Graphical games
Théorie des jeux et inférence dans les modèles graphiques

Régis Sabbadin

INRA-MIAT

AIGM-n
16 Mai 2014

Jeu sous forme stratégique

Definition (Jeu stratégique)

Un jeu stratégique $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ est défini par :

- Un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$ de joueurs
- Un ensemble (fini, dans cet exposé) S_i de *stratégies* par joueur
- Une fonction d'utilité, $u_i : S = S_1 \times \ldots \times S_n \to \Re$ par joueur

Example

u_1	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	5	0
y_1	4	1

u_2	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	1	0
y_1	4	5

$\Rightarrow$

(u_1, u_2)	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	(5,1)	(0,0)
y_1	(4,4)	(1,5)

Jeu sous forme stratégique

Etant donné un jeu stratégique $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, on définit :

Definition (Quelques définitions)

- $S = S_1 \times \ldots \times S_n$: Espace des stratégies des n joueurs
- $s \in S = S_1 \times \ldots \times S_n$: un *profil de stratégies*
- $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$: le profil de stratégies des autres joueurs que i

Question : Comment déterminer un profil de stratégies s^* satisfaisant tous les joueurs ?

Réponse 1 : s_i^* doit être une "meilleure réponse" aux "meilleures réponses" des autres joueurs (définition circulaire !)

Fonction de meilleure réponse

Definition (Fonction meilleure réponse)

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i' \in S_i\}$$

Example

	S_2		
S_1	x_2	y_2	z_2
x_1	(3,0)	(0,2)	(0,3)
y_1	(2,0)	(1,1)	(2,0)
z_1	(0,3)	(0,2)	(3,0)

$$B_1(x_2) = \{x_1\} \quad B_2(x_1) = \{z_2\}$$
$$B_1(y_2) = \{y_1\} \quad B_2(y_1) = \{y_2\}$$
$$B_1(z_2) = \{z_1\} \quad B_2(z_1) = \{x_2\}$$

Réponse 1 : s_i^* doit être une "meilleure réponse" aux "meilleures réponses" des autres joueurs (définition circulaire !)

Equilibre de Nash pur

Soit un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, on définit :

Definition (Equilibre de Nash pur)

Un équilibre de Nash pur pour Γ est un profil s^* tel que

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*), \forall i \in N$$

Example (Equilibre de Nash pur)

	S_2		
S_1	x_2	y_2	z_2
x_1	(3,0)	(0,2)	(0,3)
y_1	(2,0)	**(1,1)**	(2,0)
z_1	(0,3)	(0,2)	(3,0)

$B_1(x_2) = \{x_1\}$ $\quad B_2(x_1) = \{z_2\}$

$\mathbf{B_1(y_2) = \{y_1\}}$ $\quad \mathbf{B_2(y_1) = \{y_2\}}$

$B_1(z_2) = \{z_1\}$ $\quad B_2(z_1) = \{x_2\}$

Equilibre de Nash pur $s^* = (y_1, y_2)$

Equilibre de Nash pur

Un équilibre de Nash pur ne contient que des "meilleures réponses" aux "meilleures réponses" de tous les joueurs...

Propriétés :

- Un équilibre de Nash pur est un profil de stratégies dont aucun joueur n'a intérêt à dévier
- Un équilibre de Nash pur n'est pas forcément unique
- Un équilibre de Nash pur n'existe pas forcément

$\Rightarrow$ De multiples autres définitions d'équilibres dans les jeux

$\Rightarrow$ Nous en définissons deux autres, utilisés dans le cadre des jeux graphiques

Equilibre de Nash mixte

Definition (Stratégies mixtes)

Soit un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, on définit :

- $\Delta(S_i)$: l'ensemble des distributions de probabilité sur S_i
- $\delta_i \in \Delta(S_i)$: une stratégie mixte. $\delta_i(s_i)$ est la probabilité que le joueur i choisisse s_i
- $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$: Un profil de stratégies mixtes

Definition (Utilités d'un profil de stratégies mixtes)

Soit un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, δ un profil de stratégies mixtes. Alors, $\forall i \in N$,

$$\mu_i(\delta) = \sum_s \delta_i(s_i) \left(\prod_{j \in N \setminus i} \delta_j(s_j) u_i(s_i, s_{-i}) \right)$$

Equilibre de Nash mixte

Soit un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$.

Definition (Equilibre de Nash)

Un équilibre de Nash mixte est un profil de stratégies mixtes, δ^*, tel que :

$$\mu_i(\delta_i^*, \delta_{-i}^*) \geq \mu_i(\delta_i, \delta_{-i}^*), \forall i \in N, \forall \delta_i \in \Delta(S_i)$$

Theorem (Nash, 1951)

δ^* est un équilibre de Nash mixte si et seulement si

$$\mu_i(\delta_i^*, \delta_{-i}^*) \geq \mu_i(s_i, \delta_{-i}^*), \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Equilibre de Nash mixte

Theorem (Nash, 1951)

Tout jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ *admet au moins un équilibre de Nash mixte (potentiellement plusieurs)*

Example

(u_1, u_2)	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	(2,1)	(0,0)
y_1	(0,0)	(1,2)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \delta_1^*(x_1) &= \frac{2}{3} \\ \delta_1^*(y_1) &= \frac{1}{3} \\ \delta_2^*(x_2) &= \frac{1}{3} \\ \delta_2^*(y_2) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\mu_1(\delta^*) = \mu_2(\delta^*) = \frac{2}{3}$$

Équilibre corrélé

Un équilibre de Nash suppose que les joueurs sont égoïstes et **ne communiquent pas**
$\Rightarrow$ Il est possible d'obtenir un meilleur équilibre pour tous les joueurs, en "corrélant" les stratégies mixtes

Example

(u_1, u_2)	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	(2,1)	(0,0)
y_1	(0,0)	(1,2)

$\Rightarrow$

(δ^c)	S_2	
S_1	x_2	y_2
x_1	$\frac{1}{2}$	0
y_1	0	$\frac{1}{2}$

$$\mu_1(\delta^c) = \frac{1}{2}u_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2}u_1(y_1, y_2) = \frac{3}{2} > \mu_1(\delta^*)$$

$$\mu_2(\delta^c) = \frac{1}{2}u_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2}u_2(y_1, y_2) = \frac{3}{2} > \mu_2(\delta^*)$$

Équilibre corrélé

Definition (Utilité d'une stratégie corrélée)

Soit un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$.
Une stratégie corrélée δ pour Γ est une distribution jointe sur $S_\times \ldots \times S_n$. Son utilité est :

$$\nu_i(\delta) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)} \delta(s_1, \ldots, s_n) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

Definition (Equilibre corrélé)

Un équilibre corrélé, δ^c est une stratégie corrélée telle que

$$\nu_i(\delta^c) \geq \nu_i(\delta), \forall i = 1 \ldots n,$$

pour toute stratégie corrélée δ.

Équilibre corrélé

Theorem

- *Tout équilibre de Nash est un équilibre corrélé*
- *Toute "loterie" sur les équilibres de Nash est un équilibre corrélé*
- *L'ensemble des équilibres corrélés est compact, convexe, et défini par un ensemble de contraintes linéaires :*

$$\begin{aligned} \delta^c(s) &\geq 0, \forall s \in S \\ \sum_{s \in S} \delta^c(s) &= 1 \\ \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \delta^c(s) \left(u_i(s) - u_i(s_{-i}, s_i')\right) &\geq 0, \forall i \in N, (s_i, s_i') \in S_i^2 \end{aligned}$$

En bref

Un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$:

- Peut admettre un équilibre de Nash pur (facile à trouver), mais pas toujours
- Admet toujours au moins un équilibre de Nash mixte, a priori difficile à calculer (PPAD-complet $\subseteq$ NP)
- Admet toujours un équilibre corrélé. Un équilibre corrélé particulier peut se calculer (facilement) en résolvant un programme linéaire

$\Rightarrow$ Mais ces résultats ne sont valables que pour une représentation "extensive" d'un jeu...

Limites de la représentation extensive des jeux

Dans certains cas, les fonctions u_i d'un jeu stratégique $\Gamma = (N, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$ peuvent être *locales* : $u_i(s_{N(i)})$

Néanmoins :

- Représenter un jeu $\Gamma = (N, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$ sous forme extensive requiert un espace exponentiel en n
- La forme extensive ne permet pas de mettre à profit la localité des fonctions (u_i) pour calculer (de manière exacte ou approchée) efficacement un équilibre

$\Rightarrow$ Le cadre des *Graphical games* (Kearns, Littman et Singh, 2001) permet de représenter et de résoudre efficacement (de manière approchée) de tels jeux "locaux"

Les jeux graphiques

Definition (Jeu graphique)

Un jeu graphique $\Gamma_G = (G, (S_i)_{i=1,\ldots,n}, (u_i)_{i=1,\ldots,n})$ est constitué :

- d'un graphe non dirigé $G = (V, E)$, avec $|V| = n$,
- de n ensembles finis de stratégies pures $(S_i)_{i=1,\ldots,n}$
- d'un ensemble de fonctions d'utilités "locales", $u_i : S_{N(i)} \to \Re$, où $N(i)$ est l'ensemble des voisins de i dans G ($i \in N(i)$)

- Un jeu graphique peut donc (à condition que $\max_i |N(i)| << n$) être représenté de manière concise.
- Mais qu'en est-il du calcul d'équilibres (Nash pur, Nash mixte, équilibre corrélé) ?

Calcul d'équilibres

- Ces calculs sont difficiles, en général
- Plus faciles dans certains cas, et...

⇒ Il existe une ressemblance intéressante (mais pas totale) entre *jeux graphiques* et *modèles graphiques stochastiques* !

Nous allons présenter une liste de résultats intéressants (pas dans l'ordre chronologique)

Équilibre de Nash pur et calcul de MAP dans un MRF (Daskalakis et Papadimitriou, 2006)

(DP, 2006) proposent une *réduction* d'un jeu graphique $\Gamma_G = (G, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$ vers un MRF $MRF(\Gamma_G) = (G', (\psi_c)_{c \in \mathcal{C}(G')})$ où :

- $\mathcal{C}(G')$ est l'ensemble des cliques de G' et
- $\psi_c : S_c \to \Re^+$ sont les fonctions "potentiels"

$\Rightarrow$ L'existence (et la valeur) d'un équilibre de Nash pur pour Γ_G est déduite à partir d'une inférence de MAP dans $MRF(\Gamma_G)$

Équilibre de Nash pur et calcul de MAP dans un MRF (Daskalakis et Papadimitriou, 2006)

Definition (La réduction)

- $V' = V$; $(i,j) \in E'$ ssi S_i et S_j sont des variables communes d'une fonction locale u_k
- $\mathcal{C} = \{N(i), i \in E'\}^*$ (on retire les doublons $N(i) = N(j)$)
- Pour tout $i \in E'$ on définit $f_i, \prod_{j \in N(i)} S_j \to \Re^+$

$$\begin{aligned} f_i(s_{N(i)}) &= 1 \text{ si } s_i \in B_i(s_{N(i)-i}) \\ &= \varepsilon \ (\varepsilon << 1) \text{ sinon} \end{aligned}$$

- $\forall c \in \mathcal{C}$, $\psi_c(s_c) = \prod_{i, N(i)=c} f_i(s_{N(i)})$

Équilibre de Nash pur et calcul de MAP dans un MRF (Daskalakis et Papadimitriou, 2006)

Proposition (Les résultats)

- Γ_G *admet un équilibre de Nash pur ssi* $MRF(\Gamma_G)$ *admet un MAP (non normalisé)* $\hat{s}$, *tel que* $\prod_{c \in \mathcal{C}} \psi_c(\hat{s}_c) \sim 1$
- $\hat{s}$ *est un équilibre de Nash pur*
- *Un équilibre de Nash pur peut être calculé en temps polynomial si la* treewidth *de* G' *est bornée* ($O(\log(n))$)

Proposition (Bonus)

Un équilibre de Nash mixte ε*-approché peut être calculé en temps polynomial en* n *et en* $\frac{1}{\varepsilon}$, *si la taille des voisinages est bornée, de même que le nombre de stratégies pures, et si* $treewidth(G') = O(\log(n))$

Un cas particulier : *zero-sum graphical games* (Daskalakis et Papadimitriou, 2009)

Definition (Zero-sum graphical game)

Un *zero-sum graphical game* est un jeu graphique $\Gamma_G^0 = (G, (S_i)_{i=1,\ldots,n}, (u_i)_{i=1,\ldots,n})$, dans lequel

$$u_i(s_{N(i)}) = \sum_{j \in N(i)-i} u_{ij}(s_i, s_j), \text{ où}$$

- les voisinages sont symétriques : $j \in N(i) \Rightarrow i \in N(j)$
- les u_{ij} sont des matrices de jeux à deux joueurs, *zero-sum* : $u_{ij}(s_i, s_j) = -u_{ji}(s_i, s_j)$

Un cas particulier : *zero-sum graphical games* (Daskalakis et Papadimitriou, 2009)

Proposition (Réduction vers un zero-sum bimatrix game)

Soit $\Gamma_G^0 = (G, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$, *un* zero-sum graphical game.

On peut montrer que Γ_G^0 *peut se réduire à un* zero-sum bimatrix game, *chacun des deux joueurs ayant* $\sum_{i \in V} |S_i|$ *stratégies pures à disposition.*

$\Rightarrow$ *On peut calculer un équilibre de Nash mixte en temps polynomial !*

PS : La preuve est constructive, mais fastidieuse... Voir le papier !

PS2 : Et puis, rien à voir avec les modèles graphiques stochastiques...

Tree Graphical games (Kearns, Littman et Singh, 2001)

Dans le cas où le graphe G d'un graphical game $\Gamma_G = (G, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$ est un arbre, (KLS, 2001) proposent un algorithme (a priori polynomial) en deux passes (*upstream/downstrean*) qui calcule un équilibre de Nash pour Γ_G.

Problème : Cet algorithme générique maintient des fonctions $T(\delta_i, \delta_j)$ pour chaque paire de joueurs "voisins".

Solutions : (i) un calcul approché, à performance garantie, en temps pseudo-polynomial et (ii) un algorithme exact en temps exponentiel, profitant de la forme des fonctions T.

Et si G n'est pas un arbre ? Un algorithme approché de type *belief propagation*, bien sûr...

Equilibre corrélé dans un graphical game et champ de Markov (Kearns, 2007)

Proposition (Equilibre corrélé et champ de Markov)

Soit $\Gamma_G = (G, (S_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n})$*, un graphical game quelconque.*

- *A tout équilibre corrélé* δ^* *correspond la distribution jointe* $\hat{\delta}$ *d'un champ de Markov* $MRF_{\delta^*} = (G', \{\psi_c\})$
- *Les utilités locales de* δ^* *et* $\hat{\delta}$ *correspondent* $(\nu_i(\delta^*) = \nu_i(\hat{\delta}), \forall i \in V)$
- $G' = G$ *!*

Equilibre corrélé dans un graphical game et champ de Markov (Kearns, 2007)

Proposition (Calcul des potentiels)

Les potentiels (dont la structure est connue) s'obtiennent en résolvant un problème (convexe) de maximisation d'entropie sous contraintes

$\Rightarrow$ Un équilibre corrélé est une distribution jointe, impossible à représenter "à plat", mais c'est la distribution d'un champ de Markov "calculable"...
$\Rightarrow$ On peut le représenter de manière concise, le simuler, l'approcher (champ moyen, par exemple), etc.

En résumé

- Les "jeux graphiques" forment une représentation *compacte* de certains jeux à n joueurs avec peu d'interactions
- Il est a priori aussi (plus) difficile de trouver un équilibre dans un jeu graphique que dans un jeu en extension

Il existe un certain nombre de résultats liant le calcul d'équilibre dans les jeux graphiques et l'inférence dans les modèles graphiques :

- Calcul d'équilibre de Nash pur et MAP
- Tree-graphical games et Belief propagation (GBP dans le cas général)
- Equilibre corrélé et distribution jointe d'un champ de Markov

Bibliographie

- C. Daskalakis and C. H. Papadimitriou. Computing Pure Nash Equilibria in Graphical Games via Markov Random Fields, *EC'06*, 2006.
- C. Daskalakis and C. H. Papadimitriou. On a Network Generalization of the Minmax Theorem, *ICALP'09*, 2009.
- M.J. Kearns. Graphical Games. *Algorithmic Game Theory*, N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos and V. Vazirani editors, Cambridge University Press, 2007.
- M. J. Kearns, M. L. littman and S. P. Singh. Graphical Models for Game Theory. *UAI'01*, 2001.
- J. Nash. Noncooperative games. *Annals of mathematics*, 54 :289-295, 1951.