

Les tests d'hypothèses

La question que l'on se pose est du type :

Le paramètre calculé sur une population est-il égal ou non, est-il supérieur ou non à une valeur connue (fixée) *a priori*?

1^{ère} démarche :

à partir de l'I.C. du paramètre inconnu

2^{ème} démarche :

directe sans passer par l'I.C.

Les tests d'hypothèses

Plan proposé

3.1 Introduction des principales notions sur l'exemple du signe

3.1.1 Du test du signe à l'erreur de décision

3.1.2 Du test bilatéral au test unilatéral

3.1.3 Test du signe, méthode directe

3.1.4 Démarche générale et vocabulaire

3.2 Les différents tests

3.2.0 Introduction

3.2.1 Test de Wilcoxon

3.2.2 Test de Student

3.3 P-value

3.4 Bilan sur les tests

TEST DU SIGNE

INRA Antibes

Âge élevé à Antibes?

Tirage 13-échantillon à Antibes :

\Rightarrow 48 41 33 60 58 27 48 40 43 32 57 51 45

Réordonné :

\Rightarrow 27 32 33 40 41 43 45 48 48 51 57 58 60

I.C. de la médiane m_A ?

FPSTAT 2 – La décision statistique. 3. Tests d'hypothèses. 3

Institut National de la Recherche Agronomique

I.C. DE LA MÉDIANE m_A

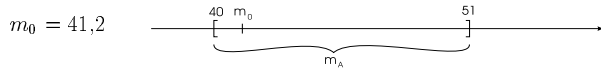
Fixer $\gamma = 0,90$ (niveau de confiance)

TABLE 2.3 $\Rightarrow c = 4$

27 32 33 [40 41 43 45 48 48 51] 57 58 60

I.C. = [40 ; 51]

$\Pr\{[X_{(4)}, X^{(4)}] \ni m_A\} = 0,908$



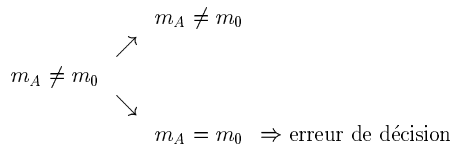
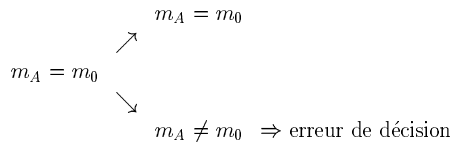
Conclusion ?

FPSTAT 2 – La décision statistique. 3. Tests d'hypothèses. 4

Institut National de la Recherche Agronomique

On a décidé $m_A = m_0$: **DÉCISION CORRECTE ?**

Décision: Réalité:



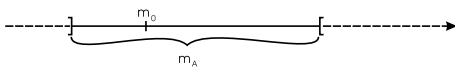
TEST BILATÉRAL, TEST UNILATÉRAL

2 hypothèses :

$$m_A = m_0$$

$$m_A \neq m_0 \iff \underbrace{m_A < m_0 \text{ ou } m_A > m_0}_{\text{alternative bilatérale}}$$

\implies **Test bilatéral**



On suppose que si $m_A \neq m_0$, c'est $m_A > m_0$.

On exclut la possibilité $m_A < m_0$,

avant le recueil des données.

$$m_A = m_0$$

$$m_A > m_0 \implies \text{alternative unilatérale}$$

\implies **Test unilatéral.**

TEST UNILATÉRAL

$$m_A = m_0$$

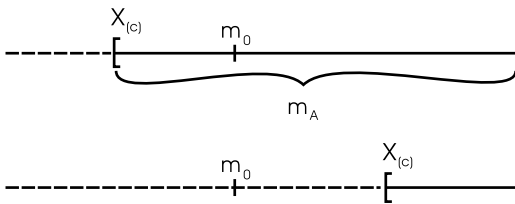
$m_A > m_0 \implies$ alternative unilatérale.

Règle de décision :

si m_0 en dessous de l'I.C. de $m_A \implies$ rejet.

$$\implies \text{I.C.} = [X_{(c)} ; +\infty[$$

I.C. unilatéral.



TEST DU SIGNE : MÉTHODE DIRECTE

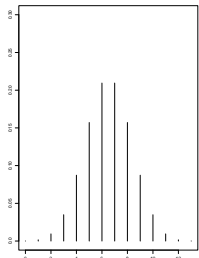
2 hypothèses (cas unilatéral)

$$m_A = m_0$$

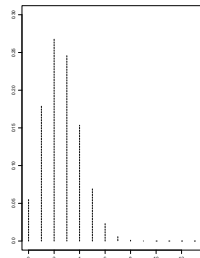
$$m_A > m_0$$

On définit :

Y_0 = nombre de valeurs $< m_0$ (statistique).



Loi de Y_0 si $m_A = m_0$



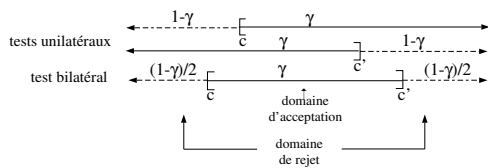
Loi de Y_0 si $m_A > m_0$

Si $m_A = m_0$ loi de Y_0 : $B(n, 1/2)$

Si $m_A > m_0$ loi de Y_0 : $B(n, p)$ $p = ? (< 1/2)$

Démarche et vocabulaire

- Loi de Y_o connue sous l'hypothèse $m_A = m_o$
- \Rightarrow on peut calculer, sous l'hypothèse $m_A = m_o$ et pour un niveau de signification γ , les valeurs critiques c et c' , délimitant le domaine de rejet et son complément, le domaine d'acceptation :



- Si $Y_o < c$ ou $Y_o > c'$ \Rightarrow hypothèse nulle H_0 :

$m_A = m_o$ improbable

\Rightarrow on la rejette, et on accepte l'hypothèse alternative H_1 :

$m_A \neq m_o$ (test bilatéral)

ou $m_A > m_o$ } (test unilatéral)
ou $m_A < m_o$ }

- Analogie à un raisonnement par l'absurde : on cherche à montrer l'improbabilité de l'hypothèse nulle H_0 pour pouvoir la rejeter et proposer l'hypothèse alternative H_1 , qui est plus intéressante.

Vocabulaire

$H_0 : m_A = m_o$

$H_1 : m_A > m_o$

(test unilatéral)

test statistique \Leftrightarrow règle de décision

		La vraie valeur inconnue est m_A :	
		$m_A = m_o$	$m_A > m_o$
Décision	$m_A = m_o$ (H_0)	pas d'erreur	erreur de 2 ^e espèce
	$m_A > m_o$ (H_1)	erreur de 1 ^{ère} espèce	pas d'erreur

Exercice

- Un suspect est accusé de meurtre
- On ignore s'il est coupable ou innocent
- Jury décide coupable
ou
innocent

Réalité

H_0 : le suspect est innocent

H_1 : le suspect est coupable

		réalité	
		innocent H_0	coupable H_1
décision	relaxé H_0	OK	erreur de 2 ^{ème} espèce
	condamné H_1	erreur de 1 ^{ère} espèce	OK

erreur de 1^{ère} espèce : décider coupable à tort
rejeter H_0 à tort
il faut limiter cette erreur

erreur de 2^{ème} espèce : relaxer un coupable

**COMMENT PRECISER LA VALEUR
D'UN TEST?**

⇒ Etudier les risques d'erreur :

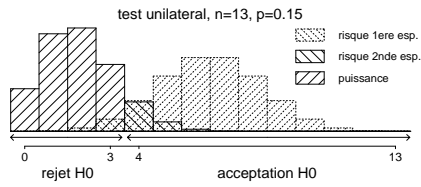
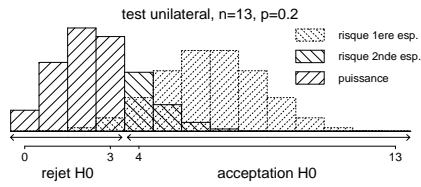
$Pr \{ \text{erreur de 1^{ère} espèce} \} = \text{risque de 1^{ère} espèce} = \alpha$

$Pr \{ \text{erreur de 2^{ème} espèce} \} = \text{risque de 2^{ème} espèce} = \beta$

		Etat de la nature :	
		$H_0 : m_A = m_0$	$H_1 : m_A \neq m_0$
Décision	H_0 $m_A = m_0$ $Y_o \in [c, c']$	γ	? β ? = $Pr_{m_A} \{ [X_{(4)}; X^{(4)}] \ni m_0 \}$ risque de 2 ^e espèce
	H_1 $m_A \neq m_0$ $Y_o \notin [c, c']$	$\alpha = 1 - \gamma$ risque de 1 ^{ère} espèce	? $1 - \beta$? puissance du test

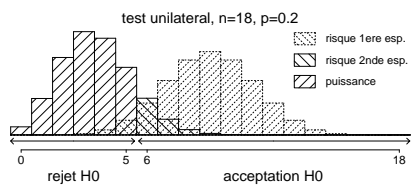
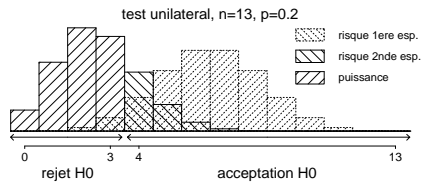
Etat de la nature : *inconnu*, mais : Décision : *connue*.

Puissance d'un test



▷ $1 - \beta = \text{puissance}$ dépend de m_o

▷ plus la différence entre m_A et m_o est grande plus la puissance (capacité à détecter une différence) sera grande.



Effet de la taille de l'échantillon sur la puissance de test

Précisions sur :

une statistique

un test statistique

une statistique = une variable aléatoire que l'on peut calculer sur l'échantillon.

un test statistique = une règle de décision pour accepter ou rejeter l'hypothèse nulle.

**APPROCHE GENERALE D'UN TEST
STATISTIQUE**

Statistique



Distribution de cette statistique

sous H_0



Test statistique

Les différents tests sur un échantillon

On teste: $H_0 : m_A = m_o$

Test du signe

postulat : indépendance

statistique: $Y_o =$ nbre de valeurs $< m_o$

distribution sous $H_0 : B(n, 1/2)$

Test de Wilcoxon (= test de rang)

postulats : indépendance, symétrie

statistique: $Y_z^o =$ nb de $\frac{X_i + X_j}{2} < m_o$

distribution/ $H_0 \rightarrow$ table

Test de Student

postulats : indépendance, gaussienne

statistique: $\frac{\bar{X} - m_o}{s/\sqrt{n}}$

distribution/ H_0 : de Student

+ il y a de postulat, + puissance test est grande

Test du signe unilatéral, méthode directe

Exercice : âge des agents d'Antibes

13-Echantillon : 27, 32, 33, 40, 43, 44, 45, 48, 48, 51, 57, 58, 60

Médiane de l'INRA (m_o) : 41,2

$Y_o =$ nombre d'agents de l'échantillon ayant un âge inférieur

à 41,2 =

Valeur critique pour $\alpha' \simeq 0,05$? (table)

Conclusion

		Etat de la nature	
		$m_A = m_o$	$m_A > m_o$
Décision	$H_0 : "m_A = m_o"$ $Y_o > c$	$\gamma' = 1 - \alpha'$ =	$\beta?$
	$H_1 : "m_A > m_o"$ $Y_o \leq c$	$\alpha' < 0,05$ = (table)	$1 - \beta?$

TEST DE WILCOXON

Rappel:

$$H_0 : m_A = m_0$$

$$H_1 : m_A \neq m_0$$

$$\text{Statistique } Y_Z^0 = \left(\text{nombre de } \frac{X_i + X_j}{2} < m_0 \right)$$

Si $[c ; n - c + 1] \ni Y_Z^0$, H_0 acceptée,

si $[c ; n - c + 1] \not\ni Y_Z^0$, H_0 rejetée.

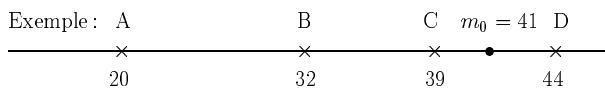
TEST DE WICOXON DIRECT : SOMME DES RANGS

Autre façon de calculer Y_Z^0 :

→ $X_i - m_0$,

→ rang de $|X_i - m_0|$,

→ somme des rangs des différences négatives.



	A	B	C	D
X_i	20	32	39	44
$X_i - m_0$	-21	-9	-2	3
rang de $ X_i - m_0 $	4	3	1	2
signe de $(X_i - m_0)$	-	-	-	+

$$Y_Z^0 = 4 + 3 + 1 = 8 = \left(\text{nombre de } \frac{X_i + X_j}{2} < m_0 \right)$$

Exercice

X_i	$X_i - m_0$	rang de $ X_i - m_0 $	signe de $X_i - m_0$
27			
32			
33			
40			
41			
43			
45			
48			
48			
51			
57			
58			
60			

- $n =$
- définition de la statistique de test Y_0^Z :
- région de rejet :
- valeur de Y_0^Z
- conclusion :

FPSTAT 2 – La décision statistique. 3. Tests d'hypothèses. 21

Institut National de la Recherche Agronomique

TEST DE STUDENT

$\mu_0 = 42$: moyenne INRA.

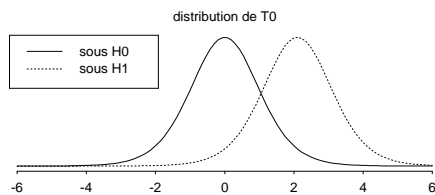
μ_A (inconnue) = moyenne d'Antibes.

$$H_0 : \mu_A = \mu_0$$

$$H_1 : \mu_A > \mu_0$$

$$\text{Statistique : } T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 42}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

Sous H_0 , $T_0 \sim t_{n-1}$. Sous H_1 , $T_0 \sim$ loi décalée à droite.



Règle de décision : si $T_0 \leq t_c \implies H_0$.

FPSTAT 2 – La décision statistique. 3. Tests d'hypothèses. 22

Institut National de la Recherche Agronomique

TEST DE STUDENT UNILATERAL

Test unilatéral :

$$H_0 : \mu_A = \mu_0$$

$$H_1 : \mu_A > \mu_0$$

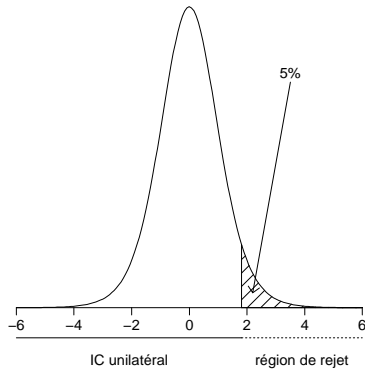
Rejet si T_0 trop grand.

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 42}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

Réalité :

	H_0	H_1
H_0	$\gamma = 1 - \alpha$	β
H_1	α	$1 - \beta$

Décision :



TEST DE STUDENT BILATERAL

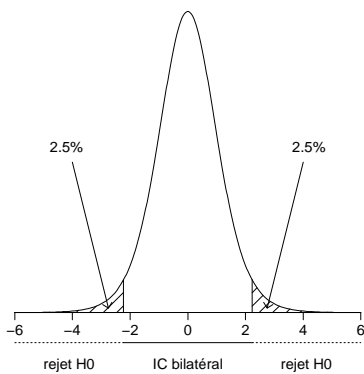
Test bilatéral :

$$H_0 : \mu_A = \mu_0$$

$$H_1 : \mu_A \neq \mu_0$$

Rejet si T_0 trop petit ou trop grand.

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 42}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$



NIVEAU DESCRIPTIF ou P-VARIABLE

PRINCIPE DU TEST

Problème :

La moyenne d'âge des agents d'Antibes est-elle supérieure ou égale à celle de l'ensemble de la population INRA ?

Identifier :

- la population,
- la variable d'intérêt,
- le paramètre.

Préciser :

- la distribution *a priori*,
- les hypothèses H_0 et H_1 .

choix de la statistique

choix du niveau de confiance

domaine de rejet \longleftrightarrow valeur critique

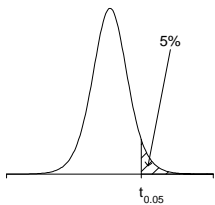
NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE

REGLE DE DECISION

Soit un 13-échantillon de la population des agents d'Antibes.

Extrait de la table de Student (12 ddl).

Probabilité de l'extrémité de la loi	Valeur critique
0,5	0,0
0,25	0,69
0,10	1,36
0,05	1,78
α'	$t_{\alpha'}$
P'_{T_0}	T_0

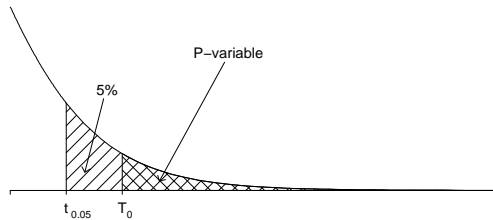


Si $T_0 > t_{\alpha'}$, H_0 est rejetée.

\Updownarrow

Si $P'_{T_0} < \alpha'$, H_0 est rejetée.

NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE
DEFINITION DE LA P-VARIABLE



$$P'_{T_0} = 1 - F_0(T_0)$$

Règle: si $P'_{T_0} < \alpha'$, on rejette H_0 ,
si $P'_{T_0} > \alpha'$, on ne rejette pas H_0 .

P'_{T_0} est une statistique descriptive



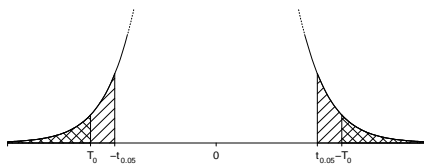
qui **ne doit pas** être utilisée pour
choisir le risque d'erreur *a posteriori*!

NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE
CAS BILATERAL

Problème :

L'âge moyen des agents de Montpellier est-il différent de celui de l'ensemble des agents?

$$H_0 : m_M = m_o \text{ contre } H_1 : m_M \neq m_o$$



$$\text{Si } T_0 < 0, \quad P_{T_0} = F_0(T_0) + [1 - F_0(-T_0)]$$

$$\text{Si } T_0 > 0, \quad P_{T_0} = [1 - F_0(T_0)] + F_0(-T_0)$$

$$\forall T_0, \quad P_{T_0} = F_0(-|T_0|) + [1 - F_0(|T_0|)]$$

BILAN SUR LES TESTS

*Identifier

- la population,
- la variable d'étude,
- le paramètre de la loi à étudier

*Préciser

- la distribution *a priori* de la variable,
- les hypothèses H_0 et H_1

*Choisir une **statistique** S :

de loi
connue
sous H_0

dont la forme de
la loi est souvent
connue sous H_1

BILAN SUR LES TESTS (suite et fin)

* Choisir un **niveau de confiance** γ (\Leftrightarrow choisir un risque $\alpha = 1 - \gamma$).

↓

* Définir le **domaine de rejet** de H_0 .

↓

* Calculer la **valeur critique** s_α ,
pour un échantillon de taille n .

* Obtenir un n -**échantillon** de mesures.

* Calculer la statistique S sur les mesures de cet échantillon.

si $S > s_\alpha$

↓

rejet de H_0

si $S < s_\alpha$

↓

non rejet de H_0