INTERVALLE DE CONFIANCE

On a un estimateur d'un paramètre

Objectif : encadrer la vraie valeur du paramètre,
c'est-à-dire : proposer un intervalle et
savoir quelle est la probabilité que cet
intervalle contienne la vraie valeur

Quel intervalle ? Quelle probabilité ?

Etapes : - méthode pour déterminer un IC autour
de l'estimateur du paramètre recherché

- introduire différents postulats sur la
distribution des X_i pour réduire l'IC

POSTULATS SUR LA DISTRIBUTION DES X_I POUR DÉTERMINER L'INTERVALLE DE CONFIANCE

Par définition, ces postulats doivent être faits *a priori*

1) Aucun postulat

$\longrightarrow$ méthode du signe

2) Postulat 1 : distribution symétrique

méthode de Wilcoxon

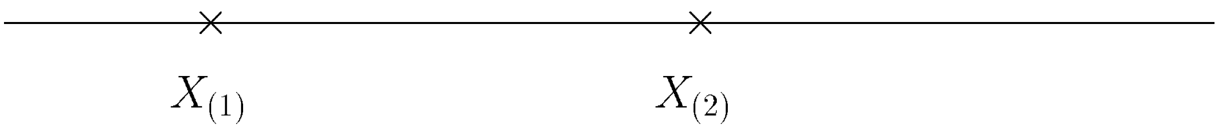
3) Postulat 2 : distribution gaussienne
(postulat plus fort)

méthode de Student

Pour les 3 méthodes, on suppose que la distribution est continue.

2-échantillon : X_1, X_2

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2) \qquad X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$$



On propose l'intervalle $X_{(1)} \leq m \leq X_{(2)}$.

Probabilité que cet intervalle contienne m ?

$$\text{Calcul de } \Pr\{X_{(1)} \leq m \leq X_{(2)}\}$$

1)Pr $\{m < X_{(1)}\} = \Pr\{m < X_1 \text{ et } m < X_2\}$

$$= \Pr\{m < X_1\} \times \Pr\{m < X_2\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

2) $\Pr\{m > X_{(2)}\} = \frac{1}{4}$

3) $\Pr\{X_{(1)} \leq m \leq X_{(2)}\} = 1 - \Pr\{m < X_{(1)}\} - Pr\{m > X_{(2)}\}$

$$= 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Conclusion : $[X_{(1)}\ ;\ X_{(2)}]$ contient m une fois sur deux.

n-**échantillon** : $X_1, X_2, \ldots, X_n$

On propose $[X_{(1)} \; ; \; X_{(n)}]$.

Calcul de la probabilité que cet intervalle contienne m :

$$\gamma = \Pr\{X_{(1)} \leq m \leq X_{(n)}\}$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{erreur } = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{\gamma = \text{coefficient de confiance}}$$

$$[X_{(1)}\ ;\ X^{(1)}],\ \textbf{ou}\ [X_{(2)}\ ;\ X^{(2)}], \ldots,\ \textbf{ou}\ [X_{(c)}\ ;\ X^{(c)}]\ \textbf{?}$$

À chaque intervalle est associé un coefficient de confiance γ.

On choisit γ *a priori*, et on détermine un intervalle :

de coefficient de confiance au moins égal à γ,

à l'aide d'une **table**.

$$n = 9 \quad \gamma \geq 0,95 \longrightarrow [X_{(\ )}\ ;\ X^{(\ )}]$$

$$\gamma \geq 0,99 \longrightarrow [X_{(\ )}\ ;\ X^{(\ )}]$$

CALCUL DE LA TABLE

Calcul de $\Pr\{X_{(c)} \leq m \leq X^{(c)}\}$.

Y = nombre d'observations plus petites que la médiane m

- $\{X_{(c)} \leq m \leq X^{(c)}\} \quad \Longleftrightarrow \quad ?$
- si aucun X_i ne coïncide avec m,
  $X_{(c)} \leq m \quad \Longleftrightarrow \quad Y \geq c$
- $m \leq X^{(c)} \quad \Longleftrightarrow \quad Y \leq n - c$

Résultat : $\Pr\{X_{(c)} \leq m \leq X^{(c)}\} = \Pr\{c \leq Y \leq n - c\}$

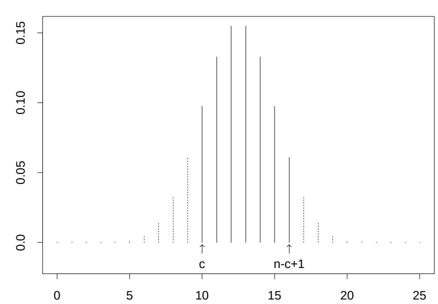
Calculable si l'on connaît la loi de Y.

Y = nombre de valeurs plus petites que m		$\mathcal{B}(n,p)$
épreuve :		épreuve :
à chaque tirage 2 issues	$\nearrow$ + petit $\searrow$ + grand ou égal	2 issues $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0
probabilité de {+ petit} Pr{+ grand ou égal}	$= \frac{1}{2}$ $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\Pr\{1\} = p$ $\Pr\{0\} = q = 1 - p$
n-échantillon		n réalisations
variable aléatoire $Y =$	nombre de réalisations de {+ petit}	variable aléatoire Y = nombre de réalisations de {1}
$Y \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$		$Y \sim \mathcal{B}(n,p)$

Donc on sait calculer

$Pr\{c \leq Y \leq n - c\}$.

$$= \sum_{i=c}^{n-c} C_n^i \, (\frac{1}{2})^i \, (\frac{1}{2})^{n-i}$$



Erreur = probabilité que $[X_{(c)}\ ;\ X^{(c)}]$

ne contienne pas m

est notée α

$$\boxed{\alpha = 1 - \gamma}$$

Symétrie de la distribution binomiale

$$\Longrightarrow \Pr\{m < X_{(c)}\} = \Pr\{m > X^{(c)}\}$$

notée α'

$$\alpha = \Pr\{m < X_{(c)}\} + \Pr\{m > X^{(c)}\} = 2\alpha'$$

$$\boxed{\alpha = 2\alpha'}$$

Y dépend du paramètre m

Y ne peut pas être *calculée* à partir du n-échantillon

(on ne connaît pas le nombre de valeurs plus petites que m, car on ne connaît pas m)

$\Longrightarrow Y$ n'est pas une *statistique*.

La *loi* de Y est *connue* :

c'est une loi binomiale,

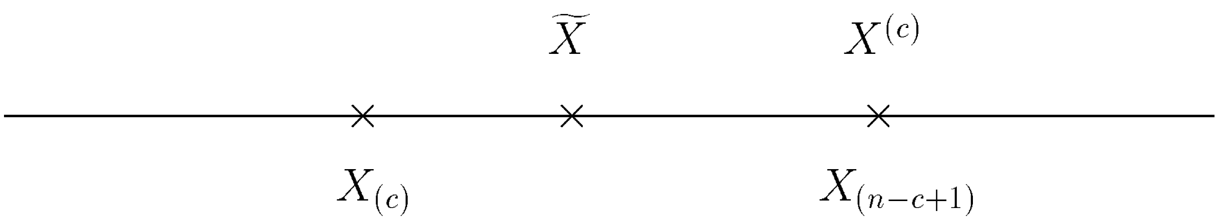
calculable, tabulée.

$\Longrightarrow Y$ est une variable *pivot*.

DÉFINITION D'UN INTERVALLE DE CONFIANCE DE LA MÉDIANE MÉTHODE DU SIGNE

Médiane de l'échantillon $\widetilde{X}$: estimateur de m.

Valeurs de l'échantillon réordonnées :



On supprime $(c-1)$ valeurs à chaque extrémité :

$$\Longrightarrow \text{intervalle } [X_{(c)}\ ;\ X^{(c)}]$$

$$\text{niveau de confiance : } \gamma$$

$$\text{erreur : } \alpha = 2\alpha' = 1 - \gamma$$

IC de la médiane avec les statistiques d'ordre $X_{(c)}$ et $X^{(c)}$

$c=$	1	2	3	4	5
n	min à max	$X_{(2)}$ à $X^{(2)}$	$X_{(3)}$ à $X^{(3)}$	$X_{(4)}$ à $X^{(4)}$	$X_{(5)}$ à $X^{(5)}$
2	0,500 0				
3	0,750 0				
4	0,875 0	0,375 0			
5	0,937 5	0,625 0			
6	0,968 8	0,781 3	0,312 5		
7	0,984 4	0,875 0	0,546 8		
8	0,992 2	0,929 7	0,711 0	0,273 4	
9	0,996 1	0,960 9	0,820 3	0,492 2	
10	0,998 0	0,978 5	0,890 6	0,656 3	0,246 1
11	0,999 0	0,988 3	0,934 6	0,773 4	0,451 2
12	0,999 5	0,993 7	0,961 4	0,854 0	0,612 3
13	0,999 76	0,996 6	0,977 5	0,907 7	0,733 2
14	0,999 88	0,998 2	0,987 1	0,942 6	0,820 4
15	0,999 939	0,999 02	0,992 1	0,964 8	0,881 5
16	0,999 969	0,999 48	0,995 8	0,978 7	0,923 2
17	0,999 985	0,999 73	0,997 7	0,987 3	0,951 0
18	0,999 992 3	0,999 86	0,998 7	0,992 5	0,969 1
19	0,999 996 2	0,999 924	0,999 27	0,995 6	0,980 8
20	0,999 998 1	0,999 960	0,999 60	0,997 4	0,988 2
25	0,999 999 934	0,999 998 3	0,999 978 6	0,999 83	0,999 0

c dépend de γ, et de n.

GRANDS ÉCHANTILLONS

Si n est grand :

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, npq)$$

donc :

$$\mathcal{B}(n,1/2) \approx \mathcal{N}(n/2, n/4)$$

$$c = \frac{n+1}{2} - z\frac{\sqrt{n}}{2}$$

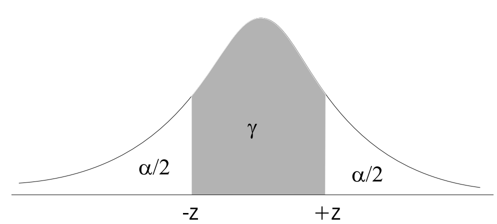
avec z tel que :

$Pr(Z \geq z) = \alpha' = \frac{\alpha}{2}$

$Pr(Z < z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Z suit $\mathcal{N}(0,1)$

à rechercher dans une table
de la loi normale



DE L'IC BILATÉRAL À L'IC UNILATÉRAL
IC BILATÉRAL

Production laitière de 50 bêtes (litre de lait/an)

1: 2161	11: 3912	21: 4177	31: 4590	41: 5073
2: 2624	12: 3921	22: 4192	32: 4601	42: 5091
3: 2665	13: 3955	23: 4202	33: 4727	43: 5183
4: 2821	14: 3979	24: 4204	34: 4772	44: 5344
5: 2874	15: 4031	25: 4230	35: 4780	45: 5371
6: 3381	16: 4078	26: 4377	36: 4783	46: 5665
7: 3463	17: 4092	27: 4441	37: 4862	47: 5672
8: 3643	18: 4101	28: 4494	38: 4896	48: 5682
9: 3738	19: 4155	29: 4521	39: 4927	49: 5823
10: 3818	20: 4159	30: 4551	40: 4981	50: 5848

On veut estimer (par intervalle) la production laitière médiane.

$$\Pr\{[X_{(c)}, X^{(c)}] \ni m\} = \gamma \simeq 0,95$$

- $\gamma =$
- $\alpha =$
- $c =$

$$\mathrm{IC} = [X_{(\quad)}, X^{(\quad)}] = [\qquad , \qquad]$$

DE L'IC BILATÉRAL À L'IC UNILATÉRAL
IC UNILATÉRAL

50-échantillon : production laitière (litre de lait/an) :

1: 2161	11: 3912	21: 4177	31: 4590	41: 5073
2: 2624	12: 3921	22: 4192	32: 4601	42: 5091
3: 2665	13: 3955	23: 4202	33: 4727	43: 5183
4: 2821	14: 3979	24: 4204	34: 4772	44: 5344
5: 2874	15: 4031	25: 4230	35: 4780	45: 5371
6: 3381	16: 4078	26: 4377	36: 4783	46: 5665
7: 3463	17: 4092	27: 4441	37: 4862	47: 5672
8: 3643	18: 4101	28: 4494	38: 4896	48: 5682
9: 3738	19: 4155	29: 4521	39: 4927	49: 5823
10: 3818	20: 4159	30: 4551	40: 4981	50: 5848

Est-ce que la production médiane est supérieure à la médiane régionale $R = 4190$ litres/an ?

$$\begin{array}{llll} \text{Intervalle bilatéral :} & c = 18 & & \gamma' = 0.967 \\ \text{Intervalle unilatéral :} & c' = & & \gamma' = \end{array}$$

$$\Pr\{\, [X_{(c')}\,;+\infty\,[\, \ni m\} \approx \Pr\{\, [X_{(c)}\,;\ X^{(c)}]\ \ni m\}$$

Les intervalles calculés sur le 50-échantillon sont :

$[X_{(\quad)}\,;+\infty\,[= [\qquad ;+\infty\,[$ $\qquad$ $[X_{(18)}\,;\ X^{(18)}] = [4101\,;\ 4727]$

POSTULATS SUR LA DISTRIBUTION DES X_I POUR DÉTERMINER L'INTERVALLE DE CONFIANCE

Par définition, ces postulats doivent être faits *a priori*

1) Aucun postulat

méthode du signe

2) Postulat 1 : distribution symétrique

$\longrightarrow$ méthode de Wilcoxon

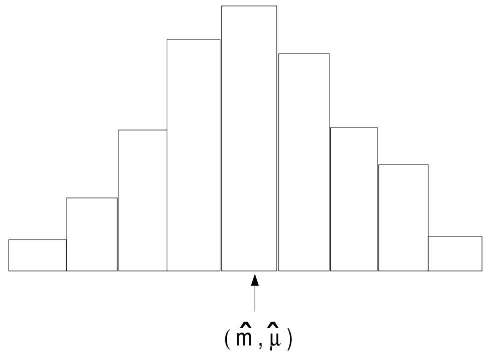
3) Postulat 2 : distribution gaussienne

(postulat plus fort)

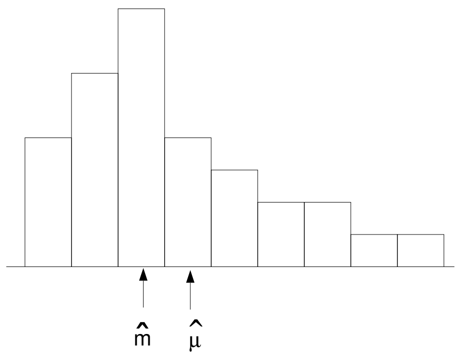
méthode de Student

Pour les 3 méthodes, on suppose que la distribution est continue.

DISTRIBUTION SYMÉTRIQUE



DISTRIBUTION ASYMÉTRIQUE



la moyenne et la médiane sont confondues

$\Downarrow$

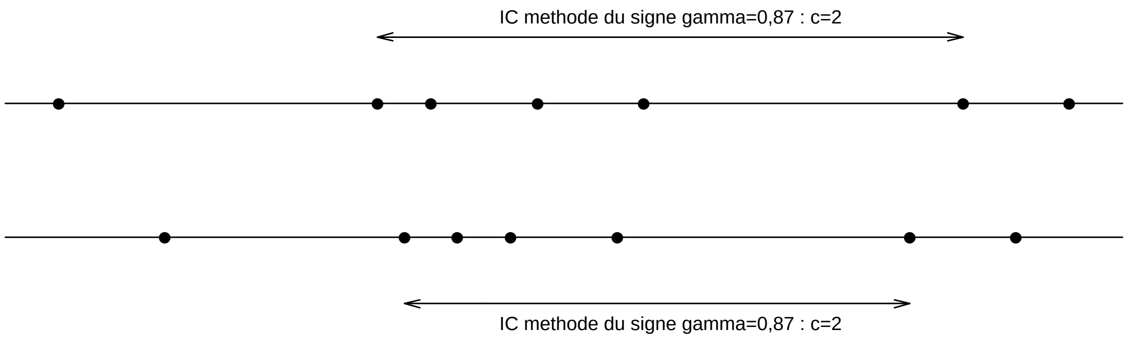
construction d'un intervalle symétrique
autour du paramètre considéré, fonction de :

– la taille de l'échantillon,

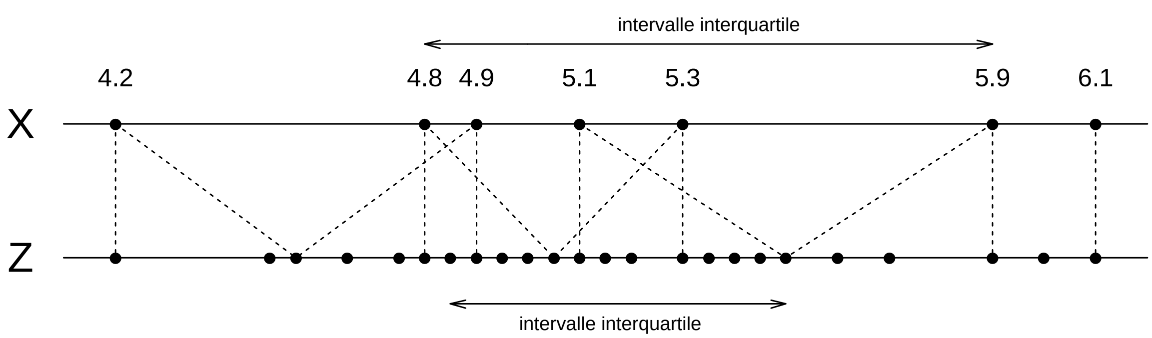
– la dispersion des données de l'échantillon,

– le coefficient de confiance γ choisi.

Variation de l'IC de la médiane en fonction de la dispersion des observations



Les moyennes 2 à 2 sont moins dispersées autour de m



IC de la médiane par la méthode de Wilcoxon

- $X_1, \ldots, X_n \to Z_{ij} = \frac{X_i + X_j}{2}, i \leq j$

- distribution des X_i symétrique $\Rightarrow$ les X_i et les Z_{ij} ont même médiane

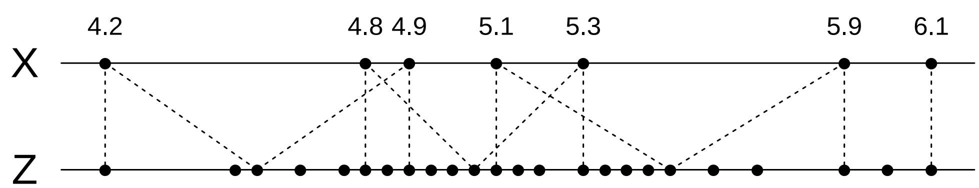
- IC pour la médiane : $[Z_{(c)}, Z^{(c)}]$

- calcul de c en fonction de γ et n :

$$
\begin{gathered}
Z_{ij} \text{ non indépendantes} \\
\Downarrow \\
Y_Z = \text{ nombre de} Z_{ij} \leq m \text{ ne suit pas une binomiale} \\
\Downarrow
\end{gathered}
$$

utilisation d'une table spécifique différente de la précédente pour calculer le cœfficient de confiance ou déterminer l'IC

calcul de l'IC de Wilcoxon



POSTULATS SUR LA DISTRIBUTION DES X_I POUR DÉTERMINER L'INTERVALLE DE CONFIANCE

Par définition, ces postulats doivent être faits *a priori*

1) Aucun postulat

méthode du signe

2) Postulat 1 : distribution symétrique

méthode de Wilcoxon

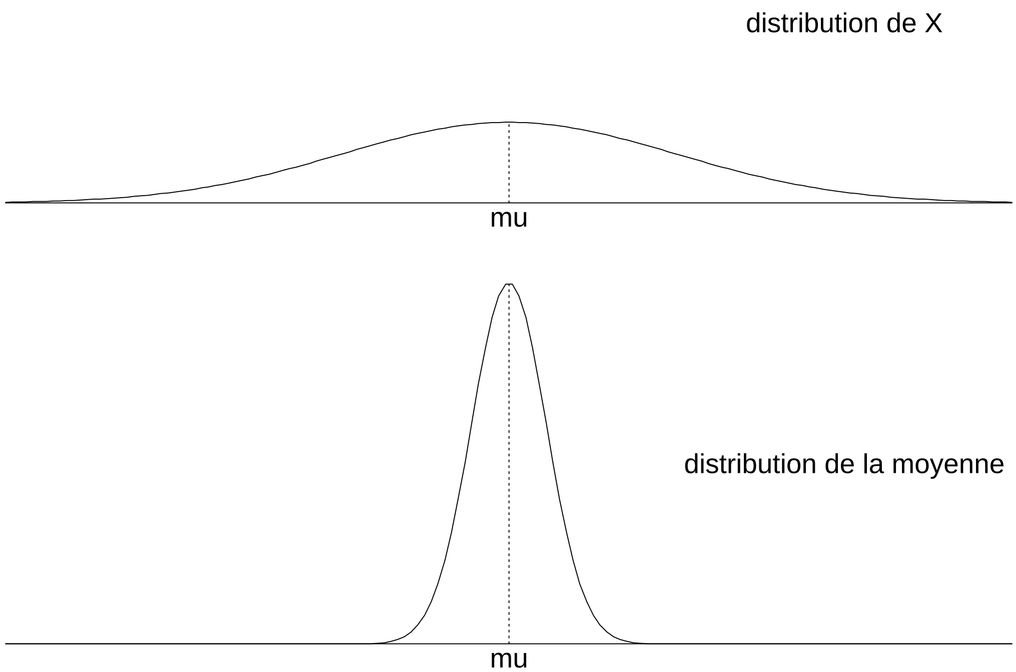
3) Postulat 2 : distribution gaussienne

(postulat plus fort)

$\longrightarrow$ méthode de Student

Pour les 3 méthodes, on suppose que la distribution est continue.

INTERVALLE DE CONFIANCE DE LA MÉDIANE SOUS L'HYPOTHESE D'UNE DISTRIBUTION GAUSSIENNE



INTERVALLE DE CONFIANCE DE LA MOYENNE SOUS L'HYPOTHÈSE D'UNE DISTRIBUTION GAUSSIENNE MÉTHODE DE STUDENT

• On construit un intervalle symétrique autour de la moyenne empirique, $\overline{X}$, de l'échantillon :

$$\overline{X} - \text{marge} \leq \mu \leq \overline{X} + \text{marge}$$

• La *marge* sera calculée en tenant compte à nouveau :

- de la taille de l'échantillon n,

- de la dispersion des données de l'échantillon $\widehat{\sigma}^2$,

- et du coefficient de confiance choisi γ.

• Soient n variables X_i :

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

la moyenne empirique est :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

• Soit z l'écart gaussien associé au risque α :

$$\Pr\left\{-z \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right\} = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left\{\overline{X} - z\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Le paramètre σ^2 n'est pas connu *a priori*, on l'estime à partir des données expérimentales.

- Cas des **petits échantillons**($n < 20$)

La variable $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ ne suit pas une loi normale,
mais une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté : t_{n-1}.

On remplace donc l'écart gaussien z par l'écart de Student t :

$$\Pr\left\{\overline{X} - t\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

- Cas des **grands échantillons** ($n >$ 20-25) :

$$\Pr\left\{\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

BILAN SUR LES INTERVALLES DE CONFIANCE

- IDENTIFIER :

  - une population,

  - une variable d'étude,

  - un paramètre de la loi de cette variable.

- PRÉCISER :

  - la distribution *a priori* de la variable.

- DÉFINIR :

  - un niveau de confiance γ.

BILAN (suite) SUR LES INTERVALLES DE CONFIANCE

- Calculer, pour un échantillon de taille n :

$\swarrow \; \searrow$

un intervalle de confiance autour du paramètre	un estimateur du paramètre et une marge autour de cet estimateur

$\searrow \; \swarrow$

ces intervalles sont toujours aléatoires !!!

- Remarque :

Les intervalles prennent en compte la distribution des X_i.