L'ANALYSE DE VARIANCE A DEUX FACTEURS

Données expérimentales

Y_{ijk}	Variété 1	Variété 2	Variété 3
Sol 1	6 10 11	13 15	14 22
Sol 2	12 19 15 18	31	18 9 12

$\widehat{\theta_{ij}}$	**1**	**2**	**3**	$\widehat{\theta_{i.}}$
1	9	14	18	13.67
2	16	31	13	20.0
$\widehat{\theta_{.j}}$	12.5	22.5	15.5	$\widehat{\theta_{..}}$ = 16.83

Rappel:
On a conclu à l'existence de p différences significatives entre les couples (***sol, variété***).
On veut aller plus loin et tester l'incidence respective des deux facteurs ***sol*** et ***variété*** indépendamment.

On estime des moyennes liées aux deux facteurs de variation ***sol*** et ***variété***:

$\widehat{\theta_{i.}}$ = moyenne des $\widehat{\theta_{ij}}$ pour chaque ligne i
$\widehat{\theta_{.j}}$ = moyenne des $\widehat{\theta_{ij}}$ pour chaque colonne j

Rappel:
$\widehat{\theta_{ij}}$ = moyenne de la case (i, j)
$\widehat{\theta_{..}}$ = moyenne des $\widehat{\theta_{ij}}$

Estimation des effets

$\widehat{\theta_{ij}}$	**1**	**2**	**3**	$\widehat{\theta_{i.}}$	$\widehat{\alpha_i}$ $\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}}$
1	9	14	18	13.67	-3.17
2	16	31	13	20.0	3.17
$\widehat{\theta_{.j}}$	12.5	22.5	15.5	$\widehat{\theta_{..}} =$ 16.83	
$\widehat{\beta_j}$ $\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}}$	-4.33	5.67	-1.33		

$\widehat{\gamma_{ij}}$	**1**	**2**	**3**
1	-0.33	-5.33	5.67
2	0.33	5.33	-5.67

On utilise ces moyennes pour décomposer les $\widehat{\theta_{ij}}$ en:

- effet du sol $(\widehat{\alpha_i})$: $\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}}$
- effet de la variété $\left(\widehat{\beta_j}\right)$: $\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}}$
- reste $(\widehat{\gamma_{ij}})$: $\widehat{\theta_{ij}} - \left(\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}}\right) - \left(\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}}\right) - \widehat{\theta_{..}}$

ECRITURE EQUIVALENTE DU MODELE GENERAL

$$Y_{ijk} = \theta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$$

Modèle complet à deux facteurs

Du modèle des couples (***sol, variété***),

on passe

au modèle complet à deux facteurs (équivalent au modèle en θ_{ij}).

Ainsi définis, les effets du modèle vérifient les égalités suivantes :

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

$$\sum_j \gamma_{ij} = 0 \qquad \text{pour tout } i$$

$$\sum_i \gamma_{ij} = 0 \qquad \text{pour tout } j$$

Ces égalités sont appelées:

contraintes

ou

conditions supplémentaires

(On pourra reprendre le second transparent 8.1, pour vérifier ces conditions).

ESTIMATION DES EFFETS DU MODELE A DEUX FACTEURS

Effet		Estimateur
Moyenne générale	μ	$\widehat{\theta_{..}} = \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \widehat{\theta_{ij}}$
Effet de la modalité i du premier facteur	α_i	$\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}} = \frac{1}{J} \sum_j \widehat{\theta_{ij}} - \widehat{\theta_{..}}$
Effet de la modalité j du second facteur	β_j	$\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}} = \frac{1}{I} \sum_i \widehat{\theta_{ij}} - \widehat{\theta_{..}}$
Reste	γ_{ij}	$\widehat{\theta_{ij}} - (\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}}) - (\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}}) - \widehat{\theta_{..}}$ ou $\widehat{\theta_{ij}} - \widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{.j}} + \widehat{\theta_{..}}$

Ces estimateurs sont ceux du modèle à deux facteurs précédemment définis.
Ils sont valables dans tous les cas (équilibrés ou déséquilibrés).

On rappellera que $\widehat{\theta_{..}}$ est la **moyenne des** $\widehat{\theta_{\mathrm{ij}}}$, et non la moyenne de l'ensemble des données Y_{ijk}.

ECRITURE DU MODELE A DEUX FACTEURS

Modèle complet à deux facteurs

$$\theta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

α_i	β_j	γ_{ij}
↓	↓	↓
Effet du premier facteur	Effet du second facteur	Reste ou Interaction

Lorsque les γ_{ij} sont tous nuls, on utilise le **sous-modèle** :

$$\theta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Le **reste** (ou interaction) dépend des deux facteurs simultanément.

Le sous-modèle sans interaction est appelé **modèle additif** car les effets de chacun des deux facteurs sont additionnés.

Un tel modèle suppose que les données vérifient:

$$\begin{aligned}
&\theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \\
&\theta_{12} - \theta_{13} = \theta_{22} - \theta_{23} \\
&ect \ldots
\end{aligned}$$

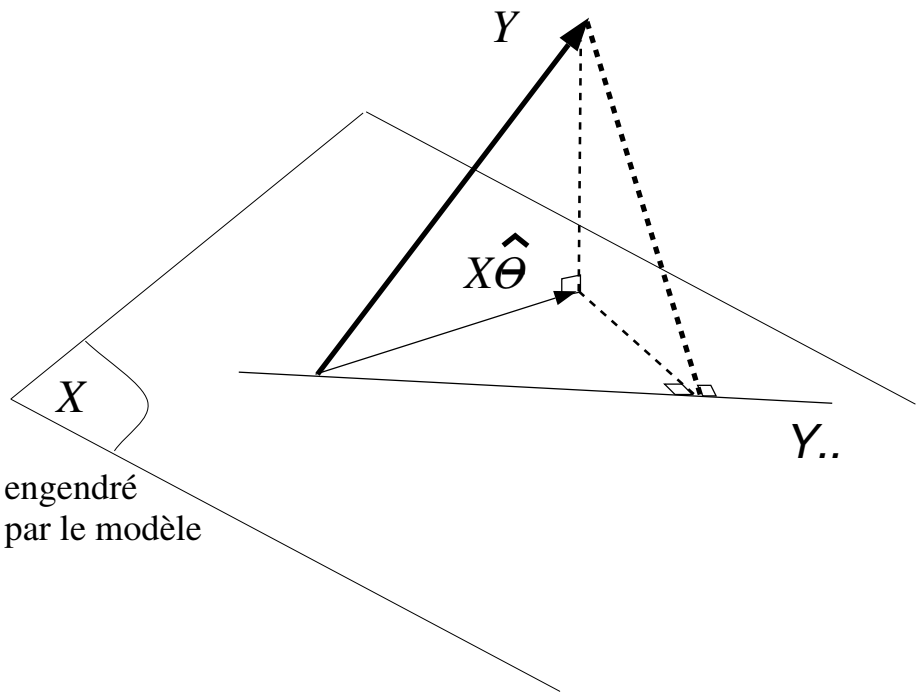
En effet si les γ_{ij} sont nuls:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma\!\!\!/_{11} \\
&\underline{\theta_{12} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma\!\!\!/_{12}} \\
&\theta_{11} - \theta_{12} = \beta_1 - \beta_2 \\
&\theta_{21} = \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \gamma\!\!\!/_{21} \\
&\underline{\theta_{22} = \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma\!\!\!/_{22}} \\
&\theta_{21} - \theta_{22} = \beta_1 - \beta_2
\end{aligned}\right\} \theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22}$$

On pourra compléter (en groupe) le tableau suivant dont les données justifient le modèle additif:

	FACTEUR 2		
FACTEUR 1	5	4	1
	7	?	?

DECOMPOSITION DE LA SOMME DES CARRES EXPLIQUEE PAR LE MODELE



Cas équirépété	Cas non-équirépété
n_{ij} = constante	n_{ij} = variable
↓	↓
Décomposition UNIQUE	**Décompositions MULTIPLES**

On étudie maintenant comment se décompose (dans le cas général) la somme des carrés associée au modèle.

Cette somme est la projection du vecteur des observations dans le plan de la variation expliquée par le modèle (les $\widehat{\theta_{ij}}$).
Ce vecteur $(X\hat{\theta})$ s'écarte d'autant plus de la moyenne $Y_{..}$ que les differences entre les $\widehat{\theta_{ij}}$ sont grandes (qu'il y a un effet fort des couples (α_i, β_j)).

DECOMPOSITION DE LA SOMME DES CARRES EXPLIQUEE PAR LE MODELE

Cas équirépété à r répétitions

Variation	Somme des carrés	DDL	Carré moyen	F
1er facteur	$\sum_{ijk} \left(\widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{..}}\right)^2$	$I-1$	CM_1	$\dfrac{CM_1}{CM_r}$
2e facteur	$\sum_{ijk} \left(\widehat{\theta_{.j}} - \widehat{\theta_{..}}\right)^2$	$J-1$	CM_2	$\dfrac{CM_2}{CM_r}$
Inter-action	$\sum_{ijk} \left(\widehat{\theta_{ij}} - \widehat{\theta_{i.}} - \widehat{\theta_{.j}} + \widehat{\theta_{..}}\right)^2$	$(I-1)(J-1)$	CM_I	$\dfrac{CM_I}{CM_r}$
Résiduelle	$\sum_{ijk} \left(Y_{ijk} - Y_{ij.}\right)^2$	$(r-1)IJ$	CM_r	

Dans le cas équirépété, les sommes de carrés ont une expression simple basée sur les moyennes.

La table d'analyse de variance est **unique**.

NB: Les sommes se font sur **l'ensemble** des observations (i, j et k).

EXEMPLE D'APPLICATION DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE DANS LE CAS EQUIREPETE

Etude de la teneur en huile de populations de tournesol
Données expérimentales

Origine	AFRIQUE	HONGRIE	MAROC
Testeur 1	43.54 45.30	44.25 42.55	47.28 49.40
Testeur 2	47.21 47.73	44.34 46.49	47.75 49.47

Le modèle est illustré par cet exemple de situation expérimentale :
à construire au tableau avec les stagiaires

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$\swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow$$

Effet testeur, origine, Interaction, Résidu

ANALYSE DE LA VARIANCE AVEC *SAS*

Procédure GLM , cas équirépété

Exemple Tournesol

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: HUILE

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	47.1814417	9.4362883	6.18	0.0233
Error	6	9.1666500	1.5277750		
Corrected Total	11	56.3480917			

R-Square	C.V.	Root MSE	HUILE Mean
0.837321	2.671010	1.23603	46.275833

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TESTEUR	1	9.4874083	9.4874083	6.21	0.0470
ORIGINE	2	33.7458167	16.8729083	11.04	0.0097
TESTEUR*ORIGINE	2	3.9482167	1.9741083	1.29	0.3415

Sortie de la procédure GLM ("General Linear Models") du logiciel SAS.

La situation la plus courante : LE CAS NON-EQUIREPETE

- Hypothèse nulle : *la réponse moyenne $\theta_{i.}$ ne dépend pas de la modalité i du facteur*

$$H_0 : \theta_{1.} = \theta_{2.} = \cdots = \theta_{I.} = \theta_{..}$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$$

- Somme des carrés :

$$SC(\alpha) = \sum_{i=1}^{I} \omega_i \left(\widehat{\theta_{i.}} - \frac{\sum_i \omega_i \widehat{\theta_{i.}}}{\sum_i \omega_i} \right)^2$$

où

$$\frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{J^2} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{n_{ij}}$$

Cette décomposition correspond aux sommes de carrés de type III du logiciel SAS.

C'est l'hypothèse habituellement considérée.

NB: Les tests des différents facteurs sont indépendants les uns des autres.

Les sommes des carrés tiennent compte des effectifs n_{ij}.
Leur somme n'est **pas égale** à la somme des carrés totale.

Le type III n'est efficace que si aucun des n_{ij} n'est nul.
Dans le cas contraire, utiliser les sommes de carrés de type IV.

Remarque pour le formateur: Ces sommes font appel à une théorie différente (fonctions estimables).

CAS NON-EQUIREPETE
TESTS SEQUENTIELS

- Hypothèse nulle : *l'ajout d'un facteur d'indice j n'apporte pas une part d'explication significative par rapport au modèle*

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

- Somme de carrés séquentielles :

Source	Somme de carrés
α	$SC\,(\alpha/\mu)$
β	$SC\,(\beta/\mu, \alpha)$
γ	$SC\,(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$

Cette décomposition correspond aux sommes de carrés de type I de SAS, ainsi qu'à celles données par les logiciels MODLI et ANVARM.

NB : *le test dépend de l'ordre des facteurs dans le modèle*

On teste donc:

$$\begin{cases} \theta_{11} = \theta_{12} = \cdots = \theta_{1\mathrm{J}} = \theta_{1\cdot} \\ \theta_{21} = \theta_{22} = \cdots = \theta_{2\mathrm{J}} = \theta_{2\cdot} \\ \quad \vdots \\ \theta_{\mathrm{I}1} = \theta_{\mathrm{I}2} = \cdots = \theta_{\mathrm{IJ}} = \theta_{\mathrm{I}\cdot} \end{cases}$$

Les sommes des carrés séquentielless sont calculées, pas à pas, par la réduction de somme de carrés résiduelle obtenue lors de l'ajout d'un facteur supplémentaire.

La somme de carrés de β tient compte de α et non le contraire; α n'est pas ajusté de β.

Remarque pour le formateur:

Les SCE type II de SAS correspondent à:

α	$\mathrm{SC}(\alpha/\mu, \beta)$
β	$\mathrm{SC}(\beta/\mu, \alpha)$
μ	$\mathrm{SC}(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$

MODELE COMPLET A DEUX FACTEURS

Exemple Carottes

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: GERMINAT

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	400.0000000	80.0000000	6.00	0.0103
Error	9	120.0000000	13.3333333		
Corrected Total	14	520.0000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	GERMINAT Mean
0.769231	24.34322	3.651484	15.0000000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
SOL	1	52.5000000	52.5000000	3.94	0.0785
VARIETE	2	124.7340426	62.3670213	4.68	0.0405
SOL*VARIETE	2	222.7659574	111.3829787	8.35	0.0089

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value	Pr > F
SOL	1	83.9007092	83.9007092	6.29	0.0334
VARIETE	2	124.7340426	62.3670213	4.68	0.0405
SOL*VARIETE	2	222.7659574	111.3829787	8.35	0.0089

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
SOL	1	123.7714286	123.7714286	9.28	0.0139
VARIETE	2	192.1276596	96.0638298	7.20	0.0135
SOL*VARIETE	2	222.7659574	111.3829787	8.35	0.0089

Dans l'expérience sur la germination des carottes, les données ne sont pas équilibrées:

$$\text{type I} \neq \text{type III}$$

Le type II correspond au type I par permutation des facteurs (les "rotations" de MODLI ou ANVARM).

Test habituel:
$$\begin{aligned} H_0 &= \text{égalité des } \gamma_{ij} \\ H_0 &= \text{égalité des } \alpha_i(\text{sols}) \\ H_0 &= \text{égalité des } \beta_i \text{ (variétés)} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ voir les SC TYPE III

On conclut au rejet de chacune de ces trois hypothèses.

ANALYSE DE VARIANCE AVEC SAS DANS LE CAS EQUIREPETE

Exempe Tournesol

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: HUILE

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	47.1814417	9.4362883	6.18	0.0233
Error	6	9.1666500	1.5277750		
Corrected Total	11	56.3480917			

R-Square	C.V.	Root MSE	HUILE Mean
0.837321	2.671010	1.23603	46.275833

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TESTEUR	1	9.4874083	9.4874083	6.21	0.0470
ORIGINE	2	33.7458167	16.8729083	11.04	0.0097
TESTEUR*ORIGINE	2	3.9482167	1.9741083	1.29	0.3415

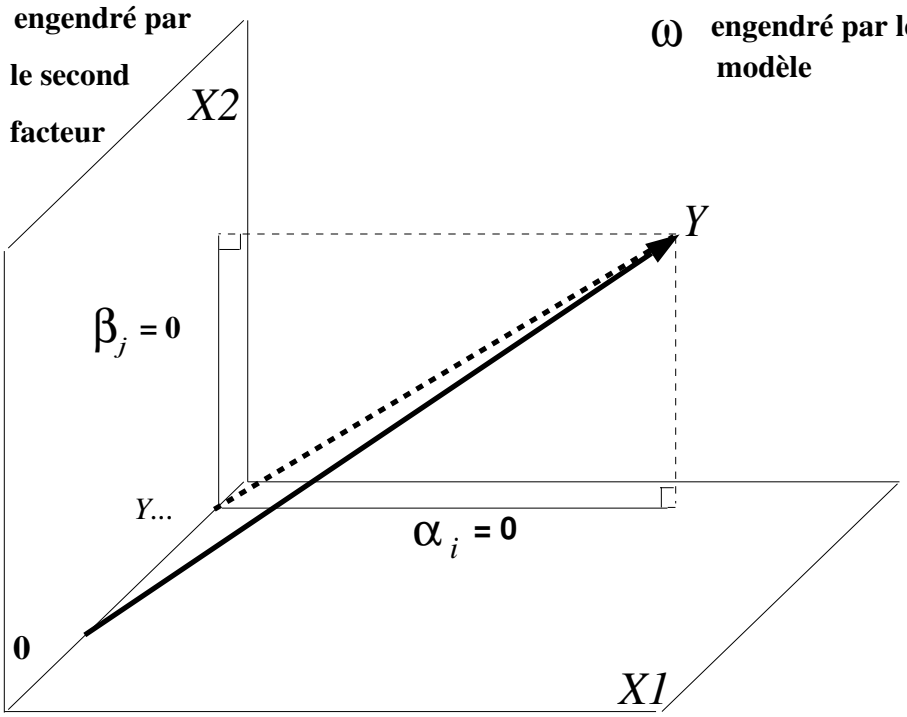
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TESTEUR	1	9.4874083	9.4874083	6.21	0.0470
ORIGINE	2	33.7458167	16.8729083	11.04	0.0097
TESTEUR*ORIGINE	2	3.9482167	1.9741083	1.29	0.3415

Equirépétition:
L'ordre des facteurs n'influe pas sur les estimations.

$\Longrightarrow$ même résultats du type I et du type III.

Pour un risque de 5%, on conclut à une différence entre les origines d'une part et entre les deux testeurs d'autre part.

CAS EQUIREPETE : REPRESENTATION GEOMETRIQUE



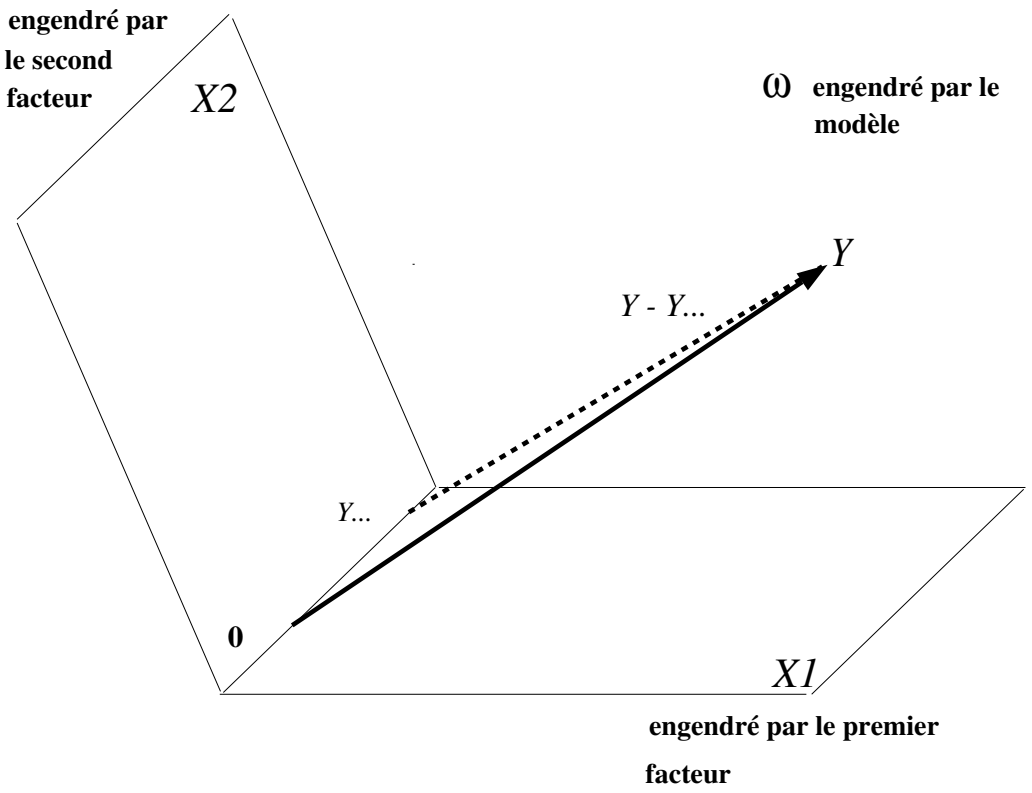
$$EQUIREPETITION \left\{ \begin{array}{c} ORTHOGONALITE \\ DECOMPOSITION\ UNIQUE \end{array} \right.$$

Même estimation de la somme des carrés d'un facteur, que l'on projette
d'abord sur le "plan" engendré par ce facteur
ou non

$\Downarrow$

Décomposition unique

CAS NON-EQUIREPETE : REPRESENTATION GEOMETRIQUE



- **Sans rabat:** $\overrightarrow{O\widehat{Y}}$ se situe dans l'espace engendré par le modèle ($\overrightarrow{OY}$ est hors de cet espace).
  $\overrightarrow{OY_{...}}$ est le terme de centrage.

- **Rabat gauche:** Somme des carrés du facteur α ajustée des effets de β.
  Projection sur X_2.

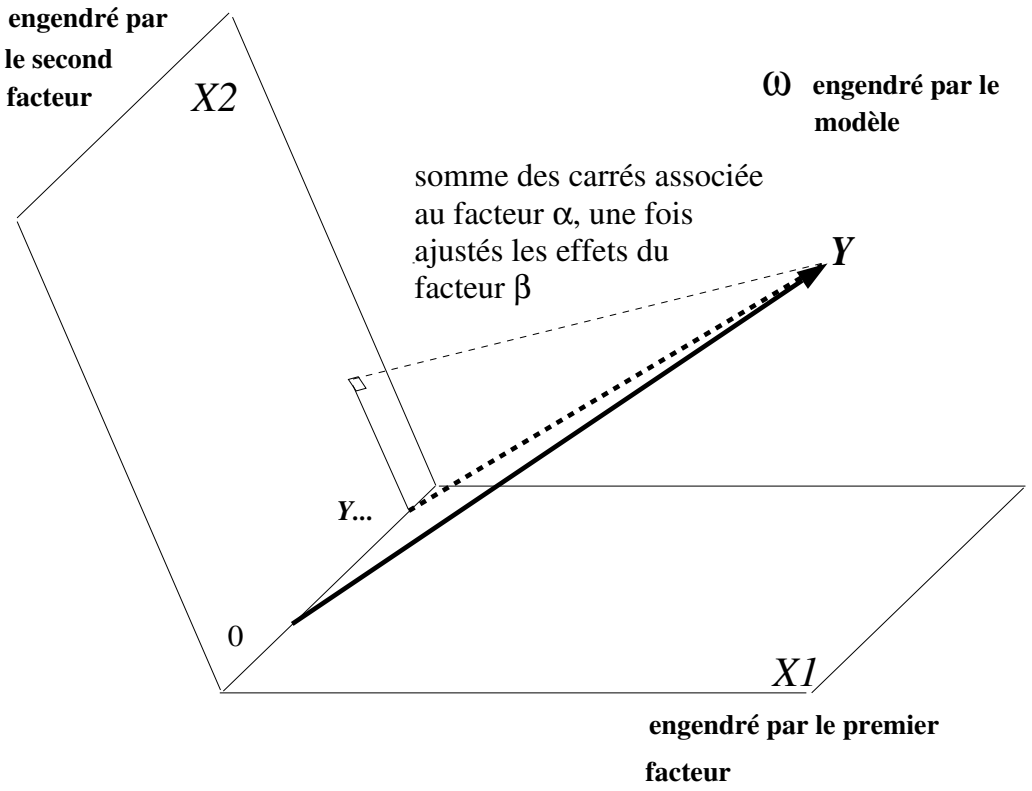
$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\beta) + SC_{a.}(\alpha)$$

- **Rabat droit:** Somme des carrés du facteur β ajustée des effets de α.
  Projection sur X_1.

$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\alpha) + SC_{a.}(\beta)$$

Il y a deux décompositions

En général, la non-equirépétition conduit à la non-orthogonalité.


engendré par
le second
facteur
X2
ω engendré par le
modèle
somme des carrés associée
au facteur α, une fois
ajustés les effets du
facteur β
Y
Y...
0
X1
engendré par le premier
facteur

- **Sans rabat:** $\overrightarrow{O\widehat{Y}}$ se situe dans l'espace engendré par le modèle ($\overrightarrow{OY}$ est hors de cet espace).
  $\overrightarrow{OY}_{...}$ est le terme de centrage.

- **Rabat gauche:** Somme des carrés du facteur α ajustée des effets de β.
  Projection sur X_2.

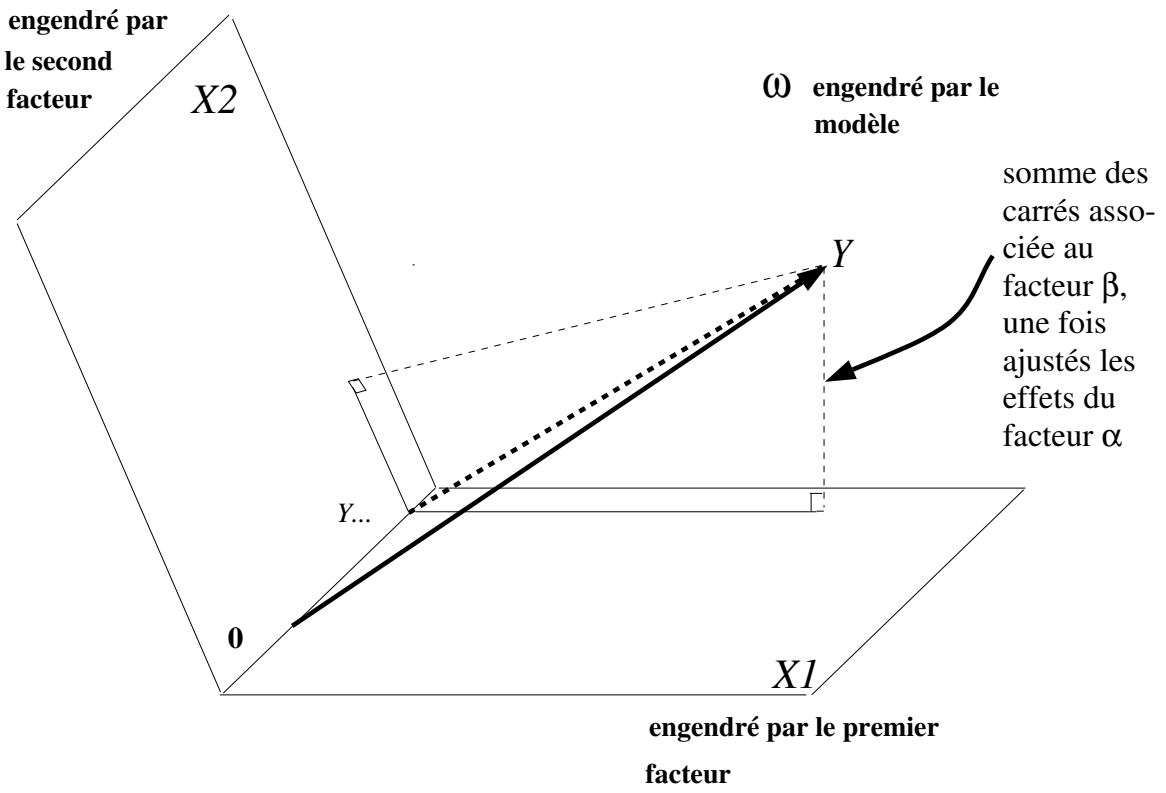
$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\beta) + SC_{a.}(\alpha)$$

- **Rabat droit:** Somme des carrés du facteur β ajustée des effets de α.
  Projection sur X_1.

$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\alpha) + SC_{a.}(\beta)$$

Il y a deux décompositions

En général, la non-equirépétition conduit à la non-orthogonalité.


engendré par
le second
facteur
X2
ω engendré par le
modèle
somme des
carrés asso-
ciée au
facteur β,
une fois
ajustés les
effets du
facteur α
Y
Y...
0
X1
engendré par le premier
facteur

- **Sans rabat:** $\overrightarrow{O\widehat{Y}}$ se situe dans l'espace engendré par le modèle ($\overrightarrow{OY}$ est hors de cet espace).
  $\overrightarrow{OY}_{...}$ est le terme de centrage.

- **Rabat gauche:** Somme des carrés du facteur α ajustée des effets de β.
  Projection sur X_2.

$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\beta) + SC_{a.}(\alpha)$$

- **Rabat droit:** Somme des carrés du facteur β ajustée des effets de α.
  Projection sur X_1.

$$\Rightarrow \left\|0\widehat{Y}\right\| = \|0Y_{...}\| + SC_{n.a.}(\alpha) + SC_{a.}(\beta)$$

Il y a deux décompositions

En général, la non-equirépétition conduit à la non-orthogonalité.

DIFFERENTS TYPES DE CONDITIONS SUPPLEMENTAIRES

Sur les effets principaux :

$\sum_i \alpha_i = 0$ $\qquad$ $\sum_j \beta_j = 0$

$\sum_i n_{i+}\alpha_i = 0$ $\qquad$ $\sum_j n_{+j}\ \beta_j = 0$

$\alpha_I = 0$ $\qquad$ $\beta_J = 0$

S'il y a des interactions :

$\sum_j \gamma_{ij} = 0$ pour tout i $\qquad$ $\sum_i \gamma_{ij} = 0$ pour tout j

$\sum_j n_{i+}\gamma_{ij} = 0$ " $\qquad$ $\sum_i n_{+j}\ \gamma_{ij} = 0$ "

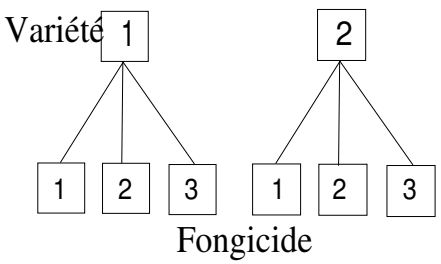
$\sum_j n_{ij}\gamma_{ij} = 0$ " $\qquad$ $\sum_i n_{ij}\gamma_{ij} = 0$ "

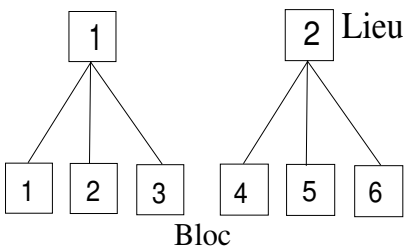
- Choix habituel (cf. l'exemple des carottes).

- Option prise dans Amance

- Option prise par MODLI et SAS
  (Dans certains cas, c'est l'effet du premier niveau des facteurs qui peut être mis à zéro).

FACTEURS CROISES	**FACTEURS HIERARCHISES**
variété × lieu	bloc dans lieu
variété × fongicide	sous-bloc dans bloc n° de descendant dans famille génétique
variété × testeur	
concentration × température	n° de lapin dans n° de portée dans n° de lapine
Chaque fongicide appliqué sur chaque variété (le fongicide 1 est le même pour toutes les variétés)	Pas de correspondance entre le bloc 1 d'un lieu à l'autre





- *(moitié droite cachée)*

  Les modèles d'analyse de variance rencontrés jusqu'ici s'appliquent à des facteurs dits **croisés**:

  – Chaque modalité (ou niveau) d'un facteur est présente pour l'ensemble des modalités des autres facteurs.

- *(moitié droite découverte)*

  Il existe des expériences dans lesquelles les facteurs sont dits **hierarchisés** (ou emboités).

  – Une modalité donnée d'un facteur hiérarchisé n'est présente que pour une seule des modalités du facteur hiérarchisant.

  La numérotation des niveaux du facteur hiérarchisé peut être arbitraire.

MODELE D'ANALYSE DE VARIANCE A DEUX FACTEURS HIERARCHISES

2 facteurs A et B
Facteur B *emboîté* dans le facteur A
B= bloc, A= lieu

$$\boxed{Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$$

Y réponse observée
μ moyenne de Y
α_i effet du niveau i de A
β_{ij} effet du niveau j de B pour le niveau i de A (β_{11} : effet du bloc 1 pour le lieu 1)
ε_{ijk} erreur

Ecriture symbolique
SAS Y=A B(A)
MODLI Y=MU + A + A.B + EPS

Vocabulaire:

emboité (dans) = hiérarchisé (à)

L'effet propre du facteur B n'existe pas, il est pris en compte uniquement par son **interaction** avec A.

(β_{ij} est l'effet de B dans A ou interaction B.A)

Indiquer au logiciel que l'on est dans ce cas:

- SAS a une syntaxe particulière.
  (mais on peut aussi écrire: Y =A A$*$B).
- MODLI n'a pas de syntaxe particulière, mais il ne faut pas indiquer l'effet propre de B.

MODELES HIERARCHISES : ANALYSE DE VARIANCE

Dependent Variable: PRODLAIT

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	20	1018.85333	50.94267	41.52	0.0001
Error	21	25.76500	1.22690		
Corrected Total	41	1044.61833			

R-Square	C.V.	Root MSE	PRODLAIT Mean
0.975335	3.629680	1.10766	30.516667

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
FOURRAGE	2	104.617619	52.3088	42.63	0.0001
VACHE(FOURRAGE)	18	914.235714	50.7908	41.40	0.0001

Exemple:
On étudie la production laitière de vaches consommant trois fourrages différents.
Il y a:

- 3 lots de 7 vaches,
- 2 répétitions par animal.

Schéma à reproduire au tableau:

FOURRAGE	VACHE
1	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
2	8
	9
	⋮
	14
3	15
	16
	⋮
	21

ddl (VACHE) = 3 lots $\times$ (7-1) vaches = 18

On conclut à l'existence:

- de différences entre les fourrages,
- de différences entre les animaux pour un fourrage donné.

CAS PARTICULIER : ECHANTILLONS D'UNE SEULE OBSERVATION

- La somme des carrés des écarts totale se confond avec la somme factorielle totale :

$$\widehat{\theta_{ij}} = Y_{ij}$$

- Le modèle s'écrit donc :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

- Il n'est jamais possible de tester l'interaction puisqu'il n'y a pas de base de comparaison (la SC résiduelle est nulle).
- Les effets principaux ne peuvent être testés qu'en l'**absence d'interaction** (modèle additif).