- Modèle linéaire dans lequel interviennent facteurs qualitatifs et régresseurs (appelés covariables).

$$\begin{array}{cccc} Y_{ij} = \mu + & \alpha_i + & \underbrace{\beta\,(X_{ij} - X_{..})} & +\varepsilon_{ij} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{reponse} & \text{effet du} & \text{effet de la} & \text{erreur} \\ & \text{facteur} & \text{covariable} & \end{array}$$

- *Objectif:*

  Tenir compte lors de l'étude de l'effet d'un facteur qualitatif sur une variable Y_{ij} de l'effet d'une variable quantitative annexe X_{ij} (dite covariable).

Pas de commentaire particulier

Exemple

Etude de l'effet de deux régimes alimentaires sur le gain de poids de porcelets.

- constitution aléatoire de deux lots de porcelets,
- en fin d'expérience mesure du gain de poids.

- Dans l'exemple présenté ici un expérimentateur souhaite comparer l'effet de deux régimes alimentaires sur le gain de poids de porcelets.

- Pour cela il constitue par tirage aléatoire deux lots de porcelets. Chacun de ces lots est soumis à un des deux régimes. En fin d'expérience il mesure le gain de poids Y_{ij} de chaque animal.

Modèle d'analyse de variance

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

effet du regime alimentaire (α_i)

erreur (ε_{ij})

Modèle d'analyse de covariance

$$Y_{ij} = \mu + \alpha'_i + \underbrace{\beta\,(X_{ij} - X_{..})} + \varepsilon'_{ij}$$

effet du regime alimentaire (α'_i)

effet du poids initial des porcelets ($\beta\,(X_{ij} - X_{..})$)

erreur (ε'_{ij})

avec

X_{ij} : poids initial du porcelet

$X_{..}$: poids initial moyen des porcelets

β : pente de la régression entre Y_{ij} et X_{ij}

- Le modèle d'analyse de variance s'écrit $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$.
- L'expérimentateur observe par ailleurs que pour un régime donné le gain de poids Y_{ij} dépend linéairement du poids initial des porcelets X_{ij}. On va donc introduire cette variable explicative dans le modèle qui devient $Y_{ij} = \mu + \alpha'_i + \beta\left(X_{ij} - X_{..}\right) + \varepsilon'_{ij}$ avec

  X_{ij} poids initial de chaque porcelet

  $X_{..}$ poids initial moyen des porcelets

  β pente de la droite de régression entre Y_{ij} et X_{ij}
- Dans le premier modèle on testait l'égalité des α_i où pouvaient intervenir à la fois un effet du régime alimentaire et un effet du poids initial des porcelets si les poids initiaux moyens par lot n'étaient pas exactement identiques.
- Dans le deuxième modèle on teste l'égalité des α'_i, c'est-à-dire qu'on teste l'existence d'un effet spécifique du r égime alimentaire.

Intérêt

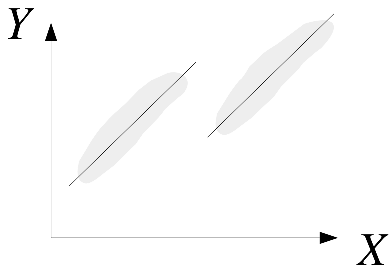
- Séparation de l'effet *spécifique* du facteur étudié (ici le régime alimentaire) de l'effet de la covariable (ici le poid initial).
- Réduction de la variance résiduelle, ce qui augmente la *puissance* du test du facteur étudié.

Condition d'utilisation

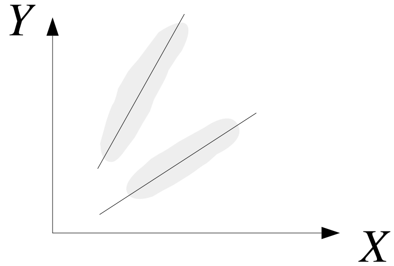
- Existance d'une liaison *linéaire* entre Y et X.
- Pas d'effet du traitement sur X.
- Pas d'interaction $X \times$ *traitement* sur la réponse Y.

Pas de commentaire particulier

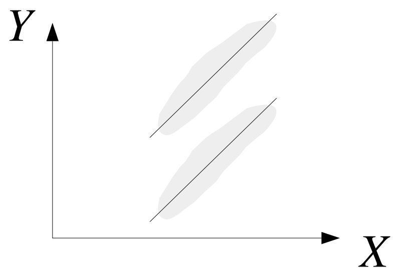
Relation entre Y et X
non linéaire
$\longrightarrow$ Eventuellement transformation de variables.



Effet du traitement sur X
$\longrightarrow$ Conclusions dangereuses.



La relation entre Y et X
dépend du traitement
$\longrightarrow$ Conclusion impossible.



Analyse de covariance
possible.

- Dans le premier cas la liaison entre Y et X n'est pas linéaire. On ne peut pas utiliser l'analyse de covariance.

- Dans le deuxième cas les valeurs de X explorées ne sont pas les mêmes pour les deux niveaux du facteur. Il y a donc un effet du traitement sur X. L'utilisation de l'analyse de covariance est dangereuse.

- Dans le troisième cas la pente de la droite entre Y et X dépend du traitement. Il y a interaction. On ne peut pas ut iliser l'analyse de covariance.

- Dans le quatrième cas on peut utiliser l'analyse de covariance.