# Lois marginales dichotomiques et loi jointe pour une distribution de Gibbs

Cécile Hardouin, Xavier Guyon

MODAL'X, SAMM

AIGM, Nanterre Mai 2014

# Plan

- Toujours cette constante de normalisation...
- Distribution "factorisable" , propriétés Markoviennes chaîne-champ
- Marginales dichotomiques
- Le modèle d'Ising

# Le contexte

- $\pi$ une distribution de Gibbs

$$\pi(z_1, \cdots, z_T) = C^{-1} \exp U(z_1, \cdots, z_T)$$

  Problème : le calcul de $C$.
- Pour un modèle d'Ising sur une mini grille $10 \times 10$, on doit sommer sur $2^{100}$ termes.

# Le contexte

- $\pi$ une distribution de Gibbs

$$\pi(z_1, \cdots, z_T) = C^{-1} \exp U(z_1, \cdots, z_T)$$

  Problème : le calcul de $C$.
- Pour un modèle d'Ising sur une mini grille $10 \times 10$, on doit sommer sur $2^{100}$ termes.
- Algorithmes de calcul récents:

Liu, 2001. Monte Carlo strategies in scientific computing, Springer

Bartolucci, Besag, 2002. A recursive algorithm for Markov random fields, Biometrika

Pettitt, Friel., Reeves, 2003. Efficient calculation of the normalizing constant of the autologistic and related models on the cylinder and lattice, JRSS B.

Reeves, Pettitt, 2004. Efficient recursions for general factorisable models, Biometrika

Friel, Rue, 2007. Recursive computing and simulation-free inference for general factorizable models. Biometrika

Hardouin, Guyon, 2012-14 Comp. Stat.

# Le contexte

- $Z(T) = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_T)$ , variable **temporelle** (spatial en dim 1 !)
- $E$ espace d'états fini à $N$ éléments
- $Z$ a une distribution jointe "factorisable" (R-P 2004)

$$\pi(z_1, \cdots, z_T) = C^{-1} \exp \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1}) \tag{1}$$

On peut interpréter $\pi$ comme une distribution de Gibbs d'énergie

$$U_T(z_1, z_2, ..z_T) = \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1})$$

avec des potentiels de paires.

# Notations

- $\pi_A$ la marginale de $\pi$ sur $A \subseteq \{1, 2, \cdots, T\}$
- $\pi_s^t = \pi_{\{s,s+1,\cdots,t\}}$
- $u_s^t = (u_s, ..., u_t) \in E^{t-s+1}$

# Propriétés markoviennes

$Z(T)$ est un champ de Markov aux 2 ppv :

$$\begin{aligned}\pi(z_t \mid z_s, s \neq t) &= \frac{\exp(h_{t-1}(z_{t-1},z_t)+h_t(z_t,z_{t+1}))}{\sum_{u\in E}\exp(h_{t-1}(z_{t-1},u)+h_t(u,z_{t+1}))} \\ &= \pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1}).\end{aligned}$$

Rm : cette loi conditionnelle se calcule aisément ; mais pas les marginales, ni $C$.

# Propriétés markoviennes

$Z(T)$ est une chaîne de Markov :

$$\pi(z_t \mid z_s,\ s \le t-1) = \frac{\pi_1^t(z_1^t)}{\pi_1^{t-1}(z_1^{t-1})}$$

on écrit $\pi_1^t(z_1^t) = \sum_{u_{t+1}^T \in E^{T-t}} \pi(z_1, \cdots, z_t, u_{t+1}, \cdots, u_T)$,

$$\begin{aligned}\pi(z_t \mid z_s,\ s \le t-1) &= \frac{\exp h_{t-1}(z_{t-1}, z_t) \times \sum_{u_{t+1}^T} \exp\left(h_t(z_t, u_{t+1}) + \sum_{s=t+1}^{T-1} h_s(u_s, u_{s+1})\right)}{\sum_{u_t^T} \exp\left(h_{t-1}(z_{t-1}, u_t) + \sum_{s=t}^{T-1} h_s(u_s, u_{s+1})\right)} \\ &= \pi(z_t \mid z_{t-1}).\end{aligned}$$

Rm : La forme de la transition n'est pas toujours explicite, sauf dans certains cas.

# Lien champ-chaîne

On a un lien entre les paramètres du champ et ceux de la matrice de transition $P$.

$$\pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1}) = \frac{\pi(z_{t+1} \mid z_t)\pi(z_t \mid z_{t-1})}{\sum_u \pi(z_{t+1} \mid u)\pi(u \mid z_{t-1})} \ . \qquad (\bigstar)$$

# Marginales dichotomiques

$T = 2^r + 1$,
On pose $S = S_{r+1} = \{1, 2, ..., T\}$,
$S_r = \{1, 3, 5, ..., T\}$,
$S_{r-1} = \{1, 5, 9, \dots T\}$, $\quad ,S_1 = \{1, T\}$.

$Z(T) = (Z_1, Z_2, ..., Z_T)$ sur $S$
$(Z_1, Z_3, ..., Z_T)$ est une chaîne de Markov de transition $P^2$.

# Marginales dichotomiques

$T = 2^r + 1$,
On pose $S = S_{r+1} = \{1, 2, ..., T\}$,
$S_r = \{1, 3, 5, ..., T\}$,
$S_{r-1} = \{1, 5, 9, \dots T\}$, $\quad ,S_1 = \{1, T\}$.

$Z(T) = (Z_1, Z_2, ..., Z_T)$ sur $S$
$(Z_1, Z_3, ..., Z_T)$ est une chaîne de Markov de transition $P^2$.
Avec ($\bigstar$), $(Z_1, Z_3, ..., Z_T)$ est un champ de Markov aux 2 ppv de loi $\pi_r$ liée à $P^2$, de distrib. cond. $\pi_r(z_t \mid z_{t-2}, z_{t+2})$.

# Marginales dichotomiques

$T = 2^r + 1$,
On pose $S = S_{r+1} = \{1, 2, ..., T\}$,
$S_r = \{1, 3, 5, ..., T\}$,
$S_{r-1} = \{1, 5, 9, \ldots T\}$, $\quad ,S_1 = \{1, T\}$.

$Z(T) = (Z_1, Z_2, ..., Z_T)$ sur $S$
$(Z_1, Z_3, ..., Z_T)$ est une chaîne de Markov de transition $P^2$.
Avec $(\bigstar)$, $(Z_1, Z_3, ..., Z_T)$ est un champ de Markov aux 2 ppv de loi $\pi_r$ liée à $P^2$, de distrib. cond. $\pi_r(z_t \mid z_{t-2}, z_{t+2})$.
On itère...
$(Z_1, Z_5, ..Z_T)$ est une Chaîne de Markov de transition $P^4$ et un champ de M de distribution $\pi_{r-1}$.
etc...
jusque $(Z_1, Z_T)$.

# Marginales dichotomiques

On obtient la loi jointe :

# Marginales dichotomiques

On obtient la loi jointe :
$\pi(z_1, z_2, ..., z_T) = \pi(z_1, z_2, ..., z_T \mid z_1, z_3, z_5, .., z_T) \times \pi(z_1, z_3, z_5, .., z_T)$

# Marginales dichotomiques

On obtient la loi jointe :

$$\pi(z_1, z_2, ..., z_T) = \pi(z_1, z_2, ..., z_T \mid z_1, z_3, z_5, .., z_T) \times \pi(z_1, z_3, z_5, .., z_T)$$

$$\begin{aligned}\pi(z_1, z_2, ..., z_T \mid z_1, z_3, z_5, .., z_T) \\ &= \pi(z_2 \mid z_1, z_3)\pi(z_4 \mid z_3, z_5)...\pi(z_{T-1} \mid z_{T-2}, z_T) \\ &= \prod_{s \in S \setminus S_r} \pi(z_s \mid z_{s-1}, z_{s+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(z_1, z_3, z_5, .., z_T) \\ &= \pi_r(z_1, z_3, z_5, z_7, ..., z_T \mid z_1, z_5, z_9, .., z_T) \times \pi_r(z_1, z_5, z_9, .., z_T) \\ &= \prod_{s \in S_r \setminus S_{r-1}} \pi_r(z_s \mid z_{s-1}, z_{s+1}) \times \pi_r(z_1, z_5, z_9, .., z_T).\end{aligned}$$

etc...

# Marginales dichotomiques

Finalement,

$$\pi(z_1, z_2, \ldots, z_T) = \prod_{s \in S \backslash S_r} \pi(z_s \mid z_{s-1}, z_{s+1}) \times \prod_{s \in S_r \backslash S_{r-1}} \pi_r(z_s \mid z_{s-1}, z_{s+1})$$

$$\times \ldots \times \prod_{s \in S_2 \backslash S_1} \pi_2(z_s \mid z_{s-1}, z_{s+1}) \times \pi_1(z_1, z_T) \ .$$

# Marginales dichotomiques

En conclusion, on a un moyen de calculer

- La loi jointe $\pi(z_1, z_2, \dots, z_T)$

# Marginales dichotomiques

En conclusion, on a un moyen de calculer

- La loi jointe $\pi(z_1, z_2, \ldots, z_T)$
- Les lois marginales dichotomiques sur $S_j$

# Marginales dichotomiques

En conclusion, on a un moyen de calculer

- La loi jointe $\pi(z_1, z_2, ..., z_T)$
- Les lois marginales dichotomiques sur $S_j$
- Et la constante avec $\pi(z_1, z_2, ..., z_T) = C^{-1} \exp \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1})$.

# Marginales dichotomiques

En conclusion, on a un moyen de calculer

- La loi jointe $\pi(z_1, z_2, ..., z_T)$
- Les lois marginales dichotomiques sur $S_j$
- Et la constante avec $\pi(z_1, z_2, ..., z_T) = C^{-1} \exp \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1})$.
- On peut faire du max de vraisemblance, etc...

# Le modèle d'Ising

$E = \{-1, +1\}$, et $\pi(z_1, z_2, ..., z_T) = C^{-1} \exp \sum_{s=1,T-1} \alpha z_s + \beta z_s z_{s+1}$.

On écrit $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$.

$(\bigstar)$ :

$$\frac{e^{\alpha z_t + \beta(z_{t-1}z_t + z_t z_{t+1})}}{e^{\alpha + \beta(z_{t-1}+z_{t+1})} + e^{-(\alpha+\beta(z_{t-1}+z_{t+1}))}} = \frac{\pi(z_{t+1} \mid z_t)\pi(z_t \mid z_{t-1})}{\sum_u \pi(z_{t+1} \mid u)\pi(u \mid z_{t-1})}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} \text{ et } \beta = \frac{1}{4} \ln \frac{pq}{(1-p)(1-q)}$$

# Le modèle d'Ising

Récursion descendante : pour $j = r$ à 1, on a

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + e^{2\alpha_{j+1} + 4\beta_{j+1}}}{1 + e^{-2\alpha_{j+1} + 4\beta_{j+1}}} \right]$$

$$\beta_j = \frac{1}{4} \ln \left[ 1 + \frac{e^{4\beta_{j+1} - 2\alpha_{j+1}} (1 - e^{-4\beta_{j+1}})^2}{(1 + e^{-2\alpha_{j+1}})^2} \right]$$

avec $\alpha_{r+1} = \alpha$ et $\beta_{r+1} = \beta$

# Le modèle d'Ising

Problème ouvert : en dimension 2 ???