Les tests d'hypothèses

La question que l'on se pose est du type :

Le paramètre calculé sur une population est-il égal ou non, est-il supérieur ou non à une valeur connue (fixée) *a priori*?

1*ère* démarche :

à partir de l'I.C. du paramètre inconnu

2*ème* démarche :

directe sans passer par l'I.C.

Les tests d'hypothèses

Plan proposé

TEST DU SIGNE

INRA Antibes

Âge élevé à Antibes?

Tirage 13-échantillon à Antibes :

$\Longrightarrow$ 48 41 33 60 58 27 48 40 43 32 57 51 45

Réordonné :

$\Longrightarrow$ 27 32 33 40 41 43 45 48 48 51 57 58 60

I.C. de la médiane m_A?

I.C. DE LA MÉDIANE m_A

Fixer $\gamma = 0{,}90$ (niveau de confiance)

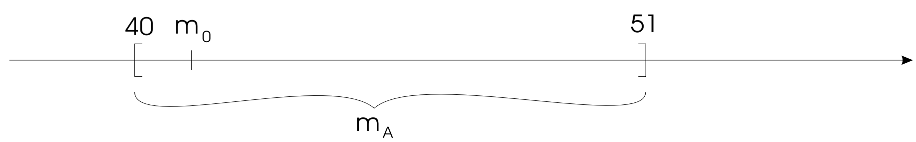
TABLE 2.3 $\Rightarrow c = 4$

27 32 33 [40 41 43 45 48 48 51] 57 58 60

I.C. $= [40\,;\,51]$

$$\Pr\{[X_{(4)}, X^{(4)}] \ni m_A\} = 0{,}908$$

$m_0 = 41{,}2$



Conclusion ?

On a décidé $m_A = m_0$: **DÉCISION CORRECTE ?**

Décision : Réalité :

$$
\begin{array}{lcl}
 & & m_A = m_0 \\
 & \nearrow & \\
m_A = m_0 & & \\
 & \searrow & \\
 & & m_A \neq m_0 \ \Rightarrow \text{erreur de décision}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
 & & m_A \neq m_0 \\
 & \nearrow & \\
m_A \neq m_0 & & \\
 & \searrow & \\
 & & m_A = m_0 \ \Rightarrow \text{erreur de décision}
\end{array}
$$

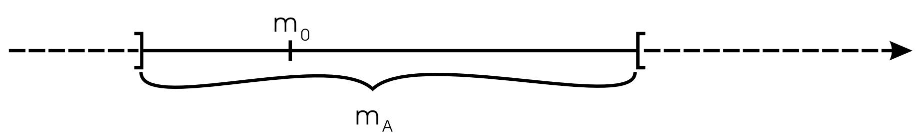
TEST BILATÉRAL, TEST UNILATÉRAL

2 hypothèses :

$m_A = m_0$

$$m_A \neq m_0 \Longleftrightarrow \underbrace{m_A < m_0 \;\text{ ou }\; m_A > m_0}_{\text{alternative bilatérale}}$$

$\Longrightarrow$ **Test bilatéral**



On suppose que si $m_A \neq m_0$, c'est $m_A > m_0$.

On exclut la possibilité $m_A < m_0$,

<u>**avant le recueil des données**</u>.

$m_A = m_0$

$m_A > m_0 \Longrightarrow$ alternative unilatérale

$\Longrightarrow$ **Test unilatéral**.

TEST UNILATÉRAL

$m_A = m_0$

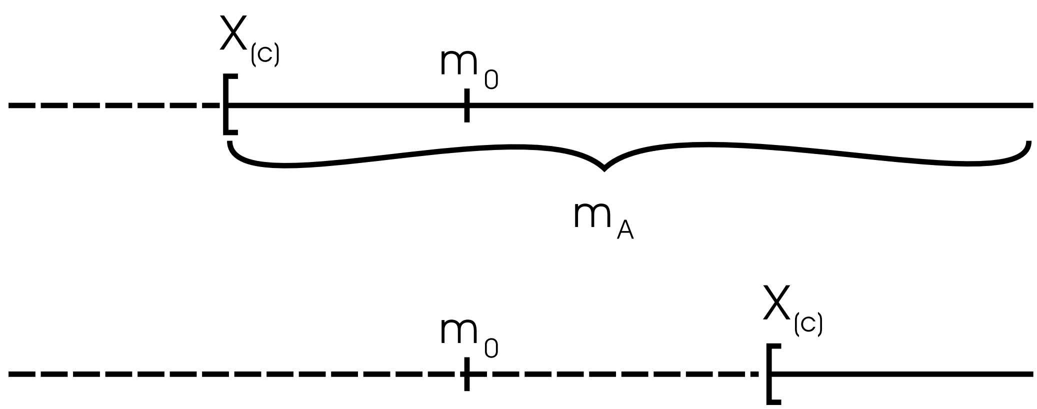
$m_A > m_0 \Longrightarrow$ alternative unilatérale.

Règle de décision :

si m_0 en dessous de l'I.C. de $m_A \Longrightarrow$ rejet.

$\Longrightarrow$ I.C. $= [X_{(c)}\ ;\ +\infty[$

I.C. unilatéral.



TEST DU SIGNE : MÉTHODE DIRECTE

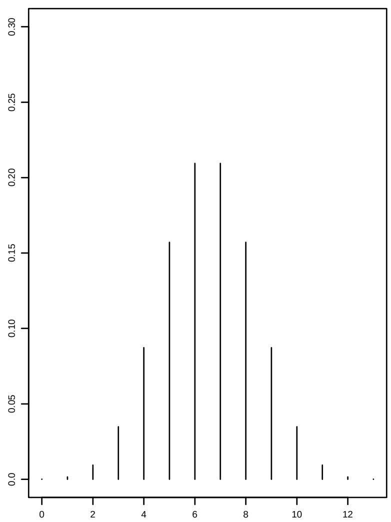
2 hypothèses (cas unilatéral)

$m_A = m_0$

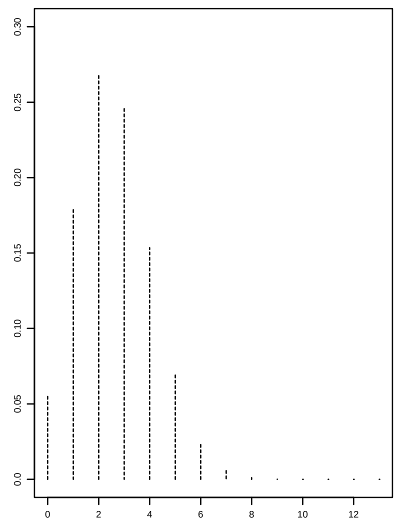
$m_A > m_0$

On définit :

Y_0 = nombre de valeurs $< m_0$ (statistique).



Loi de Y_o si $m_A = m_0$



Loi de Y_o si $m_A > m_0$

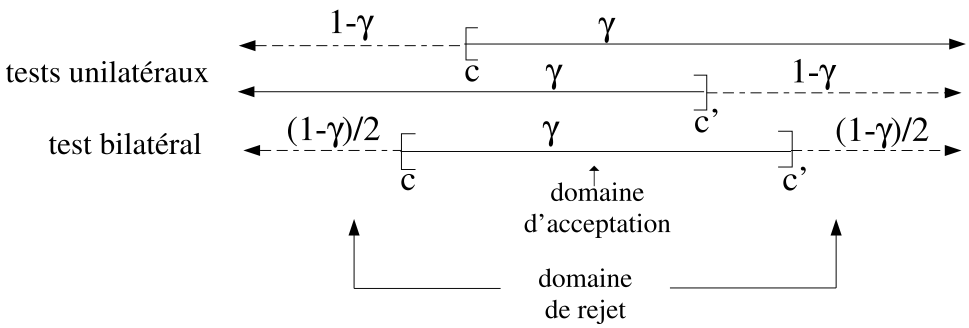
Si $m_A = m_o$ loi de Y_o : $B(n, 1/2)$

Si $m_A > m_o$ loi de Y_o : B (n,p) p =? ($< 1/2$)

Démarche et vocabulaire

- Loi de Y_o connue sous l'hypothèse $m_A = m_o$

- $\Longrightarrow$ on peut calculer, sous l'hypothèse $m_A = m_o$ et pour un niveau de signification γ, les valeurs critiques c et c', délimitant le domaine de rejet et son complément, le domaine d'acceptation :



- Si $Y_o < c$ ou $Y_o > c'$ $\Longrightarrow$ hypothèse nulle H_0 :

$m_A = m_o$ improbable

$\Longrightarrow$ on la rejette, et on accepte l'hypothèse alternative H_1 :

$m_A \neq m_o$ (test bilatéral)

$\left.\begin{array}{l}\text{ou } m_A > m_o \\ \text{ou } m_A < m_o\end{array}\right\}$ (test unilatéral)

- Analogue à un raisonnement par l'absurde : on cherche à montrer l'improbabilité de l'hypothèse nulle H_0 pour pouvoir la rejeter et proposer l'hypothèse alternative H_1, qui est plus intéressante.

Vocabulaire

$$H_0 : m_A = m_o$$

$$H_1 : m_A > m_o$$

(test unilatéral)

test statistique $\Longleftrightarrow$ règle de décision

		La vraie valeur inconnue est m_A : $m_A = m_0$	$m_A > m_0$
Décision	$m_A = m_0$ (H_0)	pas d'erreur	erreur de 2è espèce
	$m_A > m_0$ (H_1)	erreur de 1$ère$ espèce	pas d'erreur

Exercice

- Un suspect est accusé de meurtre
- On ignore s'il est coupable ou innocent
- Jury $\xrightarrow{\text{décide}}$ coupable ou innocent

Réalité

H_0 : le suspect est innocent

H_1 : le suspect est coupable

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">réalité</td></tr>
<tr><td>innocent H_0</td><td>coupable H_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">décision</td><td>relaxé H_0</td><td>OK</td><td>erreur de $2ème$ espèce</td></tr>
<tr><td>condamné H_1</td><td>erreur de $1ère$ espèce</td><td>OK</td></tr>
</table>

erreur de $1ère$ espèce : décider coupable à tort
rejeter H_0 à tort
il faut limiter cette erreur

erreur de $2ème$ espèce : relaxer un coupable

COMMENT PRECISER LA VALEUR D'UN TEST ?

$\Longrightarrow$ Etudier les risques d'erreur :

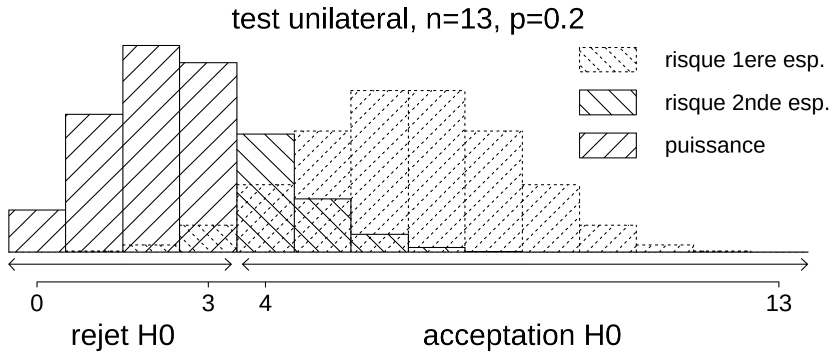
Pr { erreur de 1$ère$ espèce} = risque de 1$ère$ espèce = α

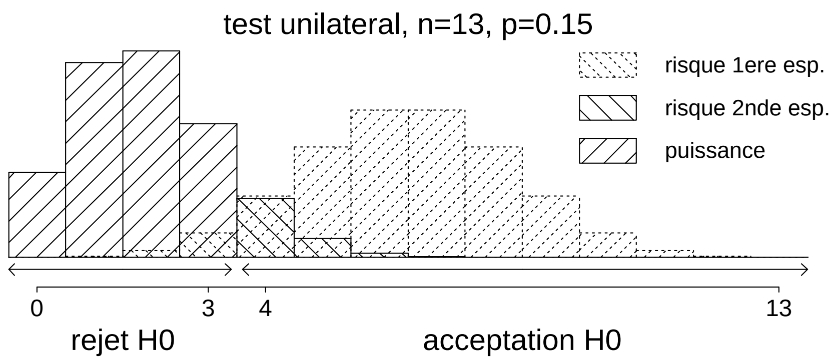
Pr { erreur de 2$ème$ espèce} = risque de 2$ème$ espèce = β

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Etat de la nature :</td></tr>
<tr><td>$H_0 : m_A = m_0$</td><td>$H_1 : m_A \neq m_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Décision</td><td>H_0
$m_A = m_0$
$Y_o \in [c, c']$</td><td>γ</td><td>? β ? =
$Pr_{m_A}\{[X_{(4)}; X^{(4)}] \ni m_0\}$
risque de 2^e espèce</td></tr>
<tr><td>H_1
$m_A \neq m_0$
$Y_o \notin [c, c']$</td><td>$\alpha = 1 - \gamma$
risque de
1$ère$ espèce</td><td>? $1 - \beta$?
puissance du test</td></tr>
</table>

Etat de la nature : *inconnu*, mais : ...... Décision : *connue*.

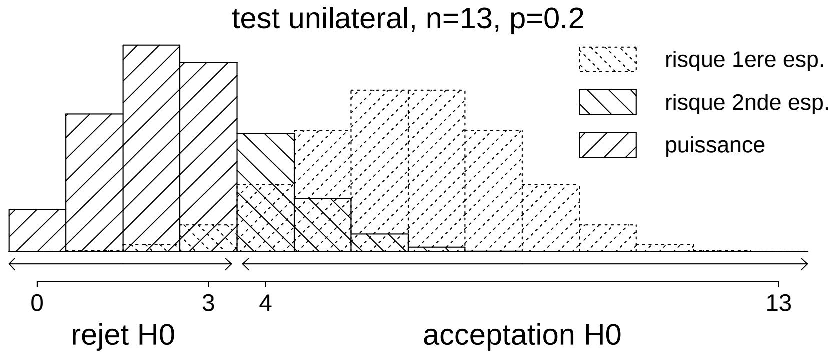
Puissance d'un test

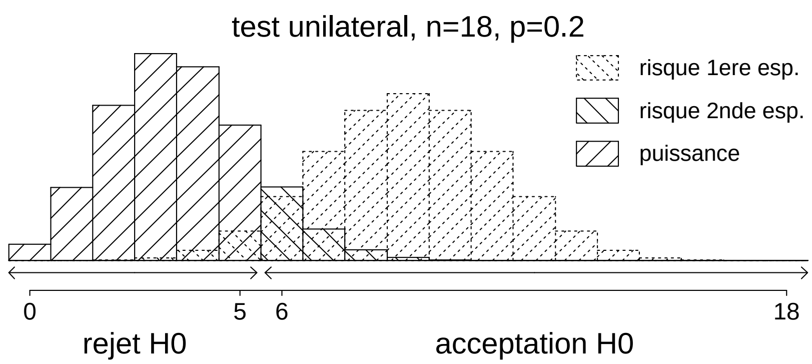




▷ $1 - \beta =$ puissance dépend de m_o

▷ plus la différence entre m_A et m_o est grande plus la puissance (capacité à détecter une différence) sera grande.





Effet de la taille de l'échantillon sur la puissance de test

Précisions sur :

une statistique

un test statistique

une statistique = une variable aléatoire que l'on peut calculer sur l'échantillon.

un test statistique = une règle de décision pour accepter ou rejeter l'hypothèse nulle.

APPROCHE GENERALE D'UN TEST STATISTIQUE

Statistique

$\downarrow$

Distribution de cette statistique

sous H_0

$\downarrow$

Test statistique

Les différents tests sur un échantillon

On teste : $H_0 : m_A = m_o$

<u>Test du signe</u>

postulat : indépendance

statistique : Y_o= nbre de valeurs $< m_o$

distribution sous $H_0 : B(n, 1/2)$

<u>Test de Wilcoxon</u> (= test de rang)

postulats : indépendance, symétrie

statistique : Y_z^o = nb de $\frac{X_i+X_j}{2} < m_o$

distribution/$H_0 \rightarrow$ table

<u>Test de Student</u>

postulats : indépendance, gaussienne

statistique : $\frac{\bar{X}-m_o}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$

distribution/H_0 : de Student

+ il y a de postulat, + puissance test est grande

Test du signe unilatéral, méthode directe
Exercice : âge des agents d'Antibes

13-Echantillon : 27, 32, 33, 40, 43, 44, 45, 48, 48, 51, 57, 58, 60

Médiane de l'INRA (m_o) : 41,2

Y_O = nombre d'agents de l'échantillon ayant un âge inférieur

à $41,2 =$

Valeur critique pour $\alpha' \simeq 0,05$? (table)

Conclusion

		Etat de la nature	
		$m_A = m_o$	$m_A > m_o$
Décision	H_0 : "$m_A = m_0$" $Y_o > c$	$\gamma' = 1 - \alpha'$ $=$	β ?
	H_1 : "$m_A > m_o$" $Y_o \leq c$	$\alpha' < 0,05$ $=$ (table)	$1 - \beta$?

TEST DE WILCOXON

Rappel :

$H_0 : m_A = m_0$

$H_1 : m_A \neq m_0$

$$\boxed{\text{Statistique } Y_Z^0 = \left(\text{nombre de } \frac{X_i + X_j}{2} \; < \; m_0\right)}$$

Si $[c \; ; \; n - c + 1] \ni Y_Z^0$, H_0 acceptée,

si $[c \; ; \; n - c + 1] \not\ni \; Y_Z^0$, H_0 rejetée.

TEST DE WICOXON DIRECT : SOMME DES RANGS

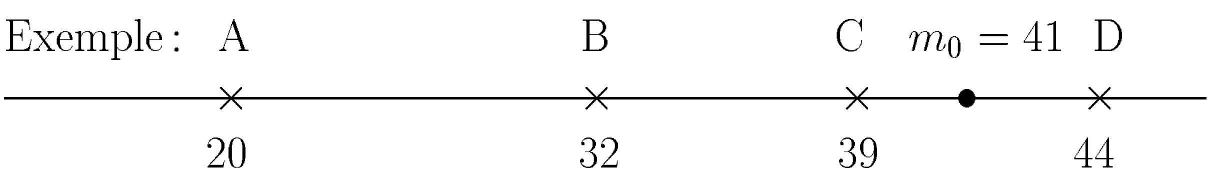
Autre façon de calculer Y_Z^0 :

$\rightarrow X_i - m_0$,

$\rightarrow$ rang de $|X_i - m_0|$,

$\rightarrow$ somme des rangs des différences négatives.

Exemple :



	A	B	C	D
X_i	20	32	39	44
$X_i - m_0$	-21	-9	-2	3
rang de $\|X_i - m_0\|$	4	3	1	2
signe de $(X_i - m_0)$	$-$	$-$	$-$	$+$

$$Y_Z^0 = 4 + 3 + 1 = 8 = \left(\text{nombre de } \frac{X_i + X_j}{2} < m_0\right)$$

Exercice

X_i	$X_i - m_0$	rang de $\lvert X_i - m_0 \rvert$	signe de $X_i - m_0$
27			
32			
33			
40			
41			
43			
45			
48			
48			
51			
57			
58			
60			

- $n =$
- définition de la statistique de test Y_0^Z :
- région de rejet :
- valeur de Y_0^Z
- conclusion :

TEST DE STUDENT

$\mu_0 = 42$: moyenne INRA.

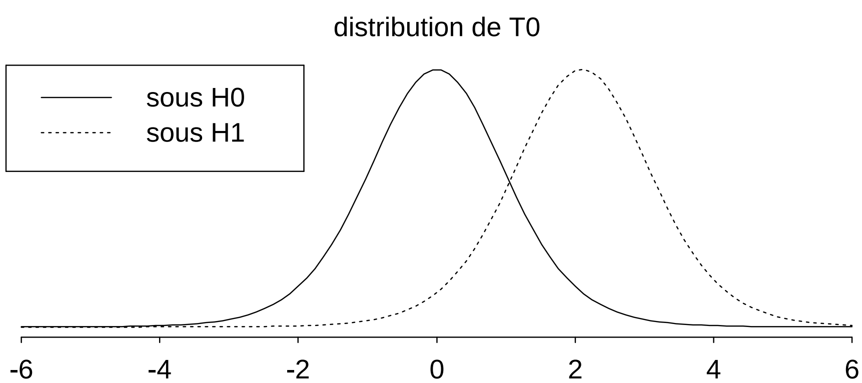
μ_A (inconnue) = moyenne d'Antibes.

$H_0 : \mu_A = \mu_0$

$H_1 : \mu_A > \mu_0$

$$\text{Statistique} : T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 42}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

Sous $H_0, T_0 \sim t_{n-1}$. Sous $H_1, T_0 \sim$ loi décalée à droite.



$$\text{Règle de décision} : \text{si } T_0 \leq t_c \Longrightarrow H_0.$$

TEST DE STUDENT UNILATERAL

Test unilatéral :

$H_0 : \mu_A = \mu_0$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_O}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 42}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

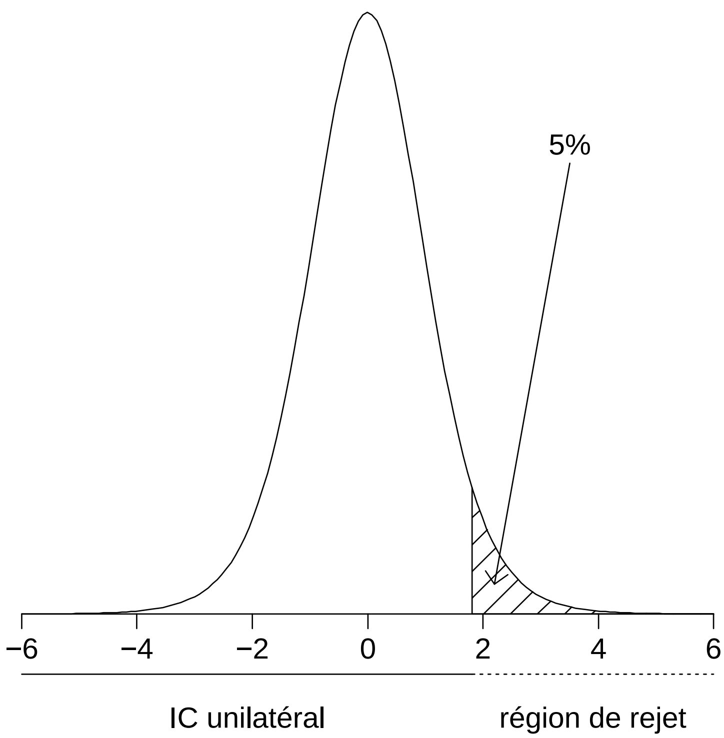
$H_1 : \mu_A > \mu_0$

Rejet si T_0 trop grand.

Réalité :

Décision :

	H_0	H_1
H_0	$\gamma = 1 - \alpha$	β
H_1	α	$1 - \beta$



TEST DE STUDENT BILATERAL

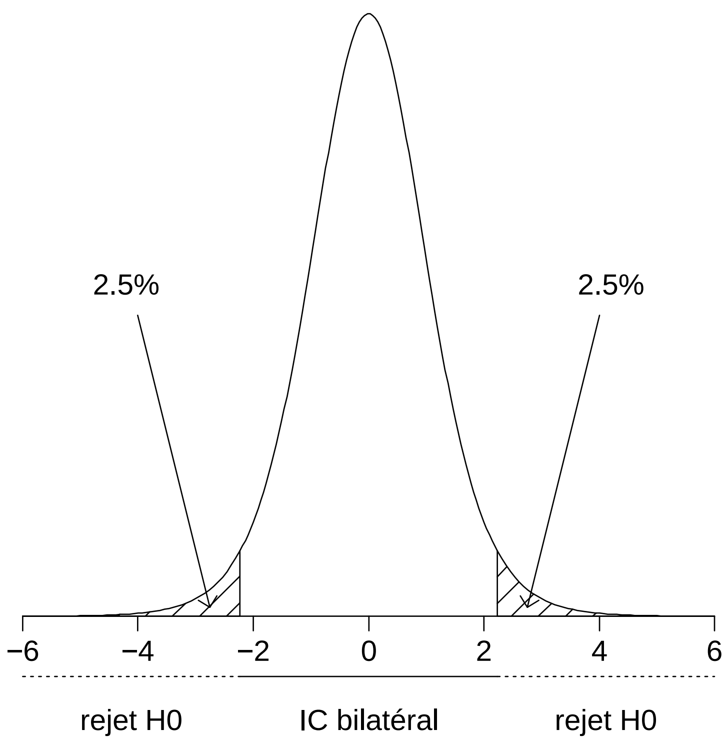
Test bilatéral :

$H_0 : \mu_A = \mu_0$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_O}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 42}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_0$

Rejet si T_0 trop petit ou trop grand.



NIVEAU DESCRIPTIF ou P-VARIABLE

PRINCIPE DU TEST

Problème :

La moyenne d'âge des agents d'Antibes est-elle supérieure ou égale à celle de l'ensemble de la population INRA ?

Identifier :
- la population,
- la variable d'intérêt,
- le paramètre.

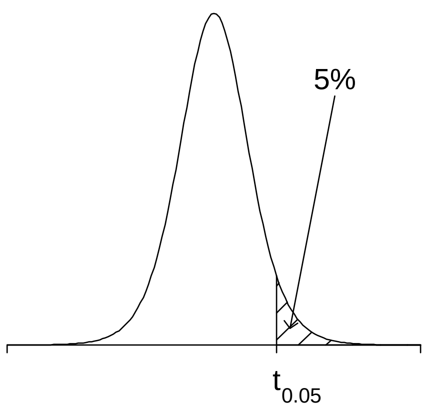
Préciser :
- la distribution *a priori*,
- les hypothèses H_0 et H_1.

$$\underbrace{\boxed{\text{choix de la statistique}} \qquad \boxed{\text{choix du niveau de confiance}}}$$

domaine de rejet $\longleftrightarrow$ valeur critique

NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE
REGLE DE DECISION

Soit un 13-échantillon de la population des agents d'Antibes.



Extrait de la table de Student (12 ddl).

Probabilité de l'extrémité de la loi		Valeur critique
0,5		0,0
0,25		0,69
0,10		1,36
0,05		1,78
α'	$\dashrightarrow$	$t_{\alpha'}$
P'_{T_0}	$\dashleftarrow$	T_0

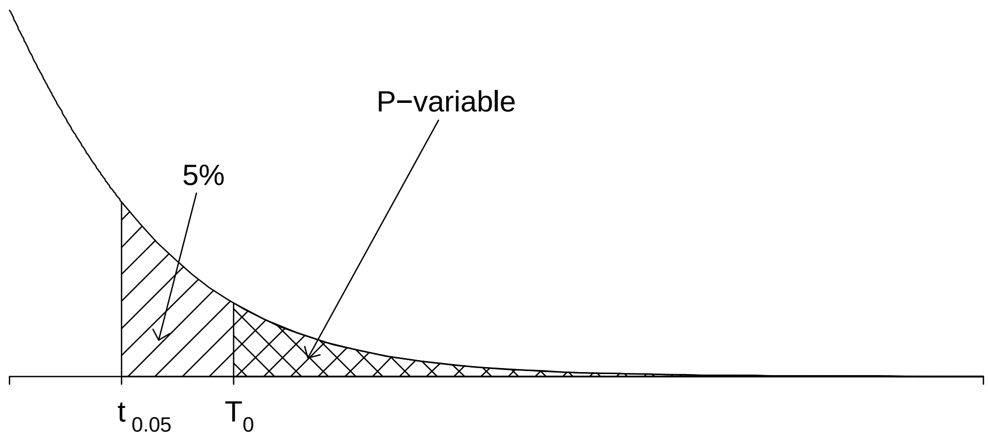
$$\text{Si } T_0 > t_{\alpha'}, \quad H_0 \text{ est rejetée.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } P'_{T_0} < \alpha', \quad H_0 \text{ est rejetée.}$$

NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE

DEFINITION DE LA P-VARIABLE



$$P'_{T_0} = 1 - F_0(T_0)$$

Règle : si $P'_{T_0} < \alpha'$, on rejette H_0,

si $P'_{T_0} > \alpha'$, on ne rejette pas H_0,

P'_{T_0} est une statistique descriptive

$$\downarrow$$

qui **ne doit pas** être utilisée pour

choisir le risque d'erreur *a posteriori*!

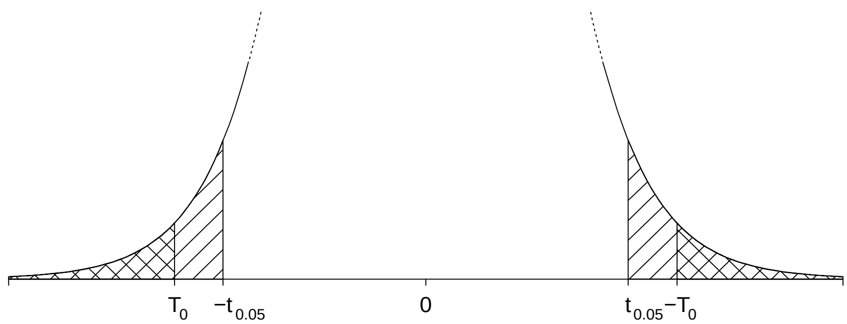
NIVEAU DESCRIPTIF OU P-VARIABLE

CAS BILATERAL

Problème :

L'âge moyen des agents de Montpellier est-il différent de celui de l'ensemble des agents ?

$$H_0 : m_M = m_0 \text{ contre } H_1 : m_M \neq m_o$$



$$\text{Si } T_0 < 0, \quad P_{T_0} = F_0(T_0) + [1 - F_0(-T_0)]$$

$$\text{Si } T_0 > 0, \quad P_{T_0} = [1 - F_0(T_0)] + F_0(-T_0)$$

$$\forall T_0, \quad P_{T_0} = F_0(- \mid T_0 \mid) + [1 - F_0(\mid T_0 \mid)]$$

BILAN SUR LES TESTS

*Identifier

-la population,

-la variable d'étude,

-le paramètre de la loi à étudier

*Préciser

-la distribution *a priori* de la variable,

-les hypothèses H_0 et H_1

*Choisir une **statistique** S :

de loi connue sous H_0	dont la forme de la loi est souvent connue sous H_1

BILAN SUR LES TESTS (suite et fin)

* Choisir un **niveau de confiance** γ ($\Leftrightarrow$ choisir un risque $\alpha = 1 - \gamma$).

$\Downarrow$

* Définir le **domaine de rejet** de H_0.

$\Downarrow$

* Calculer la **valeur critique** s_α,
pour un échantillon de taille n.

* Obtenir un n-**échantillon** de mesures.

* Calculer la statistique S sur les mesures de cet échantillon.

si $S > s_\alpha$	si $S < s_\alpha$
$\downarrow$	$\downarrow$
rejet de H_0	**non rejet** de H_0