Soit $\overrightarrow{E(\hat{\theta})}$, “l'espérance de $\overrightarrow{\hat{\theta}}$”

$$\text{le vecteur : } \begin{pmatrix} E\left(\widehat{\theta_1}\right) \\ E\left(\widehat{\theta_2}\right) \\ \vdots \\ E\left(\widehat{\theta_1}\right) \end{pmatrix}$$

On a: $\boxed{\overrightarrow{E\left(\hat{\theta}\right)} = \overrightarrow{\theta}}$

C'est à dire:

$$\begin{pmatrix} E\left(\widehat{\theta_1}\right) \\ E\left(\widehat{\theta_2}\right) \\ \vdots \\ E\left(\widehat{\theta_n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} E\left(\widehat{\theta_1}\right) = \theta_1 \\ E\left(\widehat{\theta_2}\right) = \theta_2 \\ \vdots \\ E\left(\widehat{\theta_n}\right) = \theta_n \end{array}$$

$\boxed{\overrightarrow{\hat{\theta}} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$

Démonstration en complément pour formateur.

Soit $var(\overrightarrow{\widehat{\theta}})$ la matrice symétrique:

$$\begin{pmatrix} var\left(\widehat{\theta_1}\right) & \cdots & \cdots & cov\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_{\rm n}}\right) \\ cov\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right) & var\left(\widehat{\theta_2}\right) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ cov\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_{\rm n}}\right) & & & var\left(\widehat{\theta_{\rm n}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{var\ \overrightarrow{\widehat{\theta}} = \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}}$$

Démonstration en complément pour formateur.

$$\boxed{\overrightarrow{\hat{\theta}} \text{ est Gaussien}}$$

$$\Updownarrow$$

1. $\widehat{\theta_1}; \widehat{\theta_2} \cdots \widehat{\theta_n}$ suivent tous des lois normales,

2. toutes les combinaisons linéaires des θ_i suivent des lois normales.

Propriété dérivant par linéarité de la normalité et de l'indépendance des ε_i.

$$\text{contrastes} = \text{combinaisons linéaires des } \theta_i$$

Parmis les estimateurs non biaisés de $\overrightarrow{\theta}$,

$\overrightarrow{\hat{\theta}}$, estimateur des moindres carrés, est le meilleur

$$\Updownarrow$$

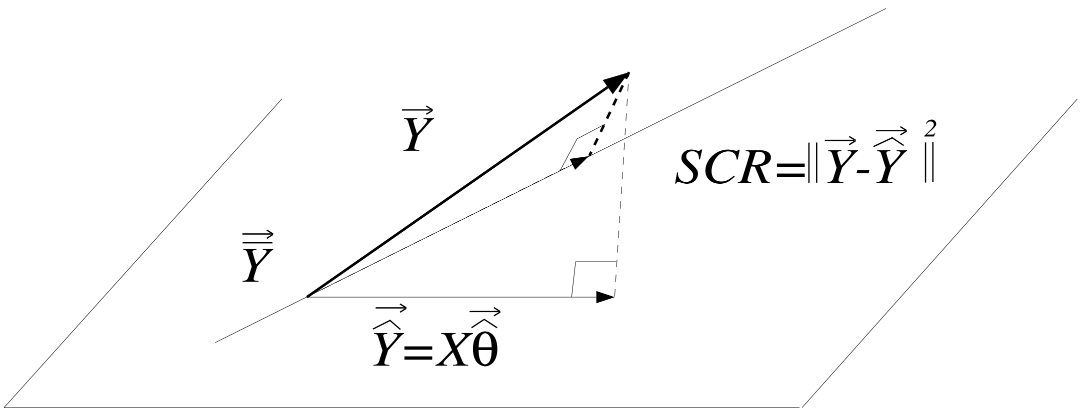
de variance minimale.

signifie:
si $\tilde{\theta}$ est un autre estimateur linéaire sans biais de θ

$var\,\overrightarrow{\tilde{\theta}} \; - \; var\,\overrightarrow{\hat{\theta}}$ est une matrice définie positive.

(cf. module A J. Badia)

Somme des carrés résiduels: SCR.



$\frac{SCR}{n-p}$ est un estimateur sans biais de σ^2, variance commune des ε_i

on notera: $\frac{SCR}{n-p} = \widehat{\sigma}^2$ $\frac{SCR}{n-p}$ est aussi appelé

"carré moyen résiduel"

$\frac{SCR}{\sigma^2}$ suit une loi de χ^2 à $n-p$ degrés de liberté.

Rappel: $E(X^2_{n-p}) = n - p$

donc $E(\frac{SCR}{\sigma^2}) = n - p$

$E(\frac{CMR}{\sigma^2}) = 1$

EXERCICE
CENTRAGE DES X_i

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$\overline{X}$: moyenne des X_i

$$Y_i = \alpha + \beta\left(X_i - \overline{X}\right) + \beta\overline{X} + \varepsilon_i$$
$$Y_i = \underbrace{\left(\alpha + \beta\overline{X}\right)}_{\alpha'} + \beta\underbrace{\left(X_i - \overline{X}\right)}_{Z_i} + \varepsilon_i$$

on reprend l'exemple de la première journée.

SUITE DE L'EXERCICE

exemple: tension = f (âge)

$$\begin{aligned} 114 &= \alpha + 35\,\beta + \varepsilon_1 \\ 124 &= \alpha + 45\,\beta + \varepsilon_2 \\ 143 &= \alpha + 55\,\beta + \varepsilon_3 \\ 158 &= \alpha + 65\,\beta + \varepsilon_4 \\ 166 &= \alpha + 75\,\beta + \varepsilon_5 \end{aligned} \qquad \overline{X} = 55$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 114 = \alpha' + & (-20) & \beta + \varepsilon_1 \\ 124 = \alpha' + & (-10) & \beta + \varepsilon_2 \\ 143 = \alpha' + & 0 & \beta + \varepsilon_3 \\ 158 = \alpha' + & 10 & \beta + \varepsilon_4 \\ 166 = \alpha' + & 20 & \beta + \varepsilon_5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} Calcul\ \ de: \\ \begin{pmatrix} \widehat{\alpha'} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \text{ et } var \begin{pmatrix} \widehat{\alpha'} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \\ retour\ \ \grave{a}\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

on reprend l'exemple de la première journée.

EXERCICE

CENTRAGE DES X_i

$$\overrightarrow{\widehat{\theta}} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha'} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

et

$$var\left(\overrightarrow{\widehat{\theta}}\right) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_n \end{pmatrix} \text{ taille } (n, 2) \quad X'\colon (2, n) \quad X'X \text{ taille } (2, 2)$$

Les transparents 7 et 8 sont un support de référence: Il est souhaitable que la correction soit faite au tableau par un stagiaire.

inversion d'une matrice diagonale

=

Inversion de chaque terme de la diagonale.

SUITE DE L'EXERCICE

$$\text{calcul de } (X'X)^{-1}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ Z_1 & \cdots & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_n \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum Z_i \\ \sum Z_i & \sum Z_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & Z_i^2 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum Z_i^2} \end{pmatrix}$$

Les transparents 7 et 8 sont un support de référence: Il est souhaitable que la correction soit faite au tableau par un stagiaire.

$$\text{inversion d'une matrice diagonale}$$
$$=$$
$$\text{Inversion de chaque terme de la diagonale.}$$

EXERCICE

CENTRAGE DES X_i

$$X'Y \text{est de taille } (2,1) \qquad \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ Z_1 & \cdots & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \Sigma\, Y_i \\ \Sigma\, Z_i Y_i \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} X'Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Sigma\, Z_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma\, Y_i \\ \Sigma\, Z_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma\, Y_i}{n} \\ \frac{\Sigma\, Z_i Y_i}{\Sigma\, Z_i^2} \end{pmatrix}$$

d'où : $\widehat{\alpha'} = \dfrac{\Sigma\, Y_i}{n} = \overline{Y}$ $\qquad \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} - \beta \overline{X} = \overline{Y} - \beta \overline{X}$

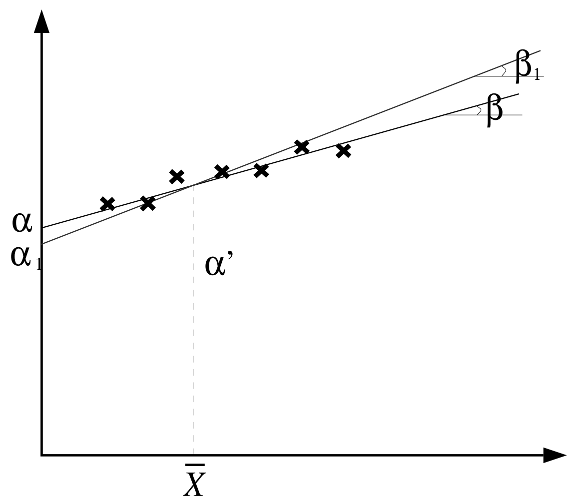
$$\widehat{\beta} = \frac{\Sigma\, Z_i Y_i}{\Sigma\, Z_i^2} = \frac{\Sigma\, (X_i - \overline{X})\, Y_i}{\Sigma\, (X_i - \overline{X})^2}$$

SUITE DE L'EXERCICE

$$var\ \overrightarrow{\hat{\theta}} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum Z_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\sum Z_i^2} \end{pmatrix}$$

Les estimateurs $\widehat{\alpha'}$ et $\widehat{\beta}$ sont indépendants.

CENTRAGE DES X_i
INTERPRETATION



1. $\widehat{\alpha'}$ représente la valeur de $\widehat{Y}$ au centre de la gamme de variation des X_i, ce qui peut avoir plus de sens que l'ordonnée à l'origine.
2. $\widehat{\alpha'}$ et $\widehat{\beta}$ sont indépendants: ceci peut être retrouvé en notant que:
   - Le centrage s'écrit $\overrightarrow{Y} = \alpha' \ \overrightarrow{\mathbf{1}} + \beta \left(\overrightarrow{Z_i}\right) + \left(\overrightarrow{\varepsilon}\right)$
     et $< 1, \left(\overrightarrow{Z_i}\right) >= 0 \qquad \overrightarrow{\mathbf{1}} \perp \left(\overrightarrow{Z_i}\right)$
   - α' et β' sont coefficients de vecteurs orthogonaux.
3. $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} - \widehat{\beta}\overline{X}$ est lié à $\widehat{\beta}$
   si $\widehat{\beta}$ est surestimé, $\widehat{\alpha}$ est sous-estimé et inversement.

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{2.}\ \text{dit autrement:}\\ \text{De même que } \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \text{ est la projection orthogo-}\\ \text{nale de } \overrightarrow{Y} \text{ sur la droite de direction } \overrightarrow{\mathbf{1}},\\ \overline{X}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \text{ est la projection orthogonale de } \overrightarrow{X} \text{ sur}\\ \text{la droite de direction } \overrightarrow{\mathbf{1}}\end{array}\right.$$

DEMONSTRATION

$$\overrightarrow{E\left(\hat{\theta}\right)} = \overrightarrow{\theta}$$

$$\overrightarrow{E\left(\hat{\theta}\right)} = E\left[\left(X'X\right)^{-1} X' \ \overrightarrow{Y}\right]$$

on démontre que: $E\left(X \ \overrightarrow{V}\right) = XE\left(\overrightarrow{V}\right)$

D'où: $\overrightarrow{E\left(\hat{\theta}\right)} = \left[\left(X'X\right)^{-1} X'\right] E\left(\overrightarrow{Y}\right)$

$$\overrightarrow{Y} = X \ \overrightarrow{\theta} + \overrightarrow{\varepsilon} \ . \ \overrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{E\left(\varepsilon\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

$$E\left(\overrightarrow{Y}\right) = E\left(X \ \overrightarrow{\theta} + \overrightarrow{\varepsilon}\right) = E\left(X \ \overrightarrow{\theta}\right) + \overrightarrow{0} = X \ \overrightarrow{\theta}$$

$$\overrightarrow{E\left(\hat{\theta}\right)} = \left[\left(X'X\right)^{-1} X'\right]\left[X \ \overrightarrow{\theta}\right] = \left[\underbrace{\left(X'X\right)^{-1}\left(X'X\right)}_{\mathrm{Id}}\right] \overrightarrow{\hat{\theta}}$$

DEMONSTRATION

$$var\ \overrightarrow{\hat{\theta}} = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

Démonstration:

on démontre que:
Soit A une matrice, $\overrightarrow{V}$ un vecteur aléatoire,

$$var\left(A\ \overrightarrow{V}\right) = A\left(var\ \overrightarrow{V}\right)A'$$

D'où:

$$\begin{aligned}
var\left(\overrightarrow{\hat{\theta}}\right) &= var\left[\left(X'X\right)^{-1}X'\ \overrightarrow{Y}\right] \\
&= var\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\ \overrightarrow{Y}\right] \\
&= \left[\left(X'X\right)^{-1}X'\right] var\ \overrightarrow{Y}\left[\left(X'X\right)^{-1}X'\right]'
\end{aligned}$$

$$var\left(\overrightarrow{Y}\right) = var\ \overrightarrow{\varepsilon} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathrm{Id}$$

SUITE DE LA DEMONSTRATION

$$var\left(\overrightarrow{Y}\right) = \sigma^2 \left[(X'X)^{-1} X'\right] \left[(X'X)^{-1} X'\right]'$$

Rappel: Soient deux matrices A et B, on a:

$$(AB)' = B'A' \text{ et } \; (A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$$

$$\begin{aligned} var\left(\overrightarrow{\hat{\theta}}\right) &= \sigma^2 \left[(X'X)^{-1} X'\right] \left[X \left[(X'X)^{-1}\right]'\right] \\ &= \sigma^2 \underbrace{\left[(X'X)^{-1} (X'X)\right]}_{\text{Id}} \quad \underbrace{\left[(X'X)'\right]}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{symétrique}}} \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$