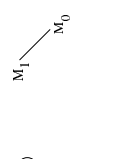
```

Class Level Information
Class      Levels      Values
ORIG      3             1 2 3
Number of observations in data set = 12

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Pr > F
Model      2      33.74581667      16.87290833      6.72      0.0164
Error      9      22.60227500      2.51136389
Corrected Total      11      56.34809167

R-Square      0.598881      C.V.      3.424527      Root MSE      1.584728      DONNÉE: Mean      46.27583

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Type III SS      Mean Square      F Value      Pr > F
ORIG      2      33.74581667      16.87290833      6.72      0.0164
    
```



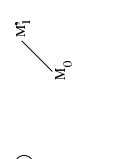
```

Class Level Information
Class      Levels      Values
TEST      2             1 2
Number of observations in data set = 12

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Pr > F
Model      1      9.48740833      9.48740833      2.02      0.1852
Error      10      46.86068333      4.68606833
Corrected Total      11      56.34809167

R-Square      0.168371      C.V.      4.677891      Root MSE      2.164733      DONNÉE: Mean      46.27583

Dependent Variable : HUILE
Source      DF      Type III SS      Mean Square      F Value      Pr > F
TEST      1      9.48740833      9.48740833      2.02      0.1852
    
```



On reprend l'exemple des tourmesols testeur → test, origine → orig

Les tests significatifs sont en grisés

Exercice : Faire comparer ces sorties à celle du transparent IV-28.

L'interaction ayant été jugée non significative, l'étude du modèle sans interaction confirme que l'effet principal de chacun des facteurs est dû aux facteurs eux-mêmes.

Par contre, les deux modèles avec un seul facteur, (en particulier celui ne contenant que le facteur testeur), sont des modèles qui ont perdu beaucoup de pouvoir explicatif (de puissance).

Sortie SAS

Exemple des carottes

```

General Linear Models Procedure
Class Level Information
Class      Levels      Values
SOL        2          1 2
VAR        3          1 2 3
Number of observations in data set = 15

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Squares      Square      F Value      Pr > F
Model       3      1772.340426      590780142      1.90      0.1888
Error      11      342.7659574      31.1605416
Corrected Total      14      520.0000000

R-Square      C.V.      Root MSE      DONNEE Mean
0.340835      37.21442      5.582163      15.00000

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Type III SS      Square      F Value      Pr > F
SOL         1      83.9007092      83.9007092      2.69      0.1291
VAR         2      124.7340426      62.3670213      2.00      0.1814
Corrected Total      14      520.0000000

Class Level Information
Class      Levels      Values
SOL        2          1 2
Number of observations in data set = 15

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Squares      Square      F Value      Pr > F
Model       1      52.50000000      52.50000000      1.46      0.2485
Error      13      467.50000000      39.96153846
Corrected Total      14      520.00000000

R-Square      C.V.      Root MSE      DONNEE Mean
0.100962      39.97863      5.996794      15.00000

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Type III SS      Square      F Value      Pr > F
SOL         1      52.50000000      52.50000000      1.46      0.2485

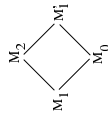
Class Level Information
Class      Levels      Values
VAR        3          1 2 3
Number of observations in data set = 15

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Squares      Square      F Value      Pr > F
Model       2      93.33333333      46.66666667      1.31      0.3051
Error      12      426.66666667      35.55555556
Corrected Total      14      520.00000000

R-Square      C.V.      Root MSE      DONNEE Mean
0.179487      39.75232      5.962848      15.00000

Dependent Variable : GERMINA
Sum of      Mean
Source      Type III SS      Square      F Value      Pr > F
SOL         2      93.33333333      46.66666667      1.31      0.3051
VAR         1      46.66666667      46.66666667      1.31      0.3051
Corrected Total      14      520.00000000

```



La même démarche est appliquée à l'exemple des carottes variétés → var

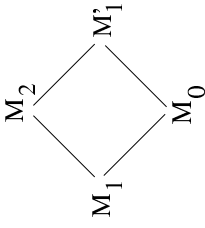
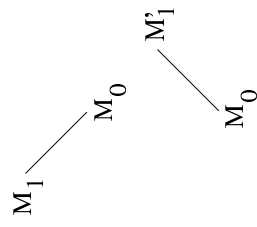
Les tests significatifs sont en grisés

Exercice : Faire comparer ces sorties à celles des transparents IV-35, IV-38.

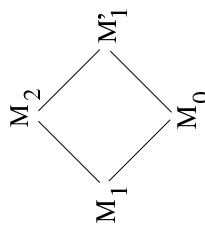
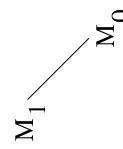
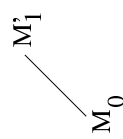
L'interaction ayant été jugée significative, l'étude du modèle sans interaction montre que l'effet principal des deux facteurs (qui était jugé significatif) est probablement dû à l'interaction et non aux facteurs eux-mêmes.

Le choix du modèle influence considérablement la valeur du test F et sa probabilité

Exemple des tournesols

- ① modèle significatif
 effet A significatif (origine)
 effet B significatif (testeur)

- ② modèle significatif
 ↓
 effet A significatif (origine)
 ③ modèle non significatif
 ↓
 effet B non significatif (testeur)


Exemple des carottes

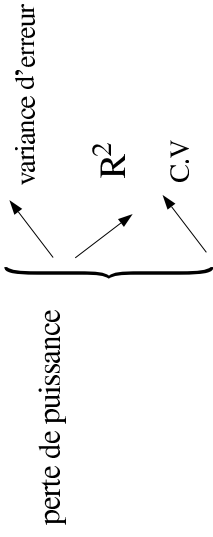
- ① modèle non significatif

- ② modèle non significatif
 ↓
 effet A non significatif (sol)

- ③ modèle non significatif
 ↓
 effet B non significatif (variété)


Réduire la complexité du modèle pour tester les facteurs



tests de F intrinsèques des facteurs

mais



Puissance d'un test = $\text{Prob}(H_1/H_1)$ = probabilité d'accepter (H_1) alors qu'elle est vraie

$$\text{Prob}(H_1/H_1) = 1 - \beta = 1 - \text{Prob}(H_0/H_1)$$

β = $\text{Prob}(H_0/H_1)$ = probabilité de retenir (H_0) alors qu'elle est fautive

perte de puissance $\Leftrightarrow \beta$ augmente

La perte de puissance est due à une variance d'erreur plus élevée (les facteurs non déclarés dans le modèle se retrouvent dans l'erreur) qui se traduit par un coefficient de détermination plus faible et un coefficient de variation plus élevé.

Analyse de Variance à deux facteurs croisés
Synthèse

A B A x B
 (I) (J) (IJ)

Test du modèle

N.S. : on s'arrête
 S. : il existe une structuration
 en AB (A ?, B ?, A x B ?)

Test de l'interaction

N.S.

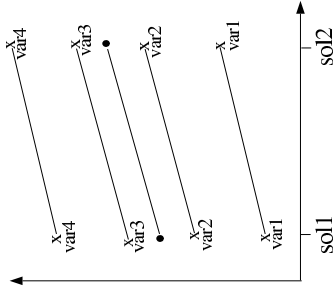
le test de A
 le test de B
 sont sans ambiguïté

S.

le test de A
 le test de B
 sont ambigus

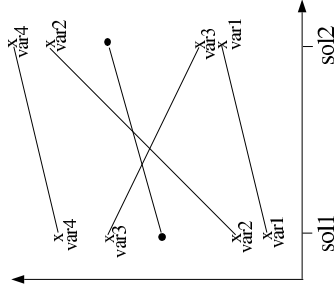
si A S. : comparaison multiple des μ_i comparaison multiple des μ_{ij}
 si B S. : comparaison multiple des μ_j

On s'intéresse à un des facteurs croisés



F de l'interaction Non Significatif

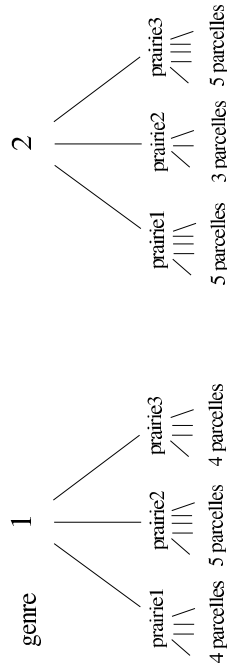
la comparaison sol1/sol2 est correcte



F de l'interaction Significatif

comparaison sol1/sol2 fautive ; la réponse dépend de la variété

Analyse de Variance à deux facteurs facteurs hiérarchisés



Les données

Genre	Prairie	Rendement
1	1	29.9
1	1	19.8
1	1	29.5
1	1	27.0
1	1	15.9
1	2	26.3
1	2	19.8
1	2	22.5
1	2	20.9
1	3	19.2
1	3	21.4
1	3	13.3
1	3	18.3
2	1	29.1
2	1	32.7
2	1	34.5
2	1	39.2
2	1	43.4
2	2	26.9
2	2	32.5
2	2	31.1
2	3	24.3
2	3	21.7
2	3	23.7
2	3	28.9
2	3	22.4

On étudie le rendement (en kg/are) de 2 genres de prairie (un genre de prairie = une graminée, le deuxième genre = mélange graminée + une légumineuse).

Pour cela, on observe 3 prairies différentes pour chaque genre ; dans chacune le rendement est évalué à l'aide de plusieurs parcelles. (données Dagnélie tome II, explication de la manip sous toutes réserves !)

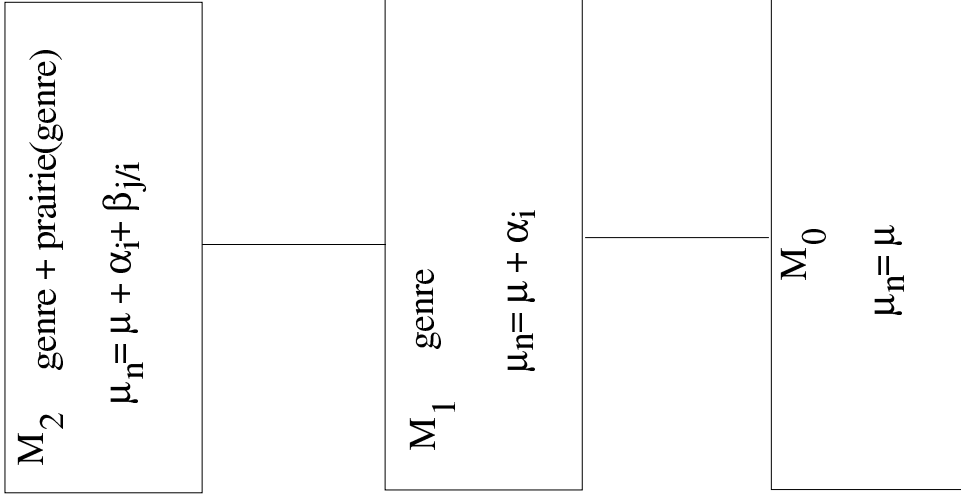
On cherche à savoir si les genres de prairie ont un rendement différent. Mais avant de conclure, il faut s'intéresser à la variabilité possible entre les prairies à l'intérieur d'un genre de prairies.

Si des différences existent, c'est qu'il y a une structuration dans les données, on teste des modèles.

Remarque : les trois prairies observées pour le genre 2 sont différentes des prairies du genre 1. Pour lever toute ambiguïté avec le modèle croisé on aurait pu les numéroter 4, 5, 6.

Cependant la même numérotation a été conservée afin de montrer que la déclaration d'un facteur hiérarchisé lève toute ambiguïté et qu'aucun problème ne découle de la numérotation.

3 modèles sont envisageables. Ils sont tous emboîtés.



Commandes et sortie SAS

Souligner comment s'écrit l'effet hiérarchisé dans le modèle prairie (genre) = prairie dans genre.

```
data tv ;
infile 'prairie*';
input genre prairie rdt ;
run ;
proc glm ;
class genre prairie ;
model rdt = genre prairie (genre) ;
run ;
```

General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
GENRE	2	1 2
PRAIRIE	3	1 2 3

Number of observations in data set = 26

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : RDT

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	921.4527179	184.2905436	11.07	0.0001
Error	20	332.9626667	16.6481333		
Corrected Total	25	1254.4153846			
R-Square	0.734567	15.73502	Root MSE	RDT Mean	
			4.080212	25.93077	

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : RDT

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
GENRE	1	437.0600000	437.0600000	26.25	0.0001
PRAIRIE (GENRE)	4	484.3927179	121.0981795	7.27	0.0009
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
GENRE	1	417.6403101	417.6403101	25.09	0.0001
PRAIRIE (GENRE)	4	484.3927179	121.0981795	7.27	0.0009

Tableau ‘Modèle’

General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
GENRE	2	1 2
PRAIRIE	3	1 2 3

Number of observations in data set = 26

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : RDT

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	921.4527179	184.2905436	11.07	0.0001
Error	20	332.9626667	16.6481333		
Corrected Total	25	1254.4153846			

Source	R-Square	C.V.	RootMSE	RDT Mean
Model	0.734567	15.73502	4.080212	25.93077
Error				
Corrected Total				

Source	Model	Error	Corrected Total
Sum of Squares	$SCE_{M_0} - SCE_{M_2}$	SCE_{M_2}	$(SCE_{M_0} - SCE_{M_2}) / II-1$
DF	II-1	N-II	$\frac{SCE_{M_2} / N-II}{SCE_{M_2} / N-II}$
Mean Square			
F Value			
Pr > F			

Le nombre de degrés de liberté pour le modèle correspond au nombre de combinaisons des 2 facteurs observées moins 1.

De manière plus générale si :

J_i est le nombre de niveaux du facteur hiérarchisé pour le niveau i du facteur hiérarchisant (nombre de prairies pour le genre 1), on obtient pour les degrés de liberté de l'erreur $\sum_1 J_i - 1$

modèle hiérarchisé : SCE type I

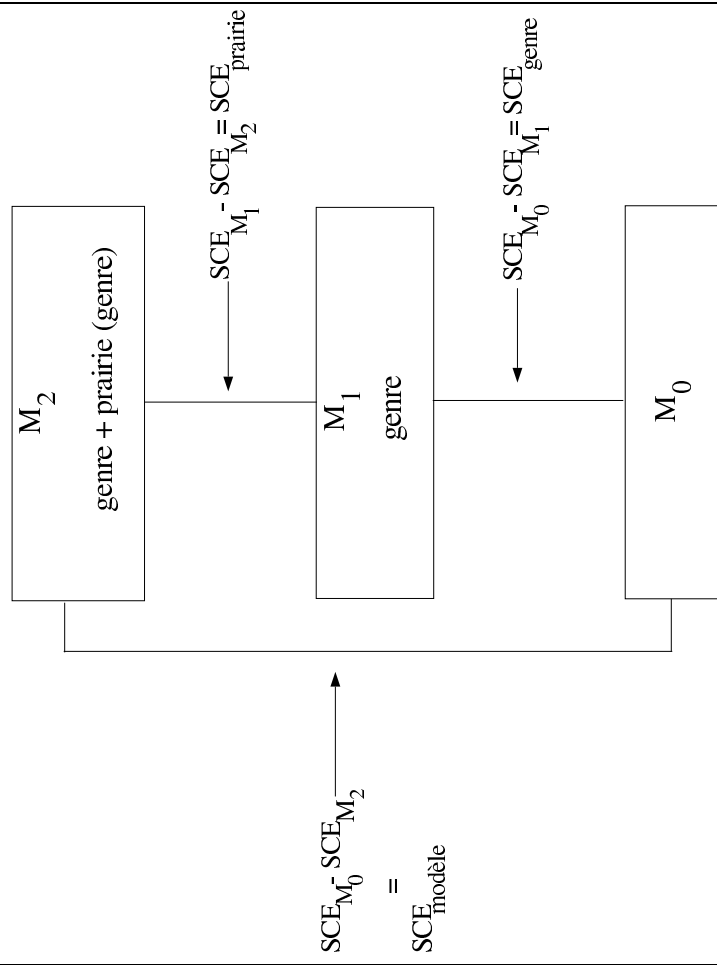


Tableau ‘Facteurs’

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : RDT

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
GENRE	1	437.0600000	437.0600000	26.25	0.0001
PRAIRIE (GENRE)	4	484.3927179	121.0981795	7.27	0.0009
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
GENRE	1	417.6403101	417.6403101	25.09	0.0001
PRAIRIE (GENRE)	4	484.3927179	121.0981795	7.27	0.0009

SCE type I

GENRE	I-1	$\frac{SCE_{M_0} - SCE_{M_1}}{SCE_{M_2} / N-IJ}$	$\frac{(SCE_{M_0} - SCE_{M_1}) / I-1}{SCE_{M_2} / N-IJ}$
PRAIRIE (GENRE)	I(J-1)	$SCE_{M_1} - SCE_{M_2}$	$\frac{(SCE_{M_1} - SCE_{M_2}) / I(J-1)}{SCE_{M_2} / N-IJ}$

Le test de l'effet genre, l'effet auquel on s'intéresse, n'est pas intrinsèque.

— Pour cet effet les sommes des carrés de type I et III diffèrent.

— Par contre, pour l'effet prairie (genre) il n'y a pas de différence.

Comme pour le cas non orthogonal, deux facteurs croisés, l'effet de dernier ordre (interaction / facteur hiérarchisé) ne présente pas de différences pour les sommes de type I et III.

L'effet prairie est significatif : il y a une variabilité intra-genre de prairies, qui influence l'information obtenue sur les genres.

On peut préciser que (somme de type I)

— $SCE_{M_0} - SCE_{M_1}$ correspond à la somme de carrés des écarts inter-genres $\sum_{j,r} \sum_i (Y_{i..} - Y_{i..})^2$

— $SCE_{M_1} - SCE_{M_2}$ correspond à la somme de carrés des écarts intra-genre (c'est à dire inter-prairies pour chaque genre) $\sum_i \sum_{j,r} (Y_{ij.} - Y_{i..})^2$

— SCE_{M_2} somme des carrés d'écarts résiduelle est la somme des carrés des écarts intra-prairie (inter-parcelles dans chaque prairie) $\sum_{i,j} \sum_r (Y_{ijr} - Y_{ij.})^2$

De manière plus générale, les degrés de liberté de l'effet hiérarchisé (prairie(genre)) est $\sum_i J_i - I$, où J_i est le nombre de niveaux du facteur hiérarchisé pour le niveau i du facteur hiérarchisant.

Hypotheses testées : SCE type I

$$H_0 \left\{ \begin{array}{l} \forall (i,j) \\ \beta_{j/i} = 0 \end{array} \right.$$

prairie (genre)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \\ \alpha_i + \frac{\sum_j n_{ij} \beta_{j/i}}{n_{i+}} = 0 \end{array} \right.$$

genre

L'écriture de l'hypothèse testée montre bien que le test de l'effet "genre" n'est pas intrinsèque, puisque il contient une partie de l'effet prairie.

Si cet effet est significatif, il peut influencer le test sur l'effet genre.

L'hypothèse correspondant aux sommes de type I dépend de l'effectif de prairies observées pour chaque genre de prairie (n_{ij}) et de $n_{i+} = \sum_j n_{ij}$.

Hypothèses testées : SCE type III

$$\begin{array}{l} H_0 \\ \text{prairie (genre)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall (i,j) \\ \beta_{j/i} = 0 \end{array} \right. \\ \\ \text{genre} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall i \\ \alpha_i + \frac{\sum_j \beta_{j/i}}{j} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Les hypothèses sont indépendantes des effectifs
 \Rightarrow utiliser les sommes de type III

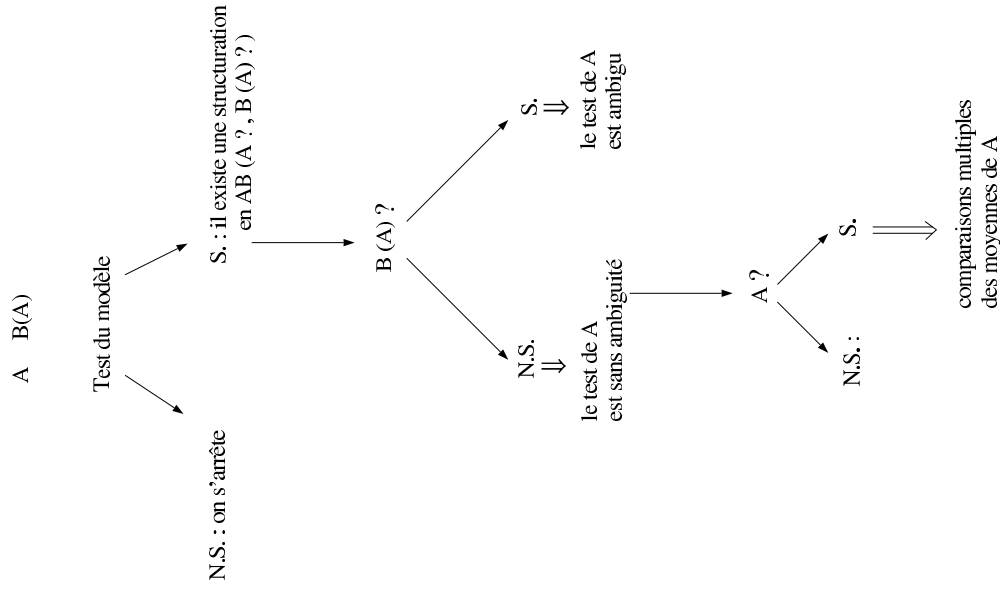
On utilise les sommes de carrés de type III, car l'hypothèse testée pour le facteur "genre de prairie" ne dépend pas de l'effectif de prairies observées.

Remarque : l'hypothèse correspondant aux sommes de type III pour le facteur "genre de prairie" montre bien que ce test n'est pas intrinsèque et qu'on teste un effet principal.

De manière plus générale, l'hypothèse H_0 pour l'effet hiérarchisant (genre)

$$\text{est : } \forall i, \alpha_i + \frac{\sum_j \beta_{j/i}}{j} = 0$$

Analyse de Variance à deux facteurs hiérarchisés
Synthèse



Si le test du modèle est non significatif, c'est peut-être que le dispositif expérimental n'était pas adapté pour révéler des différences.

Il faut renouveler l'expérience en modifiant le dispositif (augmenter le nombre de répétitions par exemple).

S'il existe une structuration en B dans A ; il faut renouveler l'expérience en augmentant le nombre de prairies, pour mieux prendre en compte (mieux contrôler) la variation intra-classe (variation en B (A)).

F prairie (genre) Non Significatif

x	x
$\hat{\mu}_i$	$\hat{\mu}_i$
x	x
x	x

La comparaison des genres est correcte

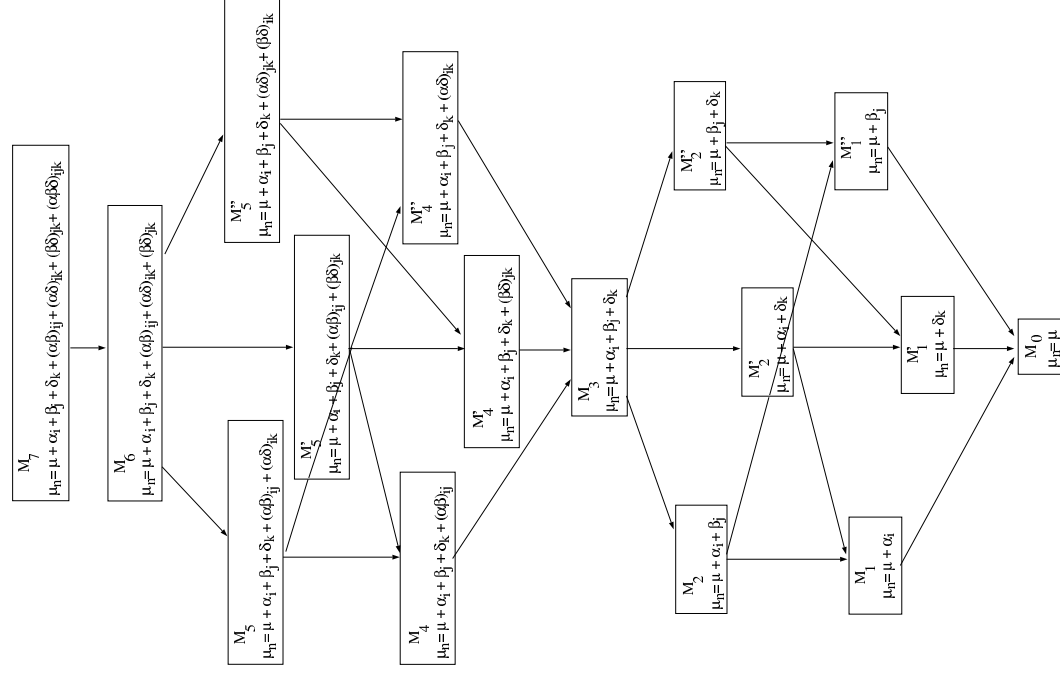
F prairie (genre) Significatif

x	x
x	x
$\hat{\mu}_i$	$\hat{\mu}_i$
x	x
$\hat{\mu}_i$	$\hat{\mu}_i$
x	x
x	x

La comparaison des genres est fautive; la moyenne de chaque genre est fortement influencée par les prairies

Des exemples d'analyses plus complexes

Trois facteurs croisés A(α_i) B(β_j) C(δ_k)



Plus on augmente la complexité du dispositif, plus les tests sur les effets principaux sont ambigus.

Seule l'interaction de dernier ordre est testée par un test F intrinsèque.

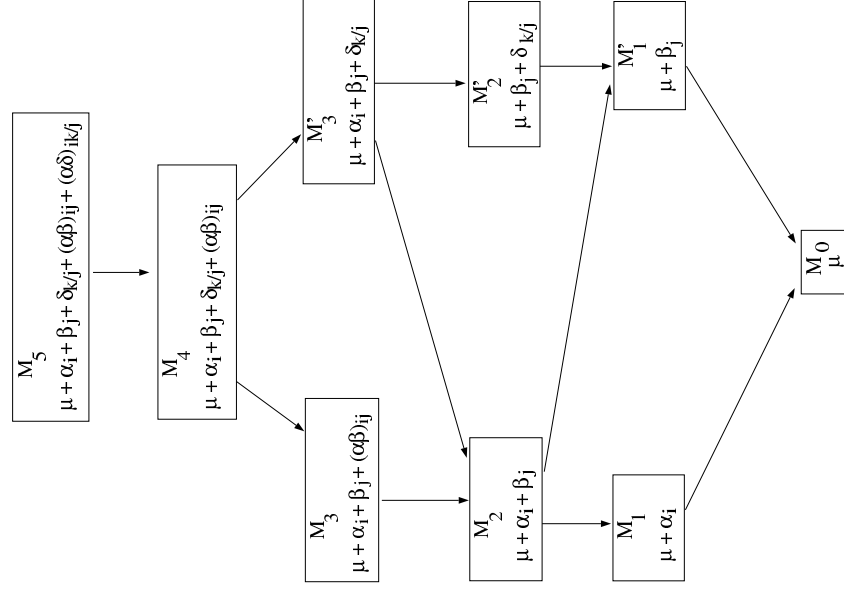
En accroissant le nombre de facteurs croisés, on multiplie les interactions de différents ordres qui gênent l'interprétation des effets principaux.

Dans la mesure du possible, il faut limiter la complexité du modèle.

Attention : s'il n'y a pas de répétition, l'effet $(\alpha_i\beta_j\delta_k)_{ijk}$ n'est pas estimable. Le graphe démarre par le modèle M₆

Dispositif blocs complets dans plusieurs lieux pour plusieurs traitements

Traitement → $A(\alpha_i)$
 Lieux → $B(\beta_j)$
 Bloc → $C(\delta_{k/lj})$



Attention : S'il n'y a pas de répétition, l'effet $(\alpha\delta)_{ik/lj}$ n'est pas estimable. Le graphique démarre par le modèle M_4

Comparaisons multiples de moyennes

— Analyse de variance :

test F global significatif

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$ rejetée

\Leftrightarrow Il existe i et j tels que $\mu_i \neq \mu_j$

— Erreurs indépendantes, identiquement distribuées $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Suite à une analyse de variance ayant déclaré le test global F significatif, l'hypothèse nulle est rejetée.

Autrement dit, il existe des différences significatives entre les moyennes μ_i correspondantes aux niveaux du facteur. Plus généralement, les moyennes correspondantes aux niveaux d'un ensemble de facteurs ont été testées significativement différentes.

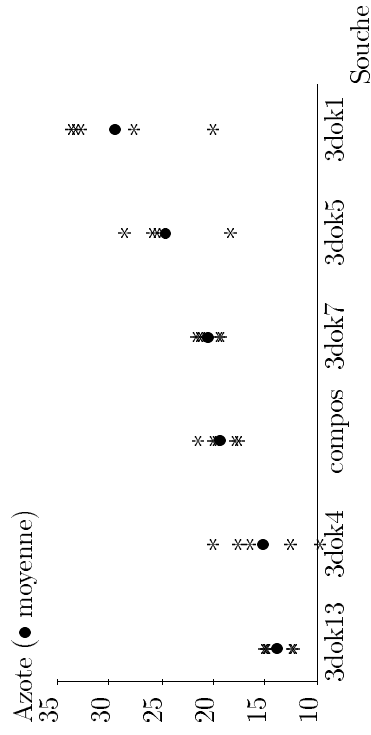
Attention :

On a vérifié (graphiquement) les postulats du modèle.

Pour aller plus loin, que faire ?

Exemple : Influence de 6 souches de rhizobium sur la quantité d'azote de plantes de trèfle rouge

Souche	Azote						Moyenne
3dok1	19.4	32.6	27.0	32.1	33.0	33.0	28.82
3dok5	17.7	24.8	27.9	25.2	24.3	24.3	23.98
3dok4	17.0	19.4	9.1	11.9	15.8	15.8	14.64
3dok7	20.7	21.0	20.05	18.8	18.6	18.6	19.92
3dok13	14.3	14.4	11.8	11.6	14.2	14.2	13.26
compos	17.3	19.4	19.1	16.9	20.8	20.8	18.70



Reprenons le problème sur un exemple.

— Facteur étudié : souche de rhizobium

— Variable mesurée : quantité d'azote de la plante.

— Les données sont constituées de 5 plantes pour 1 souche (5 répétitions par niveau du facteur).

— La colonne Moyenne contient la moyenne des 5 répétitions.

Le graphique représente les données individuelles Azote en fonction de la Souche (*) et les moyennes par souche (●).

Sortie SAS

General Linear Models Procedure

Dependent Variable : AZOTE

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	847.05	169.41	14.37	0.0001
Error	24	282.93	11.79		
Corrected Total	29	1129.97			

$$\hat{\sigma}^2 = 11.79$$

Questions :

- Faut-il former des groupes de souches de moyennes homogènes ?
- Si “compos” est le témoin, quelles moyennes diffèrent de la moyenne du témoin ?

On effectue une analyse de variance.

— Le test F est significatif.

— Questions qui restent posées.

Pour comparer 2 moyennes, méthode classique du t de Student

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ rejetée si } |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \geq t(\alpha, \nu) \times s_d$$

α : risque de 1ère espèce

ν : degrés de liberté des résidus

t : quantile de la loi de Student au seuil α avec ν degrés de liberté

s_d : écart-type de la différence de 2 moyennes $\mu_i - \mu_j$

— en cas d'effectifs égaux $s_d = \hat{\sigma} \sqrt{2/n}$

— en cas d'effectifs inégaux $s_d = \hat{\sigma} \sqrt{1/n_i + 1/n_j}$

Rappel

sous $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$

$$1 - \alpha = \text{Prob}(|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| < t(\alpha, \nu) \times s_d)$$

niveau de confiance du test (95 % par exemple).

$$\alpha = \text{Prob}(|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \geq t(\alpha, \nu) \times s_d)$$

risque de première espèce : probabilité de conclure que la différence est significative alors qu'elle ne l'est pas (5 % par exemple).

n_j est le nombre de statistiques indépendantes entrant dans le calcul de $\hat{\mu}_i$

Application à l'exemple Azote / Rhizobium

Cas équiréparté $n = 5$

Ecart-type de la différence $\mu_i - \mu_j$

$$s_d = \sqrt{2\hat{\sigma}^2/n} = \sqrt{2 \times 11.79/5} = 2.17$$

Degrés de liberté des résidus $\nu = 24$

Valeur de t au seuil $\alpha = 5\%$ avec $\nu = 24$ d.d.l.

$$t(0.05, 24) = 2.064$$

La différence entre 2 moyennes particulières est significative au seuil 5% lorsqu'elle dépasse

$$t(0.05, 24) \times s_d = 2.064 \times 2.17 = 4.48$$

Cette quantité qui sert de critère est la **Plus Petite Différence Significative (P.P.D.S.)**

A faire plutôt au tableau en laissant le transparent précédent.

— Aller chercher $\hat{\sigma}^2 = 11.79$ dans la table d'ANOVA.

— Distribuer aux stagiaires une table de t .

P.P.D.S. et Risque global

I niveaux du facteur

⇒ I moyennes à comparer soit

$C_I^2 = \frac{I(I-1)}{2}$ comparaisons de 2 moyennes

α risque de 1ère espèce d'une comparaison

α_g risque de 1ère espèce global

(= probabilité de trouver au moins une différence significative alors qu'il n'y en a pas)

Avec la méthode de la P.P.D.S. :

I	C_I^2	α	α_g
2	1	0.05	0.05
5	10	0.05	0.29
10	45	0.05	0.63
15	105	0.05	0.83

α_g est supérieur à α

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ nombre de combinaisons de k moyennes prises parmi n .

Risque de 1ère espèce α :
probabilité de conclure la différence significative alors qu'elle ne l'est pas.

Risque global α_g :

probabilité de trouver au moins une différence significative qui ne l'est pas (les valeurs telles que 0,29 sont obtenues par simulation).

Avec 5 moyennes observées (sur des variables aléatoires indépendantes de même espérance), on a 29 chances sur 100 d'obtenir au moins une différence significative (sous H_0 , alors qu'il n'y en a pas).

Autres méthodes

En contrôlant le risque global α_g ,

si $|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \geq$ valeur critique
les moyennes sont déclarées
différentes.

Les **valeurs critiques** varient selon les méthodes.

t-corrige de Bonferroni

on choisit α_g , par exemple 5%

pour 1 comparaison $\alpha = \alpha_g / \frac{I(I-1)}{2}$

$H_0 : \mu_i = \mu_j$ rejetée si

$$|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \geq t\left(\frac{\alpha_g}{I(I-1)}, \nu\right) \times s_d$$

Intuitivement, méthode la plus simple.

Risque de 1ère espèce de chaque comparaison divisé par le nombre de comparaisons ou plus généralement par le nombre d'hypothèses testées.

Si α devient très petit, c'est-à-dire si le nombre de comparaisons est très grand, le test devient très peu puissant (il aura tendance à mettre en évidence peu de différences réelles).

Ce test est conservatif : le risque de 1ère espèce global réel est inférieur au risque choisi.

Cela vient du seuil de rejet

$$SR = t\left(\frac{\alpha_g}{I(I-1)}, \nu\right) \times s_d$$

qui est un peu trop élevé.

Notons SR'_{α_g} le seuil qui donnerait un risque de 1ère espèce global réel de 5%.

$$SR'_{\alpha_g} < SR_{\alpha_g}$$

D'où il existe des couples (i,j) tel que

$$SR'_{\alpha_g} \leq |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| < SR_{\alpha_g}$$

Pour ces couples, on ne rejette pas H_0 (on conserve H_0) avec SR_{α_g} ; alors que l'on devrait rejeter H_0 avec le seuil correct SR'_{α_g}

Méthode de Tukey

Si le nombre de répétitions est constant

Intervalle de confiance simultanés
pour les différences $\mu_i - \mu_j$

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ rejetée si} \\ |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j| \geq q(\alpha_g, I, \nu) \times s_d / \sqrt{2}$$

$q(\alpha_g, I, \nu)$: quantile de "Studentized range"

Test conservatif

Méthode de Newman-Keuls

Si le nombre de répétitions est constant

Variante séquentielle de la méthode de Tukey, plus puissante.

Dans un ordre déterminé, on compare la différence entre la plus grande et la plus petite moyenne d'un groupe de p moyennes à

$$q(\alpha_g, p, \nu) \times s_d / \sqrt{2}$$

Détecte des différences vraies plus souvent que Tukey.

Exemple traité par la méthode de Newman-Keuls

NB de moyennes p	2	3	4	5	6
Etendue critique	4.48	5.42	5.99	6.40	6.71

souche 3dok13 3dok4 compos 3dok7 3dok5 3dok1
 moyenne 13.26 14.64 18.70 19.92 23.98 28.82

p=6 3dok1 - 3dok13 > 6.71 significatif
 p=5 3dok1 - 3dok4 > 6.40 significatif
 3dok5 - 3dok13 > 6.40 significatif
 p=4 3dok1 - compos > 5.99 significatif
 3dok5 - 3dok4 > 5.99 significatif
 3dok7 - 3dok13 > 5.99 significatif
 p=3 3dok1 - 3dok7 > 5.42 significatif
 3dok5 - compos < 5.42 non significatif
 3dok7 - 3dok4 < 5.42 non significatif
 compos - 3dok13 > 5.42 significatif
 p=2 3dok1 - 3dok5 > 4.48 significatif
 3dok4- 3dok13 < 4.48 non significatif

Azote/Rhizobium

Les valeurs critiques de Newman-Keuls, 1 par nombre de moyennes dans le groupe.

On classe les moyennes par ordre croissant.

- On commence par le groupe de 6 : la différence entre la plus grande et la plus petite moyenne des 6 est significative. On continue.
- Groupes de 5 : les écarts entre les plus grandes et les plus petites sont significatifs. On continue
- Groupes de 4 : les écarts sont significatifs. On continue.
- Groupes de 3 : 2 écarts sont non significatifs, on peut donc considérer que 2 groupes de 3 sont homogènes. (3dok5, 3dok7, compos) et (3dok7, compos, 3dok4) sont ces groupes.
- Il ne reste que 2 groupes de 2 à étudier : les 2 groupes aux extrémités.

Construire progressivement au tableau le schéma représentant les groupes :

3dok13 3dok4 compos 3dok7 3dok5 3dok1

Méthode de Scheffé

Quels que soient les nombres de répétitions

Intervalle de confiance simultanés pour tous les contrastes (combinaisons linéaires de moyennes dont la somme des coefficients est 0), en particulier pour les comparaisons de 2 moyennes

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ rejetée si } \frac{|\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j|}{\sqrt{(I-1)F(\alpha_q, I-1, \nu)}} \times s_d$$

Test conservatif, très général

Exemple de contraste :

$$\mu_1 - \frac{1}{5}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6) = 0$$

comparaison de μ_1 à la moyenne des autres.

Propriétés :

- Cohérent avec le test F : si le F n'est pas significatif, cette méthode ne donnera aucune différence significative.
- Sa généralité lui fait perdre de la puissance.
- Quand les nombres de répétitions sont différents, les 2 méthodes utilisables sont : Scheffé ou Bonferonni.

Méthode de Dunnett

Comparaisons au témoin

On ne fait que ($I-1$) comparaisons

$$H_0 : \mu_i = \mu_0 \text{ rejetée si} \\ |\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0| \geq d(\alpha_g, I - 1, \nu) \times s_d$$

μ_0 moyenne du témoin

Traitements meilleurs que le témoin :

— test unilatéral à droite
 $H_0 : \mu_i = \mu_0, H_1 : \mu_i > \mu_0$
si $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0 > d(\alpha_g, I - 1, \nu) \times s_d$
on rejette H_0 .

— test unilatéral à gauche
 $H_0 : \mu_i = \mu_0, H_1 : \mu_i < \mu_0$
si $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0 < -d(\alpha_g, I - 1, \nu) \times s_d$
on rejette H_0 .

Il n'y a que ($I-1$) comparaisons à faire car si on note

μ_0 la moyenne du témoin

on regarde

$\mu_i - \mu_0$ pour $i=1, \dots, I-1$

$d(\alpha_g, I - 1, \nu)$: quantile lu dans une table de Dunnett.

Dans certaines expériences, les traitements ne sont intéressants que s'ils sont supérieurs ou inférieurs au témoin.

— Test à droite : pour rechercher des moyennes supérieures à celles du groupe témoin.

— Test à gauche : pour rechercher les moyennes inférieures à celles du groupe témoin.

Tableau récapitulatif

Méthode	Valeur critique
PPDS	$t(\alpha, \nu) s_d$
Bonferroni	$t\left(\frac{\alpha_g}{I(I-1)/2}, \nu\right) s_d$
Tukey	$q(\alpha_g, I, \nu) s_d / \sqrt{2}$
Newman Keuls	$q(\alpha_g, p, \nu) s_d / \sqrt{2}$ où $p = 2, 3, \dots, I$
Scheffé	$\sqrt{(I-1)F(\alpha_g, I-1, \nu)} \times s_d$
Dunnett	$d(\alpha_g, I-1, \nu) s_d$
I nombre de moyennes à comparer	
α erreur 1ère espèce, de chaque comparaison 2 à 2	
α_g risque global de toutes les comparaisons 2 à 2	
ν degrés de liberté des résidus	
$\hat{\sigma}$ écart-type résiduel	
s_d écart-type de la différence des moyennes en cas d'effectifs égaux $s_d = \hat{\sigma} \sqrt{2/n}$ en cas d'effectifs inégaux $s_d = \hat{\sigma} \sqrt{1/n_i + 1/n_j}$	
t quantile de la loi de Student (table)	
q quantile "studentized range" (table)	
F quantile de la loi de Fisher (table)	
d quantile de Dunnett (table)	

Ce tableau récapitule les valeurs critiques des méthodes présentées.

En très gros, la formule est la même : un quantile (à rechercher dans une table) multiplié par s_d l'écart-type de la différence de 2 moyennes.

Toutes les valeurs critiques sauf celle de la PPDS dépendent du risque global α_g choisi par l'utilisateur.

Caractéristiques des méthodes

	PPDS	Tukey	Newman Keuls
Erreur 1ère espèce contrôlée	pour chaque comparaison ou contraste	pour toutes les comparaisons de 2 moyennes	pour toutes les comparaisons de 2 moyennes
Nombre de répétitions	non constant	constant	constant
Utilisations	quelques comparaisons ou contrastes définis a priori	comparaison de toutes les moyennes	comparaison de toutes les moyennes
Caractéristique		conservatif	

contraste : combinaison linéaire de moyennes dont la somme des coefficients est 0

exemples : $\mu_1 - \mu_2, \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}$

test conservatif : test dont le risque de 1ère espèce réel est inférieur au risque choisi (par exemple 5 %).

Conditions d'utilisation des Méthodes

- PPDS déconseillée sauf cas particulier où les comparaisons sont prévues à l'avance et en nombre très restreint.
- Exclusivement en cas de nombre de répétitions constant (c'est-à-dire le même nombre de répétitions pour tous les niveaux) : Tukey ou Newman-Keuls qui permet en général de mieux distinguer les groupes que Tukey (plus puissant).

Caractéristiques des méthodes – suite

	Bonferonni	Scheffé	Dunnnett
Erreur 1ère espèce contrôlée	pour toutes les comparaisons effectuées	pour tous les contrastes	pour toutes les comparaisons au témoin
Nombre de répétitions	non constant	non constant	constant
Utilisations	comparaisons de moyennes ou contrastes en nombre réduit	contraste (plus de 2 moyennes) comparaison de 2 moyennes	comparaison au témoin recherche des moyennes
Caractéristique	général conservatif	en grand nombre très général conservatif cohérent avec le test F	les plus élevées bilatéral ou unilatéral

contraste : combinaison linéaire de moyennes dont la somme des coefficients est 0

exemples : $\mu_1 - \mu_2, \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}$

test conservatif : test dont le risque de 1ère espèce réel est inférieur au risque choisi (par exemple 5 %).

- En cas de nombre de répétitions différents : Bonferonni ou Scheffé.
- Bonferonni plus puissant que Scheffé, c'est à-dire distingue plus de groupes, lorsque le nombre d'hypothèses testées n'est pas trop élevé.
- Lorsque le nombre d'hypothèses testées devient élevé Scheffé devient plus puissant que Bonferonni.
- De toutes façons, ces 2 méthodes ne sont pas très puissantes.
- Dunnnett : en principe le nombre de répétitions n'a pas à être constant MAIS les tables (ou les programmes) ne sont pas prévues dans le cas où le nombre de répétitions n'est pas constant.

Application à l'exemple Azote/ Rhizobium

Méthode	Risque choisi	Valeur critique pour les différences entre 2 moyennes	Options SAS
P.P.D.S	$\alpha = 5\%$	4.48	LSD ou T
Tukey	$\alpha_g = 5\%$	6.71	TUKEY
Newman Keuls	$\alpha_g = 5\%$	Etendue Nb de moyennes 2 4.48 3 5.42 4 5.99 5 6.40 6 6.71	SNK
Bonferonni	$\alpha_g = 5\%$	7.08	BON
Scheffé	$\alpha_g = 5\%$	7.86	SCHEFFE
Dunnnett	$\alpha_g = 5\%$	5.85	DUNNETT ('compos')

Pour l'exemple AZOTE/RHIZOBIUM :
Toutes les méthodes sont utilisables (nombre de répétitions constant).

Le tableau compare les valeurs critiques calculées pour un risque global $\alpha_g = 5\%$.

Les valeurs critiques de Bonferonni et Scheffé sont supérieures à celle de Tukey (7.08 et 7.86 contre 6.71). Bonferonni et Scheffé détectent donc moins de différences que Tukey.

On présente aussi le nom de l'option SAS qui permet d'obtenir le test.

Programme SAS :

```
proc glm;
class souche;
model azote=souche;
lsmeans souche /tdiff; /*différences entre moyennes*/
means souche /lsd tukey snk bon scheffe ;
means souche /dunnnett('compos');
run;
```

Estimation

Souche	Azote moyenne
3dok1	28.82
3dok5	23.98
3dok7	19.92
compos	18.70
3dok4	14.64
3dok13	13.26

Différences entre les moyennes

3dok1	0	3dok1	3dok7	compos	3dok4
3dok5	4.84	3dok5	0		
3dok7	8.90	3dok7	4.06	0	
compos	10.12	compos	5.28	1.22	0
3dok4	14.18	3dok4	9.34	5.28	4.06
3dok13	15.56	3dok13	10.72	6.66	5.44
					1.38

Les moyennes sont classées par ordre croissant.

Les différences entre moyennes sont présentées dans le tableau.
La valeur 9.34 correspond à la différence entre 2 moyennes 3dok5-3dok4
(23.98-14.64).

Classements obtenus

P.P.D.S	Newman Keuls	Tukey	Bonferonni	Scheffé	Moyenne	Souche
A	A	A	A	A	28.82	3dok1
B	B	B	B	B	23.98	3dok5
C	C	B	C	B	19.92	3dok7
C	C	B	C	B	18.70	compos
E	C	C	C	C	14.64	3dok4
E	D	C	C	C	13.26	3dok13

Les moyennes portant la même lettre ne sont pas significativement différentes.

DUNNETT

SOUÛHE

Comparaison

3dok1 - compos ***

3dok5 - compos

3dok7 - compos

3dok4 - compos

3dok13 - compos

Les comparaisons significatives sont repérées par ***

En comparant les écarts entre moyennes aux valeurs critiques précédemment vues, on peut déclarer quels écarts sont significatifs et quels écarts ne le sont pas.

2 moyennes non significativement différentes sont dans le même groupe, un groupe étant repéré par 1 lettre. Exemple : avec Tukey, 3dok1 et 3dok5 sont dans le même groupe (repéré par A), 3dok5 3dok7 et compos sont dans le même groupe (B), 3dok7 compos 3dok4 3dok13 dans le même groupe (C).

On peut aussi figurer les groupes en reliant par un trait les moyennes non différentes.

Le test de Dunnett confirme la différence de 3dok1 avec les autres.

Le test de Newman-Keuls apparaît comme le plus discriminant (exception faite de la PPDS qui ne contrôle pas le risque global).