

Champ de Markov couple pour la segmentation d'images texturées

Juliette Blanchet

INRIA Rhône-Alpes
Equipes Mistis et Lear

1 Segmentation d'images par champ de Markov caché

2 Segmentation de textures

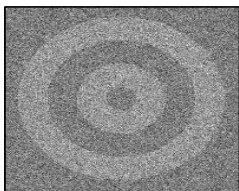
3 Résultats expérimentaux

1 Segmentation d'images par champ de Markov caché

2 Segmentation de textures

3 Résultats expérimentaux

Segmentation d'images



Observations $\mathbf{X} = (X_i)_{i \in S} \rightarrow$ Retrouver la classification $\mathbf{Y} = (Y_i)_{i \in S}$

\mathbf{Y} champ de Markov
 $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \prod_i f(x_i|y_i)$ }

(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est un champ de Markov caché
avec bruit indépendant (HMF-IN)

Champ de Markov : définition

- $Y = \{Y_i, i \in \mathcal{S}\}$, discret ($Y_i \in [1, \dots, K]$)
- \mathcal{S} spatialement ordonné : $\mathcal{N}_i = \{\text{voisins de } i \in \mathcal{S}\}$, $C = \{\text{cliques}\}$

\mathbf{Y} est un champ de Markov

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{z}, \begin{cases} P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{S} \setminus \{i\}}) = P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}) \\ P(\mathbf{y}) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y}, P(\mathbf{y}) = W^{-1} \exp(-H(\mathbf{y})) \quad (\text{mesure de gibbs})$$

Champ de Markov : définition

- $Y = \{Y_i, i \in \mathcal{S}\}$, discret ($Y_i \in [1, \dots, K]$)
- \mathcal{S} spatialement ordonné : $\mathcal{N}_i = \{\text{voisins de } i \in \mathcal{S}\}$, $C = \{\text{cliques}\}$

\mathbf{Y} est un champ de Markov

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{z}, \begin{cases} P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{S} \setminus \{i\}}) = P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}) \\ P(\mathbf{y}) > 0 \end{cases}$$

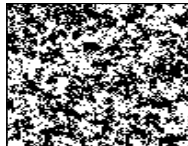
$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y}, P(\mathbf{y}) = W^{-1} \exp(-H(\mathbf{y})) \quad (\text{mesure de gibbs})$$

où : $W = \sum_{\mathbf{y}} \exp(-H(\mathbf{y}))$ (constante de normalisation, **incalculable**)

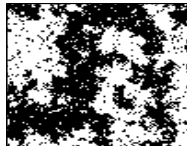
$$H(\mathbf{y}) = \sum_{c \in C} V_c(\mathbf{y}_c) \quad (\text{fonction d'énergie})$$

Champ de Markov : exemple

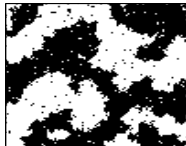
Modèle de Potts : $H(\mathbf{y}) = -\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i = y_j}$



$\beta = 0.3$



$\beta = 0.4$



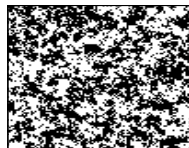
$\beta = 0.5$



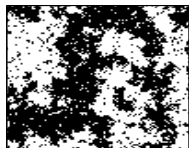
$\beta = 0.6$

Champ de Markov : exemple

Modèle de Potts : $H(\mathbf{y}) = -\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i = y_j}$



$\beta = 0.3$



$\beta = 0.4$

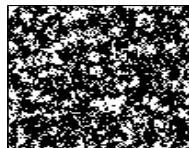


$\beta = 0.5$

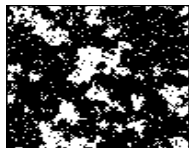


$\beta = 0.6$

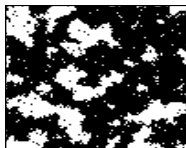
Modèle de Potts généralisé : $H(\mathbf{y}) = -\sum_{i \sim j} B_{y_i, y_j}$



$$B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.32 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.42 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.62 \end{pmatrix}$$

Approximation en champ moyen

- $P(\mathbf{y})$ incalculable
→ Approche de type Champ moyen pour se ramener à un système de variables indépendantes.
Pour un site $i : \forall j \in \mathcal{N}(i), y_j \leftarrow \mathbf{E}[Y_j] = \mu_j$
⇒ système de variables indépendantes

$$P(\mathbf{y}) \approx \prod_i P(y_i | \mu_{\mathcal{N}_i}) \quad P(\mathbf{y}) \approx \prod_i P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}^*)$$

Approximation en champ moyen

- $P(\mathbf{y})$ incalculable
→ Approche de type Champ moyen pour se ramener à un système de variables indépendantes.
Pour un site $i : \forall j \in \mathcal{N}(i), y_j \leftarrow \mathbf{E}[Y_j] = \mu_j$
⇒ système de variables indépendantes

$$P(\mathbf{y}) \approx \prod_i P(y_i | \mu_{\mathcal{N}_i}) \quad P(\mathbf{y}) \approx \prod_i P(y_i | \mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}^*)$$

- Algorithme Champ moyen-EM (MF-EM) sur (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : à chaque itération
 - créer le champ des constantes \mathbf{y}^* .
 - appliquer l'algorithme EM sur le système factorisé.⇒ estimation des paramètres, classification

Remarques

- \mathbf{Y} est un champ de Markov et $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \prod_{i \in S} f(x_i|y_i)$
- $\Leftrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est un champ de Markov d'énergie $H(\mathbf{y}) + \sum_i \log f(x_i|y_i)$

- \mathbf{Y} est un champ de Markov et $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \prod_{i \in S} f(x_i|y_i)$
 $\Leftrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est un champ de Markov d'énergie $H(\mathbf{y}) + \sum_i \log f(x_i|y_i)$
- Généralisation 1 :
 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est un champ de Markov mais $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \neq \prod_i f(x_i|y_i)$
→ Approximation en champ moyen à (\mathbf{X}, \mathbf{Y})
⇒ MF-EM reste applicable, mais formules non explicites (descente de gradient)

- \mathbf{Y} est un champ de Markov et $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \prod_{i \in S} f(x_i|y_i)$
 $\Leftrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est un champ de Markov d'énergie $H(\mathbf{y}) + \sum_i \log f(x_i|y_i)$
- Généralisation 1 :
 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est un champ de Markov mais $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \neq \prod_i f(x_i|y_i)$
→ Approximation en champ moyen à (\mathbf{X}, \mathbf{Y})
⇒ MF-EM reste applicable, mais formules non explicites (descente de gradient)
- Généralisation 2 : \mathbf{Y} non markovien ?
→ Ajout d'un champ auxiliaire \mathbf{Z} tel que :
 (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un couple markovien et $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \prod_i f(x_i|y_i, z_i)$
⇒ MF-EM reste applicable à $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$

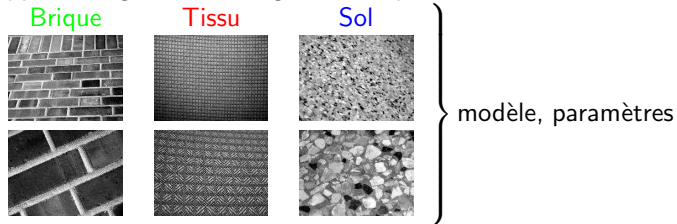
1 Segmentation d'images par champ de Markov caché

2 Segmentation de textures

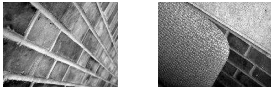
3 Résultats expérimentaux

Reconnaissance de textures

- Apprentissage sur les images de chaque texture :

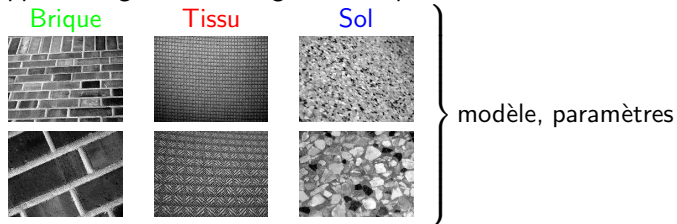


- Reconnaissance de nouvelles images :

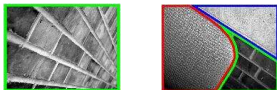


Reconnaissance de textures

- Apprentissage sur les images de chaque texture :

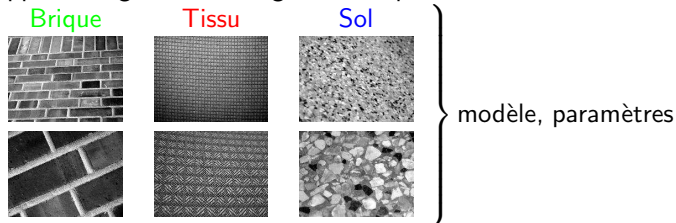


- Reconnaissance de nouvelles images :

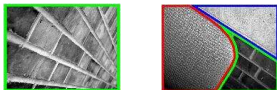


Reconnaissance de textures

- Apprentissage sur les images de chaque texture :



- Reconnaissance de nouvelles images :



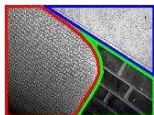
+ Dépendance spatiale des données d'une image

+ Données cachées

⇒ **Champ de Markov caché**

Modélisation

- Observations $X = \{X_i, i \in S\}$
- Retrouver la texture correspondante $Y = \{Y_i, i \in S\}$



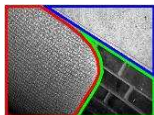
Une texture = région non homogène \Rightarrow plusieurs classes

\rightarrow ajout d'un champ auxiliaire $Z = \{Z_i, i \in S\}$ (\simeq sous-classes) tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \text{ markovien} \\ f(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \prod_i f(x_i|y_i, z_i) \end{array} \right\} (\mathbf{X}, \mathbf{V}) \text{ champ de Markov caché} \\ \text{avec bruit indépendant (HMF-IN)}$$

Modélisation

- Observations $X = \{X_i, i \in S\}$
- Retrouver la texture correspondante $Y = \{Y_i, i \in S\}$

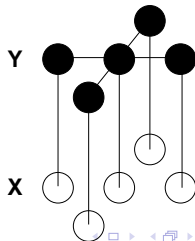
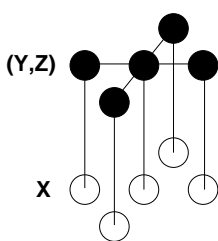


Une texture = région non homogène \Rightarrow plusieurs classes

\rightarrow ajout d'un champ auxiliaire $Z = \{Z_i, i \in S\}$ (\simeq sous-classes) tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \text{ markovien} \\ f(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \prod_i f(x_i|y_i, z_i) \end{array} \right\}$$

(\mathbf{X}, \mathbf{V}) champ de Markov caché
avec bruit indépendant (HMF-IN)



$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

- (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un champ de Markov

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

- (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un champ de Markov
- Ni \mathbf{Y} ni \mathbf{Z} ne sont des champs de Markov

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

- (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un champ de Markov
- Ni \mathbf{Y} ni \mathbf{Z} ne sont des champs de Markov
- $\mathbf{Z}|\mathbf{y}$ est un champ de Markov

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

- (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un champ de Markov
- Ni \mathbf{Y} ni \mathbf{Z} ne sont des champs de Markov
- $\mathbf{Z}|\mathbf{y}$ est un champ de Markov
- $(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{y})$ HMF-IN \rightarrow Apprentissage

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto \exp\left(\underbrace{\beta \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{y_i=y_j}}_{\text{une texture est un bloc}} + \sum_{i \sim j} \underbrace{B_{y_i y_j}(z_i, z_j)}_{\substack{\simeq \text{corrélation} \\ \text{entre sous-classes}}} \right)$$

- (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) est un champ de Markov
- Ni \mathbf{Y} ni \mathbf{Z} ne sont des champs de Markov
- $\mathbf{Z}|\mathbf{y}$ est un champ de Markov
- $(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{y})$ HMF-IN \rightarrow Apprentissage
- Avec $\mathbf{V} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, (\mathbf{X}, \mathbf{V}) HMF-IN \rightarrow Test

- Apprentissage sur le HMF-IN ($\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{y}$) :

$$P(\mathbf{z}|\mathbf{y}) \approx \prod_i P(z_i|\mathbf{z}_{\mathcal{N}_i}^*, \mathbf{y}) \propto \prod_i \exp\left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} B_{y_i y_j}(z_i, z_j^*)\right)$$

Application de MF-EM pour estimer les matrices B et les paramètres Θ des $f(\cdot|y_i, z_i)$ (gaussiennes)

- Apprentissage sur le HMF-IN $(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{y})$:

$$P(\mathbf{z}|\mathbf{y}) \approx \prod_i P(z_i|\mathbf{z}_{\mathcal{N}_i}^*, \mathbf{y}) \propto \prod_i \exp\left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} B_{y_i y_j}(z_i, z_j^*)\right)$$

Application de MF-EM pour estimer les matrices B et les paramètres Θ des $f(\cdot|y_i, z_i)$ (gaussiennes)

- Reconnaissance sur le HMF-IN (\mathbf{X}, \mathbf{V}) avec $\mathbf{V} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \approx \prod_i P(y_i, z_i|\mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}^*, \mathbf{z}_{\mathcal{N}_i}^*) \propto \prod_i \exp\left(\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} 1_{y_i=y_j} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \hat{B}_{y_i y_j}(z_i, z_j^*)\right)$$

Application de MF-EM pour estimer β , avec \hat{B} et $\hat{\Theta}$ connus.

Classification par MAP ou MPM :

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \approx \sum_{\mathbf{z}_i} \prod_i P(y_i, z_i|\mathbf{y}_{\mathcal{N}_i}^*, \mathbf{z}_{\mathcal{N}_i}^*) f(x_i|y_i, z_i)$$

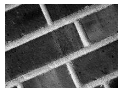
1 Segmentation d'images par champ de Markov caché

2 Segmentation de textures

3 Résultats expérimentaux

Echantillon des textures

Brique



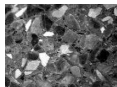
Moquette



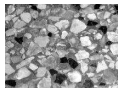
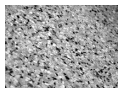
Tissu



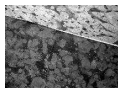
Sol 1



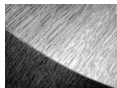
Sol 2



Marbre



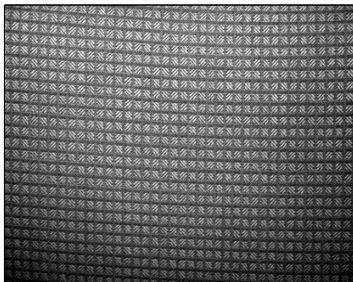
Bois



$7 \times 10 = 70$ images

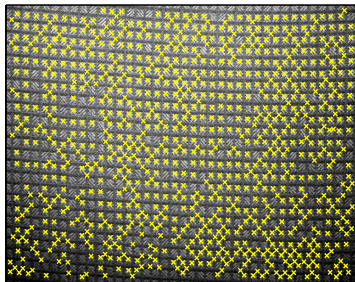
Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
 - En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



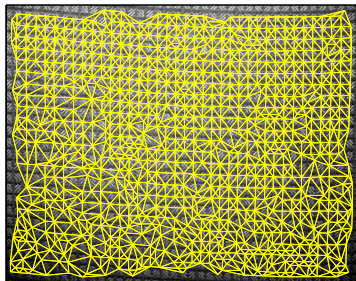
Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
 - En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



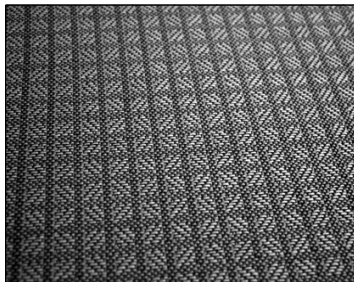
Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
 - En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



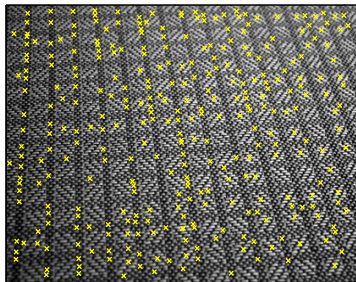
Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
- En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



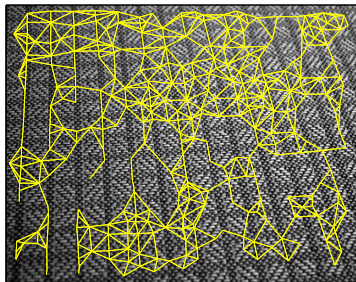
Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
 - En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



Données : descripteurs locaux

- Niveaux de gris : information faible
 - En vision : descripteurs locaux
 - données multidimensionnelles (128)
 - en des points "significatifs", irrégulièrement espacés
- ⇒ description plus compacte et complète, structure locale
- graphe de voisinage de Delaunay



2 modèles :

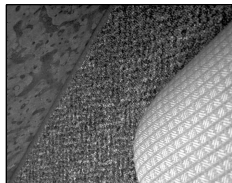
- modèle indépendant
- modélisation par champ de Markov couple caché

70 images uni-textures, 68 multi-textures.

$f(\cdot|y_i, z_i) =$ gaussienne de matrice de covariance diagonale (Σ^{diag}) ou paramétrée pour la grande dimension (Σ^{hdim}) [cf C.Bouveyron]

Mod.	Cov.	Brique	Moq.	Tissu	Sol1	Sol2	Marbre	Bois
Ind.	Σ^{diag}	77.58	31.60	58.26	28.26	58.79	33.87	58.56
Ind.	Σ^{hdim}	81.18	56.94	62.48	35.64	67.43	37.05	65.02
Mark.	Σ^{diag}	96.59	80.70	83.60	82.69	83.90	46.05	95.18
Mark.	Σ^{hdim}	99.33	98.61	99.28	97.36	99.57	56.24	99.28

Un exemple...



Brique



Moquette



Tissu



Sol 1



Sol 2



Marbre



Bois



41.52%



43.39%



79.91%



94.29%

Pour l'instant, $\mathbf{V} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ est markovien d'énergie H et

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{v}) = \prod_i f(x_i|v_i) \propto \exp\left(\sum_i \frac{1}{2\sigma_{v_i}^2}(x_i - m_{v_i})^2\right)$$

⇒ Généraliser au cas du bruit non indépendant :

$f(\mathbf{x}|\mathbf{v}) \neq \prod_i f(x_i|v_i)$ mais le couple (\mathbf{X}, \mathbf{V}) reste markovien.

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \propto \exp\left(\sum_i \frac{1}{2\sigma_{v_i}^2}(x_i - m_{v_i})^2 + \sum_{i \sim j} q_{v_i v_j} (x_i - m_{v_i})(x_j - m_{v_j}) + H(\mathbf{v})\right)$$

→ Approximation en champ moyen de $P(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

→ MF-EM reste applicable