EXERCICE
GEOMETRIE - CALCUL DE L'ESTIMATEUR

On considère la régression simple (1 régresseur) :

$$Y_i = \alpha + \beta . X_i + \varepsilon_i$$

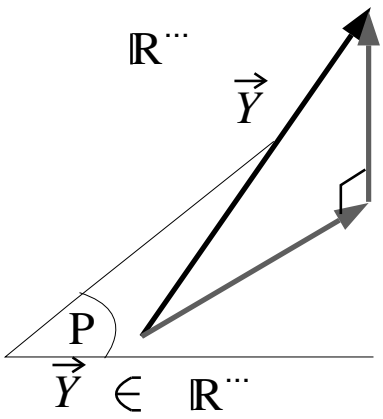
On dispose de 8 observations , $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots (X_8, Y_8)$.
Le modèle linéaire s'écrit :

$$Y = X\theta + \varepsilon$$

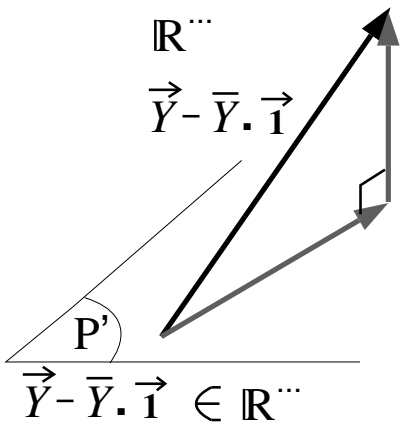
Remplir les matrices :

$$\begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{1} & \overrightarrow{X} \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

On note $\overrightarrow{1}$ et $\overrightarrow{X}$ les deux vecteurs colonnes de la matrice X.
Voici les deux représentations géométriques correspondant à la projection de $\overrightarrow{Y}$ et à la projection de $\overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\overrightarrow{1}$. *Compléter* :



P sous-e.v. de $\mathbb{R}^{\cdots}$
engendré par ...
de dimension ...



P' sous-e.v. de $\mathbb{R}^{\cdots}$
engendré par ...
de dimension ...

Compléter la table d'ANOVA (analyse de variance) correspondant à la projection de $\overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}}$ sur P'.

Source de variation	Degré de liberté	Somme des carrés
modèle		$\left\| \overrightarrow{X\hat{\theta}} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \right\|^2$
résiduelle		$\left\| \overrightarrow{\hat{\varepsilon}} \right\|^2$
totale		$\left\| \overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \right\|^2$

Quel est le degré de liberté de la variabilité expliquée par le modèle ?

Quel est le degré de liberté de la variabilité résiduelle ?

CORRIGE DE L'EXERCICE
GEOMETRIE - CALCUL DE L'ESTIMATEUR

On considère la régression simple (1 régresseur) :

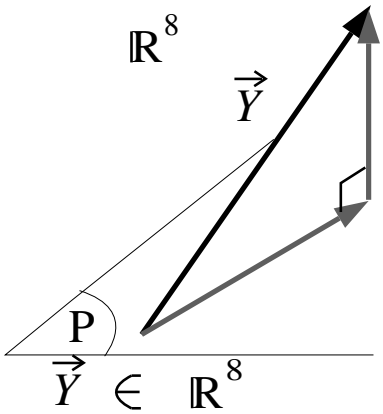
$$Y_i = \alpha + \beta . X_i + \varepsilon_i$$

On dispose de 8 observations , $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots (X_8, Y_8)$.
Le modèle linéaire s'écrit :

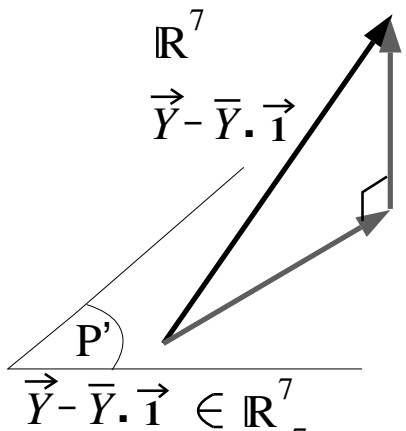
$$Y = X\theta + \varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{1}} \quad \overrightarrow{X} \\ \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \\ 1 & X_4 \\ 1 & X_5 \\ 1 & X_6 \\ 1 & X_7 \\ 1 & X_8 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \end{pmatrix}$$

On note $\overrightarrow{\mathbf{1}}$ et $\overrightarrow{X}$ les deux vecteurs colonnes de la matrice X.
Voici les deux représentations géométriques correspondant à la projection de $\overrightarrow{Y}$ et à la projection de $\overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\overrightarrow{\mathbf{1}}$



P sous-e.v. de $\mathbb{R}^8$ engendré par $\overrightarrow{\mathbf{1}}, \overrightarrow{X}$ de dimension 2



P' sous-e.v. de $\mathbb{R}^7$ engendré par $\overrightarrow{X}$ de dimension 1

Compléter la table d'ANOVA (analyse de variance) correspondant à la projection de $\overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}}$ sur P'.

Source de variation	Degré de liberté	Somme des carrés
modèle	1	$\left\| \overrightarrow{X\hat{\theta}} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \right\|^2$
résiduelle	6	$\left\| \overrightarrow{\hat{\varepsilon}} \right\|^2$
totale	7	$\left\| \overrightarrow{Y} - \overline{Y}.\ \overrightarrow{\mathbf{1}} \right\|^2$

Quel est le degré de liberté de la variabilité expliquée par le modèle ? 1

Quel est le degré de liberté de la variabilité résiduelle ? 6