QUALITÉ ET SOUS-MODÈLES

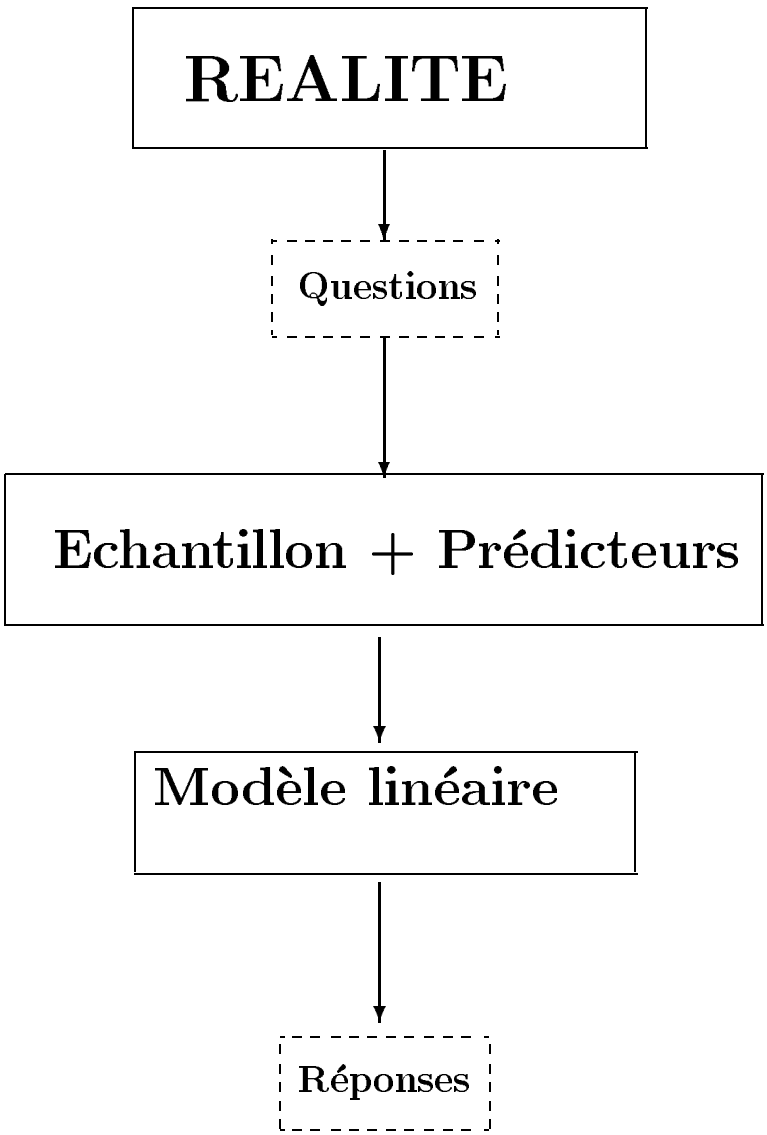
Plan du Chapitre 2

1. Utilité d'un modèle

2. Modèle et Sous-modèle

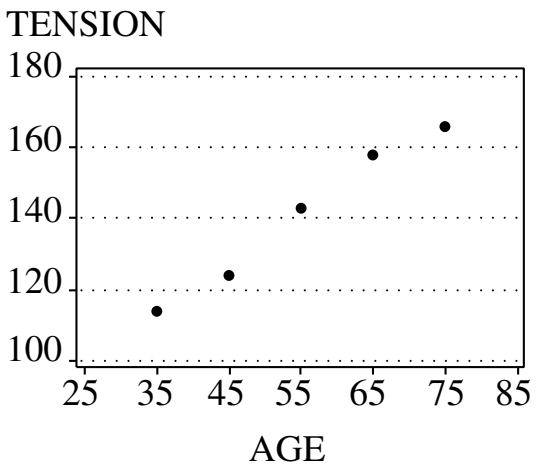
3. Test d'Hypothèses : comparaison de Modèles

Utilité d'un modèle



Réalité	inatteignable	
modèle choisi	$\mu_n = \sum x_{pn}\theta_p$	paramètres inconnus
modèle estimé	$\widehat{\mu}_n = \sum x_{pn}\widehat{\theta}_p$	paramètres estimés

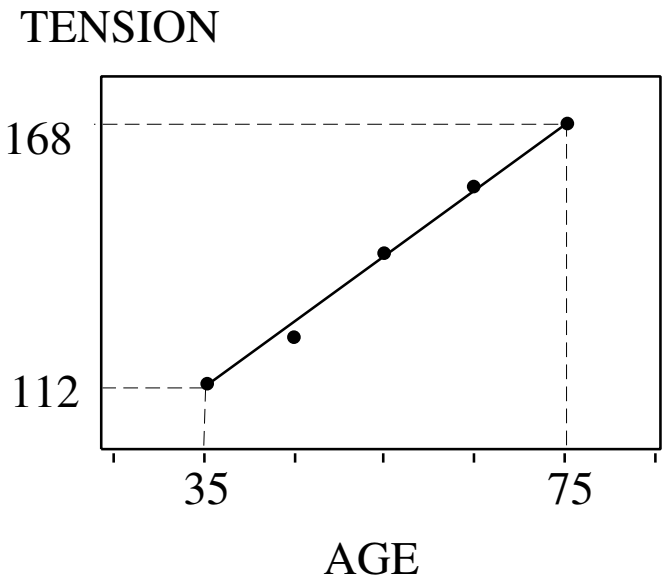
Exemple : Etude de la relation entre la tension artérielle et l'âge



Modèle choisi ?

Modèle estimé ?

Un exemple de modèle estimé



$$\widehat{\beta} = \frac{168 - 112}{75 - 35} \qquad 168 = \widehat{\alpha} + 1.4 \times 75$$

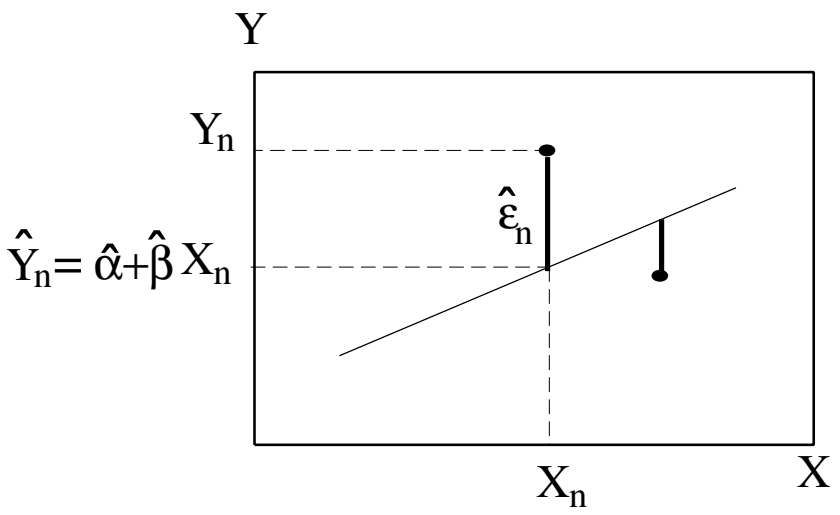
$$\widehat{\beta} = 1.4 \qquad \widehat{\alpha} = 63$$

$$\widehat{\mathrm{Y}} = 63 + 1.4 \times \mathrm{X}$$

Le meilleur modèle estimé ?

Quantifier l'utilité d'un modèle

Pour quantifier l'utilité d'un modèle, on définit une **distance** entre la valeur *prédite* $\widehat{Y}_n$ et la valeur observée Y_n sur tout l'échantillon.



Parmi les distances possibles, on trouve

— $\sum_n \left| Y_n - \widehat{Y}_n \right|$

— $\sum_n \left(Y_n - \widehat{Y}_n \right)^2$

— $\max \left| Y_n - \widehat{Y}_n \right|$

La distance choisie $\sum_n \left(Y_n - \widehat{Y}_n \right)^2$ correspond à **la Somme des Carrés des Écarts Résiduelle et est notée** $\mathbf{SCE_R}$.

Critère d'estimation

modèle choisi $$Y_n = \sum_p x_{np}\, \theta_n + \epsilon_n$$

modèle estimé $$Y_n = \sum_p x_{np}\, \widehat{\theta}_n + \widehat{\epsilon}_n$$

Soit $\widehat{Y}_n$ la meilleure prédiction

de Y_n dans le modèle estimé

$$\widehat{Y}_n = \sum_p x_{np}\, \widehat{\theta}_n$$

Critère de choix du "meilleur" modèle estimé, celui qui minimise la **distance**

$$\sum_n \left(Y_n - \widehat{Y}_n\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

Trouver le "meilleur" modèle estimé, c'est donc rechercher les θ_p tels que

$$\sum_n \left(Y_n - \sum_p x_{pn}\, \theta_p\right)^2 \text{ soit minimale}$$

c'est le critère des **Moindres Carrés**

Synthèse sur l'utilité d'un modèle

L'utilité d'un modèle est donc quantifiée par

$$\sum_{n} \left(Y_n - \widehat{Y}_n \right)^2$$

qui est la Somme des Carrés des Écarts Résiduelle.

On peut aussi vouloir le modèle demandant le moins de paramètres (principe de parcimonie)

le modèle le plus utile sera celui qui pour "une même SCE_R" aura le moins de paramètres

Modèle et Sous-modèle

définition

Modèle $\mu_n = \sum_p x_{np}\, \theta_n$

Sous-modèle emboîté : on a ôté un ou des paramètres au modèle (soit en les annulant, soit en les égalisant)

Exemples

Exemple : Étude des forêts à travers la hauteur d'arbres

Modèle	$\mu_n = \mu + \alpha_i$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

Sous-modèle emboîté	$\mu_n = \mu$

Exemple : Étude du rendement de blé en fonction de doses de fertilisants

Modèle	$\mu_n = 1.\theta_0 + Z1_n.\theta_1 + Z2_n.\theta_2 + Z3_n.\theta_3$

$\theta_1 = 0$

Sous-modèle emboîté	$\mu_n = 1.\theta_0 + \quad + Z2_n.\theta_2 + Z3_n.\theta_3$

Contre-exemples

Exemple : Étude de la teneur en huile de population de tournesol

Modèle M_1 $\mu_n = \mu + \alpha_i$

↑

?

↓

Modèle M_2 $\mu_n = \mu + \beta_j$

Exemple : Étude du rendement de blé en fonction de doses de fertilisants

Modèle M_1 $\mu_n = 1.\theta_0 + Z1_n.\theta_1 + \quad + Z3_n.\theta_3$

↑

?

↓

Modèle M_2 $\mu_n = 1.\theta_0 + \quad + Z2_n.\theta_2 + Z3_n.\theta_3$

Modèle irréductible

définition

Un modèle est sous **forme irréductible**

$\Longleftrightarrow$ **tous ses paramètres** sont importants

$\Longleftrightarrow$ il n'existe pas un modèle moins paramétré

Modèle irréductible ? (oui/non)

Exemple : Étude des forêts à travers la hauteur d'arbres

$\mu_n = \mu + \alpha_i \qquad i = 1 \cdots I = 3$

Exemple : Étude du rendement de blé en fonction de doses de fertilisants

$\mu_n = 1.\theta_0 + Z1_n.\theta_1 + Z2_n.\theta_2 + Z3_n.\theta_3$

Exemple : Niveau scolaire

$\mu_n = 1.\theta_0 + Z1_n.\theta_1 + Z2_n.\theta_2 + Z3_n.\theta_3 + Z4_n.\theta_4$

μ_n : note moyenne espérée au lycée

$Z1_n$: note moyenne au collège

$Z2_n$: note moyenne en mathématique au lycée

$Z3_n$: note moyenne en philosophie au lycée

$Z4_n$: notes moyennes au lycée ($Z2_n + Z3_n$)

Test par rapport au modèle le plus simple

Modèle M_1	$\mu_n = \theta_0 + \sum_{p=1}^{P-1} x_{np}\,\theta_p$
Nbre de paramètres irréductibles	P
SCE_{M_1}	$\sum_{n=1}^{N} \left(Y_n - \widehat{Y}_n\right)$

|

$$H_0 = \{\theta_p = 0 \;\; p = 1...P-1\}$$

$$H_1 = \{\exists p \;\; / \;\; \theta_p \neq \; 0\}$$

↓

Modèle M_0	$\mu_n = \theta_0$
Nbre de paramètres irréductibles	1
SCE_{M_0}	$\sum_{n=1}^{N} (Y_n - Y.)$

Décomposition de la variabilité

$$\underset{\downarrow}{SCE_{M_0}} = \underset{\downarrow}{\left(SCE_{M_0} - SCE_{M_1}\right)} + \underset{\downarrow}{SCE_{M_1}}$$

ddl	N-1	=	P-1	+	N-P

$$SCE_{M_0} = \sum_{n=1}^{N} (Y_n - Y.)^2$$

$$SCE_{M_1} = \sum_{n=1}^{N} \left(Y_n - \widehat{Y}_n\right)^2$$

Statistique de test

Statistique :

$$F = \frac{\left(SCE_{M_0} - SCE_{M_1}\right)/(P-1)}{SCE_{M_1}/(N-P)}$$

$$H_0 = \{\theta_p = 0 \quad p = 1 \cdots P-1\}$$

$$H_1 = \{\exists_P \ / \ \theta_p \neq 0\}$$

$$F \sim F(P-1, N-P) \text{ sous } H_0$$

Table d'analyse de la variance

Source	ddl	SC	CM	F	Pr > F
Modèle	P-1	$\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_0} - \mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_1}$	CM_{M}	F	$\Pr(\mathrm{F}(\mathrm{P}-1, \mathrm{N}-\mathrm{P}) > \mathrm{F})$
Résiduelle	N-P	$\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_1}$	CM_{R}		
Totale	N-1	$\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_0}$			

$$\mathrm{CM}_{\mathrm{M}} = \frac{\left(\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_0} - \mathrm{SCE}_{\mathrm{M}1}\right)}{\mathrm{P}-1}$$

$$\mathrm{CM}_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_1}}{\mathrm{N}-\mathrm{P}} = \widehat{\sigma}^2$$

$$\mathrm{F} \quad = \frac{\left(\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_0} - \mathrm{SCE}_{\mathrm{M}1}\right)/(\mathrm{P}-1)}{\mathrm{SCE}_{\mathrm{M}_1}/(\mathrm{N}-\mathrm{P})}$$

Test M_1 contre M_2

Modèle M_2

Source	ddl	SC	CM	F
Modèle	P-1	$SCE_{M_0} - SCE_{M_2}$	CM_{M_2}	$\frac{CM_{M_2}}{CM_{R_2}}$
Résiduelle	N-P	SCE_{M_2}	CM_{R_2}	
Totale	N-1	SCE_{M_0}		

$\downarrow$

H_0 = Les paramètres non communs à M_1et M_2 sont tous nuls

H_1 = Au moins un des paramètres non communs à M_1et M_2 est non nul

$\downarrow$

Sous Modèle emboîté M_1

Source	ddl	SC	CM	F
Modèle	Q-1	$SCE_{M_0} - SCE_{M_1}$	CM_{M_1}	$\frac{CM_{M_1}}{CM_{R_1}}$
Résiduelle	N-Q	SCE_{M_1}	CM_{R_1}	
Totale	N-1	SCE_{M_0}		

Statistique : $F = \frac{(SCE_{M_1} - SCE_{M_2})/(P-Q)}{SCE_{M_2}/(N-P)}$

Statistique de test

Statistique :

$$F = \frac{\left(SCE_{M_1} - SCE_{M_2}\right)/(P - Q)}{SCE_{M_2}/(N - P)}$$

$H_0 = \{$Les paramètres non communs à
M_1 et M_2 sont tous nuls$\}$

$H_1 = \{$Au moins un des paramètres non communs à
M_1 et M_2 est non nul$\}$

$F \sim F(P - Q, N - P)$ sous H_0